Приложенія.

I.

ЗАМѢТКА

объ одномъ предложеніи

изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ.

Д. М. Деларю.

Въ своихъ «Exercices de Mathématiques» (T. 2, p. 221) Коши высказалъ, что *для сходимости ряда*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots.$$

достаточно, чтобы разность

$$S_{n+m} - S_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1}$$

дѣлалась безконечно-малою величиною, когда n получаетъ неизмѣримо-большое значеніе, каково бы ни было при этомъ цѣлое число, означаемое чрезъ m.

Авторитетъ Коши доставилъ этому предложенію мѣсто въ большинствѣ руководствъ по алгебрѣ и исчисленію безконечно-малыхъ, и сомнѣній относительно его справедливости, сколько мнѣ извѣстно, не высказывалось. Только въ 1860 году французскій ученый Каталанъ, въ своемъ «Traité élémentaire des séries» не только усомнился въ точности этого предложенія, но даже категорически назвалъ его *невѣрнымъ*, указавъ, что въ расходящемся рядѣ

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\ldots.$$

выраженіе $S_{n+m}-S_n$, при допущеніи $m=n$, принимаетъ видъ

$$\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}+\ldots.+\frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}$$

и, оставаясь при всякомъ n менѣе $\frac{1}{\log n}$, съ увеличеніемъ n стремится къ нулю, откуда, по теоремѣ Коши, слѣдовало бы заключить, что рядъ сходящійся. Это замѣчаніе Каталана казалось не допускающимъ возраженій. Справедливость его призналъ Н. В. Бугаевъ въ своемъ прекрасномъ изслѣдованіи «О сходимости строкъ по ихъ внѣшнему виду», а Бертранъ въ своемъ извѣстномъ «Traité de calcul différentiel et de calcul intégral», выводя достаточные признаки сходимости рядовъ, прошелъ молчаніемъ помянутую теорему Коши. Однако въ 1868 году осужденная теорема вновь появилась въ роли математической истины на страницахъ извѣстнаго «Cours de calcul différentiel et intégral» Серре (Т. I, р. 137) и прекраснаго сочиненія Hoüel'я: Traité élémentaire des quantités complexes (р. 30). Ясно, что Серре и Hoüel находятъ эту теорему не подлежащею сомнѣнію и считаютъ замѣчаніе о ней Каталана неосновательнымъ. Такимъ образомъ вопросъ о справедливости этой теоремы Коши снова становится спорнымъ и требуетъ рѣшенія.

Такъ-какъ Hoüel высказываетъ только самое предложеніе, а не приводитъ его доказательства, то остается разсмотрѣть тѣ доводы, которые приводитъ въ его подтвержденіе Серре.

Самое предложеніе Серре высказываетъ въ такой формѣ:

«*Строка*

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots.\ u_{n-1}, \ldots.$$

сходящаяся, когда сумма

$$u_n+u_{n+1}+\ \ldots\ +u_{n+p-1},$$

при неопредѣленно возрастающемъ n, стремится къ нулю, каково бы ни было p».

Для доказательства его Серре разсуждаетъ буквально такъ: «Дѣйствительно, означимъ чрезъ E положительное количество сколь угодно малое, а чрезъ S_n сумму первыхъ n членовъ строки. Такъ-какъ разность

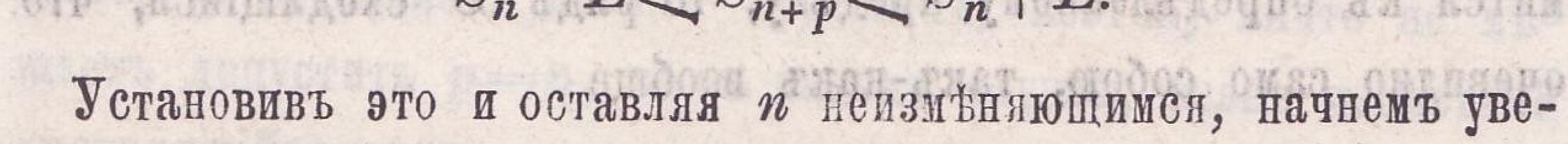
$$S_{n+p}-S_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1}$$

стремится къ нулю, каково бы ни было p, согласно допущенію, когда n стремится къ безконечности, то n можно приписать *опредѣленное* значеніе достаточно большое для того, чтобы разность, о которой идетъ рѣчь, заключалась, каково бы ни было p, между $-E$ и $+E$. Поэтому будемъ имѣть:

$$S_n-E<S_{n+p}<S_n+E.$$

Установивъ это и оставляя n неизмѣняющимся, начнемъ увеличивать неопредѣленно p; сумма S_{n+p} будетъ оставаться заключенною между двумя опредѣленными предѣлами S_n-E и S_n+E, разность между которыми $2E$ сколь угодно мала; откуда, очевидно, слѣдуетъ, что S_{n+p} стремится къ опредѣленному предѣлу, когда p, или $n+p$, неопредѣленно возрастаетъ».

«Это доказательство пріобрѣтаетъ болѣе ясности, когда ему дается геометрическая форма. Пусть O постоянная точка оси Ox. Отложимъ на Ox отъ точки O длину $ON=S_n$, затѣмъ сдѣлаемъ $AN=NA'=E$; возьмемъ также $OP=S_{n+p}$; точка P упадетъ между A и A'.



Такимъ образомъ сумма S_{n+p} первыхъ $n+p$ членовъ нашей строки можетъ быть представлена абсциссою, конецъ которой падаетъ постоянно между двумя данными точками A и A'; слѣдовательно, она конечная величина; но сверхъ того она и опредѣленная величина, потому что разстояніе AA' можетъ сдѣлаться менѣе всякой даной длины».

Доказательство это кажется съ перваго взгляда весьма точнымъ, но, всматриваясь въ него ближе, приходишь къ заключенію, что оно не отвѣчаетъ, въ сущности, доказываемой теоремѣ. Въ самомъ дѣлѣ, самое предложеніе состоитъ въ томъ, что рядъ

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots .$$

непремѣнно сходящійся, если сумма

$$Q = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

по мѣрѣ увеличенія n стремится къ нулю, каково бы ни было число p; между тѣмъ Серре въ сущности доказываетъ, что если при достаточно большомъ n сумма Q съ увеличеніемъ p стремится къ опредѣленному предѣлу, то рядъ S сходящійся, что очевидно само собою, такъ-какъ вообще

$$S = S_n + \lim [Q]_{p=\infty}$$

Предположеніе n постояннымъ едвали законно, такъ-какъ характеръ выраженія Q измѣняется вообще, смотря по тому, будемъ ли предполагать возрастающимъ число n или число p, или оба эти числа одновременно. Показать это легко. Въ самомъ дѣлѣ, подчиняя члены ряда только условію убывать съ увеличеніемъ n, мы будемъ имѣть, что въ суммѣ

$$Q = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

первый членъ есть наибольшій, а послѣдній наименьшій, почему будетъ

$$p \cdot u_n > Q > p \cdot u_{n+p-1}$$

или

$$\frac{u_n}{\left(\frac{1}{p}\right)} > Q > \frac{u_{n+p-1}}{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

Теперь, при постоянномъ n, дробь $\frac{u_n}{\left(\frac{1}{p}\right)}$ непремѣнно обращается въ безконечность вмѣстѣ съ p, а дробь $\frac{u_{n+p-1}}{\left(\frac{1}{p}\right)}$ принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$; напротивъ, при увеличивающемся n и постоянномъ, хотя бы и весьма большомъ p, обѣ дроби обращаются въ нуль, если только $\lim u_n = 0$; въ этомъ случаѣ Q стремится къ нулю. Наконецъ, при допущеніи, что n и p увеличиваются одновременно, характеръ обѣихъ дробей будетъ зависѣть отъ закона, связывающаго увеличеніе n съ увеличеніемъ p. Теорема Коши предполагаетъ увеличеніе n, а относительно p оставляетъ полный произволъ; поэтому ничто не мѣшаетъ допустить $p=n$, но въ такомъ случаѣ, взявъ извѣстный расходящійся рядъ,

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} + \ldots,$$

для суммы Q получимъ выраженіе

$$\frac{1}{(n+2)\log(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}.$$

и затѣмъ будемъ имѣть при всякомъ n

$$\frac{n}{(n+2)\log(n+2)} > Q > \frac{n}{(2n+1)\log(2n+1)},$$

почему въ предѣлѣ, для $n=\infty$, Q обратится въ нуль. Отсюда слѣдовало бы, что взятый рядъ сходящійся, въ то время какъ онъ расходящійся. Слѣдовательно, въ такой общей формѣ теорема Коши ошибочна. Значитъ, нельзя допускать p измѣняющимся одновременно съ n. Если же допустить p сколь угодно большимъ, но опредѣленнымъ числомъ, то теорема опять будетъ невѣрна, такъ-какъ въ такомъ случаѣ всѣ ряды, въ которыхъ

$\lim u_n = 0$, пришлось бы признавать за сходящіеся, о чемъ и рѣчи быть не можетъ. Остается понимать теорему въ томъ смыслѣ, что при опредѣленномъ n сумма Q стремится къ конечному предѣлу съ увеличеніемъ p; но въ такомъ случаѣ теорема теряетъ всякое значеніе, потому что сводится на простое утвержденіе, что всѣ сходящіеся ряды дѣйствительно сходящіеся. Вотъ почему доказывать теорему Коши, предполагая n опредѣленнымъ числомъ, какъ дѣлаетъ Серре, едва-ли законно. Желательно поэтому, чтобы теорема эта не встрѣчалась въ математическихъ руководствахъ, особенно въ такихъ, которыя пользуются всеобщею хорошею репутаціей. Теорема эта къ тому же не имѣетъ въ сущности и значенія, такъ-какъ достаточныхъ признаковъ сходимости рядовъ предложено и помимо ея немало.