Опредѣленіе силы, движущей по коническому сѣченію матеріальную точку, въ функціи ея координатъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Года два тому назадъ г. *Бертранъ* помѣстилъ въ отчетахъ о засѣданіяхъ парижской академіи замѣтку [1], интересъ которой обнаруживается изъ слѣдующаго вступленія къ ней:

«Еслибъ Кеплеръ вывелъ изъ наблюденій только одинъ изъ своихъ законовъ: *планеты описываютъ эллипсы, въ фокусѣ которыхъ находится солнце*, то можно бы изъ этого результата, возведеннаго въ общій принципъ, заключить, что управляющая ими сила направлена къ солнцу и обратно пропорціональна квадрату разстоянія». Показавъ остроумное аналитическое рѣшеніе этой задачи, г. *Бертранъ* вмѣстѣ съ тѣмъ предложилъ на рѣшеніе математикамъ слѣдующее ея обобщеніе. Я опять приведу собственныя его слова.

«Было бы интересно рѣшить слѣдующій вопросъ:

«*Зная, что планеты описываютъ коническія сѣченія и не предполагая ничего болѣе, найдти выраженія слагающихъ дѣйствующихъ на нихъ силъ въ функціяхъ координатъ точекъ ихъ приложенія*». «Мы знаемъ два рѣшенія: сила мо-

---

[1] Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de *Kepler* le principe de l'attraction. *Note* de M. J. *Bertrand*. Comptes rendus, 9 Avril, 1877.

жетъ быть направлена къ постоянному центру и дѣйствовать пропорціонально разстоянію или въ обратномъ отношеніи его квадрата. Существуютъ ли другія рѣщенія?». «Предыдущій способъ (т. е. способъ, употребленный г. Бертраномъ для рѣшенія упомянутаго выше частнаго случая задачи) могъ бы привести къ рѣшенію этой задачи, но вычисленія такъ сложны, что никакой геометръ, я думаю, не попытается ихъ выполнить, не найдя сначала средства ихъ упростить». Я постараюсь показать, что предугаданная г. Бертраномъ возможность упростить вычисленія заключается въ выборѣ приличной вопросу формы общаго уравненія коническихъ сѣченій.

Благодаря этой формѣ, мы рѣшимъ общую задачу, слѣдуя вполнѣ за пріемами, указанными г. Бертраномъ при рѣшеніи частнаго ея случая; встрѣчающіяся при этомъ небольшія усложненія вычисленій легко устраняются при помощи нѣкоторыхъ свойствъ опредѣлителей.

Пусть свободная матеріальная точка описываетъ коническое сѣченіе, опредѣляемое въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ x и y уравненіемъ общаго вида:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

его можно привести къ менѣе общему виду

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = (ax + by + c)^2, \qquad (1)$$

полагая

$$c = \sqrt{F},\ b = \frac{E}{\sqrt{F}},\ a = \frac{D}{\sqrt{F}},$$

$$p = \frac{D^2}{F} - A,\ q = \frac{E^2}{F} - C,\ r = \frac{DE}{F} - B.$$

Движеніе свободной матеріальной точки въ плоскости опредѣляется дифференціальными уравненіями:

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dx'}{dt}=X, \quad \frac{dy'}{dt}=Y, \qquad (2)$$

гдѣ t означаетъ время, а X и Y слагающія ускорительной силы, параллельныя осямъ x и y.

Намъ слѣдуетъ опредѣлить выраженія X и Y посредствомъ x и y, такъ чтобы уравненіе (1) было однимъ изъ интеграловъ системы уравненій (2), не заключающимъ x', y' и t. Пусть a, b, c означаютъ три произвольныя постоянныя, входящія въ этотъ интегралъ; тогда остальные коэффиціенты уравненія (1) p, q, r нужно разсматривать какъ опредѣленныя постоянныя, которыя могутъ войдти въ искомыя выраженія X и Y.

Произведемъ теперь вычисленія, необходимыя для исключенія произвольныхъ постоянныхъ a, b, c изъ ур. (1), или — вычисленія, которыя могли бы служить для повѣрки, что уравненіе (1) есть интегралъ дифференціальныхъ уравненій (2), еслибъ X и Y были извѣстны. На этомъ пути мы должны встрѣтить необходимое условіе, которому должны удовлетворять X и Y, откуда и могутъ быть найдены ихъ значенія. Для этого представимъ уравненіе (1) подъ видомъ:

$$u=ax+by+c, \qquad (3)$$

положивъ

$$u^2=px^2+qy^2+2rxy. \qquad (4)$$

Дифференцируя въ отношеніи t изъ (3) при помощи (2) и (4) получимъ:

$$ax'+by'=\frac{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'}{u} \qquad (5)$$

Продолжая дифференцировать въ отношеніи t и пользоваться уравненіями (2) и (4), будемъ имѣть

$$aX+bY=\frac{(px+ry)\,X+(rx+qy)\,Y}{u}$$

$$+\frac{\{(px'+ry')\,x'+(rx'+qy')\,y'\}\,\{(px+ry)\,x+(rx+qy)\,y\}}{u^3}$$

$$-\frac{\{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'\}^2}{u^3}$$

Во второй части этого уравненія множитель при $\frac{1}{u^3}$ можно, при помощи опредѣлителей, представить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{vmatrix} (px+ry)\,x+(rx+qy)\,y, & (px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y' \\ (px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y', & (px'+ry')\,x'+(rx'+qy')\,y' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} px+ry, & rx+qy \\ px'+ry', & rx'+qy' \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p, & r \\ r, & q \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}$$

$$=(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2.$$

Слѣдовательно предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$aX+bY=\frac{(px+ry)\,X+(rx+qy)\,Y}{u} \qquad (6)$$

$$+\frac{(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2}{u^3}.$$

Далѣе изъ (5) и (6) находимъ:

$$a=\frac{(px+ry)}{u}+\frac{(pq-r^2)\,y'\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}$$

$$b=\frac{(rx+qy)}{u}-\frac{(pq-r^2)\,x'\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}$$

Теперь, для окончательнаго исключенія произвольныхъ постоянныхъ, остается только любое изъ двухъ послѣднихъ уравненій, например первое, продифференцировать въ отношеніи t, что, на основаніи (2) и (4), сначала доставитъ

$$0 = \frac{(px'+qy')\,[(px+ry)\,x+(rx+qy)\,y]}{u^3}$$

$$-\frac{(px+qy)\,[(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y']}{u^3}$$

$$+\frac{(pq-r^2)\,(xy'-yx')^2}{u^3\,(Xy'-Yx')}\left\{ Y-3y'\,\frac{(px+ry)\,x'+(rx+qy)\,y'}{u^2} - y'\,\frac{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}x'+\dfrac{\partial X}{\partial y}y'\right)y'-\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}x'+\dfrac{\partial Y}{\partial y}y'\right)x'}{Xy'-Yx'}\right\}$$

$$+\frac{2\,(pq-r^2)\,y'\,(xy'-yx')\,(xY-yX)}{u^3\,(Xy'-Yx')}.$$

Послѣ очевидныхъ приведеній, два первыхъ члена можно написать такимъ образомъ:

$$-\frac{y'}{u^3}\begin{vmatrix} px+ry, & rx+qy \\ px'+ry', & rx'+qy' \end{vmatrix} = -\frac{y}{u^3}\begin{vmatrix} p, & r \\ r, & q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix};$$

слѣдовательно во всѣхъ членахъ уравненія войдетъ общій множитель

$$\frac{pq-r^2}{u^3}\,(xy'-yx')$$

отбросивъ который, получимъ:

$$0 = -y'$$

$$+\frac{xy'-yx'}{Xy'-Yx'}\left\{ Y-3y'\,\frac{(px+ry)\,x'+(rx+py)\,y'}{u^2} - y'\,\frac{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}x'+\dfrac{\partial X}{\partial y}y'\right)y'-\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}x'+\dfrac{\partial Y}{\partial y}y'\right)x'}{Xy'-Yx'}\right\}$$

$$+\frac{2y'\,(xY-yX)}{Xy'-Yx'}. \qquad (7)$$

и

Еслибъ искомыя выраженія X и Y какъ функціи x и y были извѣстны; то (7), какъ результатъ повѣрки, что (1) есть интегралъ (2), должно бы повѣряться при всякихъ значеніяхъ x, y, x', y'. Но оставляя X и Y неопредѣленными и дѣлая $x = x'$ и $y = y'$ въ уравненіи (7), находимъ, что по-видимому среднiй членъ его уничтожится, а остальные два члена даютъ

$$-y - 2y = 0, \text{ или } -3y = 0$$

равенство, очевидно, нелѣпое. Для устраненія такого противурѣчія въ выводахъ необходимо X и Y должны имѣть такія выраженія въ x и y, при которыхъ множитель $xy' - yx'$ средняго члена уравненія (7) сократится съ его дѣлителемъ $Xy' - Yx'$. Слѣдовательно слагающія ускорительной силы должны имѣть выраженія вида:

$$X = V \,.\, x \text{ и } Y = V \,.\, y, \qquad (8)$$

гдѣ V пока неизвѣстная функція отъ x и y. Это заключеніе показываетъ уже, что

$$xY - yX = 0,$$

т. е. что моментъ ускорительной силы въ отношеніи начала координатныхъ осей, къ которымъ отнесено коническое сѣченіе (1), постоянно уничтожается и, слѣдовательно, что эта точка есть центръ ускорительной силы.

Подставивъ въ уравненіе (7) выраженія X и Y (8) по упрощеніи получимъ:

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y'\right) + \frac{3\,[(px + ry)\,x' + (rx + qy)\,y']}{u^2} = 0$$

уравненіе имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ x' и y'; поэтому оно распадается на два уравненія:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{3\,(px + ry)}{u^2} = 0$$

и

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dy}+\frac{3(rx+qy)}{u^2}=0.$$

Умноживъ эти послѣднія соотвѣтственно на dx, dy и складывая, находимъ:

$$\frac{dV}{V}+\frac{3[(px+ry)\,dx+(rx+qy)\,dy]}{u^2}=0.$$

Но дифференцируя (4) имѣемъ

$$udu=(px+ry)\,dx+(rx+qy)\,dy;$$

слѣдовательно

$$\frac{dV}{V}+\frac{3du}{u}=0.$$

Интегрируя это уравненіе и означая черезъ μ произвольное постоянное, находимъ

$$V=\frac{\mu}{u^3}=\frac{\mu}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}. \qquad (9)$$

Слѣдовательно

$$X=\frac{\mu x}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}=\frac{\mu x}{u^3}$$

и

$$Y=\frac{\mu y}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}}=\frac{\mu y}{u^3}.$$

Отсюда имѣемъ равнодѣйствующую силъ X и Y

$$F=\frac{\mu\sqrt{x^2+y^2}}{(px^2+2rxy+qy^2)^{3/2}} \qquad (10)$$

Наконецъ, введя вмѣсто x и y радіусъ R, проведенный изъ начала, и уголъ θ, составляемый имъ съ осью x, находимъ

$$F=\frac{1}{\{\frac{1}{2}(p-q)\,\mathrm{Cos}\,2\theta+r\,\mathrm{Sin}\,2\theta+\frac{1}{2}(p+q)\}^{3/2}}\,\frac{\mu}{R^2}=\frac{uR}{u^3}\ (11)$$

И такъ, изъ единственнаго факта, что свободное тѣло (матеріальная точка) описываетъ коническое сѣченіе, и предположенія, что дѣйствующая на него ускорительная сила измѣняется только съ положеніемъ тѣла, необходимо слѣдуетъ:

1) что направленіе силы всегда проходитъ черезъ постоянный центръ, которымъ можетъ быть однако всякая точка плоскости коническаго сѣченія;

2) что напряженіе силы F должно измѣняться вообще, какъ показываетъ формула (11), не только съ разстояніемъ R центра силы отъ движущагося тѣла, но также и съ направленіемъ его радіуса вектора.

Остается еще показать, какъ изъ этого общаго рѣшенія получится два извѣстные его частные случая, когда центръ силы предполагается въ центрѣ коническаго сѣченія или въ его фокусѣ, вслѣдствіе чего величина ускорительной силы становится независимою отъ ея направленія и будетъ въ 1-мъ случаѣ пропорціональною радіусу-вектору, а во 2-мъ обратно пропорціональною его квадрату.

Если центръ силы предположимъ въ центрѣ коническаго сѣченія; то, вмѣстѣ съ тѣмъ предполагая и начало координатъ въ этой точкѣ, будемъ имѣть

$$D=0 \text{ и } E=0$$

въ первой общей формѣ уравненій коническихъ сѣченій, а потому во второй формѣ

$$a=0,\ b=0$$

и

$$px^2+qy^2+2rxy=c^2;$$

слѣдовательно, на основаніи формулы (10),

$$F=\frac{\mu}{c^3}\cdot R,$$

т. е. величина силы не зависитъ отъ ея направленія и прямо пропорціональна радіусу-вектору.

Если центръ силы предположимъ въ фокусѣ и примемъ его за начало координатъ, тогда проведенный изъ него радіусъ-векторъ R къ какой-нибудь точкѣ коническаго сѣченія выразится функціей первой степени ея координатъ, т. е. уравненіе (1) получитъ видъ

$$R=ax+by+c$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ

$$u=R.$$

Слѣдовательно формула (11) получитъ видъ

$$F=\frac{\mu}{R^2},$$

т. е. снова величина ускорительной силы становится независимою отъ ея направленія и измѣняется обратно пропорціонально квадрату радіуса-вектора.

Мнѣ необходимо прибавить нѣсколько словъ въ заключеніе моей предыдущей замѣтки. Я занялся рѣшеніемъ задачи г. Бертрана, какъ-только узналъ о ея существованіи. Мнѣ не трудно было предвидѣть возможность легкаго ея рѣшенія, потому что еще раньше я замѣтилъ, что интегралы дифференціальныхъ уравненій общаго вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\Phi(px^2+qy^2)x, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\Phi(px^2+qy^2)y$$

весьма просто получаются въ квадратурахъ, и что въ частномъ случаѣ

$$\Phi(px^2+qy^2)=\frac{\mu}{(px^2+qy^2)^{3/2}}$$

для траекторіи находимъ коническое сѣченіе.

Поэтому, приступивъ къ рѣшенію обратной задачи, предложенной г. Бертраномъ, я обратилъ вниманіе на то, что успѣхъ его пріемовъ зависѣлъ отъ особенной формы

$$x^2+y^2=(ax+by+c)^2,$$

которую могутъ принимать уравненія коническихъ сѣченій въ прямоугольныхъ координатахъ, когда ихъ начало въ фокусѣ.

Поэтому я выбралъ для коническихъ сѣченій форму уравненія

$$px^2 \pm qy^2=(ax+by+c)^2.$$

Оказалось, что къ этой формѣ пріемы г. Бертрана вполнѣ приложимы, что ускорительная сила F и въ этомъ случаѣ должна проходить черезъ начало координатъ и выражаться формулой

$$F=\frac{\mu R}{(px^2+qy^2)^{3/2}}.$$

Моему намѣренію напечатать своевременно предыдущее рѣшеніе мое въ одномъ изъ французскихъ математическихъ журналовъ помѣшало появленіе одной статьи г. *Дарбу* [1], гдѣ онъ самъ формулируетъ рѣшаемую имъ задачу въ слѣдующихъ словахъ:

[1] Comptes rendus. T. LXXXIV, № 16 (16 Avril. 1877). «Recherche de la loi que doit suivre une force *centrale* pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique». Par *M. G. Darboux*.

«Зная, что матеріальная точка, подверженная дѣйствію *центральной* силы, всегда описываетъ коническое сѣченіе, найдти выраженіе силы».

Отсюда видно, что первоначальная задача г. Бертрана измѣнена г. Дарбу прибавленіемъ новаго условія, въ ней непредположеннаго, что сила — центральная, т. е. что существуетъ законъ площадей.

Дѣйствительно, онъ основываетъ рѣшеніе на формулѣ для центральной силы *Бине:*

$$F=\frac{C^2}{R^2}\left\{\frac{1}{R}+\frac{d^2\frac{1}{R}}{d\theta^2}\right\},$$

гдѣ C удвоенная площадь, описываемая въ единицу времени радіусомъ-векторомъ R. Опредѣливъ коническое сѣченіе уравненіемъ

$$\frac{1}{R}=a\operatorname{Cos}\theta+b\operatorname{Cos}\theta+\sqrt{A\operatorname{Cos}2\theta+B\operatorname{Sin}2\theta+H},$$

и прилагая къ нему формулу Бине, г. Дарбу нашелъ

$$F=\frac{C^2}{R^2}\,\frac{H^2-A^2B^2}{(A\operatorname{Cos}2\theta+B\operatorname{Sin}2\theta+H)^{3/2}}$$

легко замѣтить, что два послѣднихъ уравненія черезъ введеніе прямоугольныхъ координатъ примутъ видъ уравненія (1) и формулы (10).

Мнѣ кажется впрочемъ, что и мое рѣшеніе не лишено нѣкотораго интереса; такъ-какъ я нимало не измѣнилъ условій, выраженныхъ самимъ авторомъ задачи, и разрѣшилъ ея общій случай тѣми-же пріемами, которые онъ придумалъ для ея частнаго случая.