II.

З А Д А Ч А.

Раздѣлить площадь данной трапеціи на n равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ.

В. Г. Имшенецкаго.

Легкость или трудность рѣшенія задачъ элементарной геометріи очень часто зависитъ отъ выбора неизвѣстныхъ.

Такъ, напримѣръ, въ предыдущей задачѣ при одномъ выборѣ неизвѣстныхъ приходится рѣшить только уравненіе 2-й степени и построить его корень; при другомъ—интегрировать уравненіе въ конечныхъ разностяхъ; если же обобщить выраженіе задачи, то для рѣшенія ея должно уже пользоваться свойствами опредѣленныхъ интеграловъ.

Пусть въ трапеціи $ABCD$ даны ея стороны $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, изъ которыхъ двѣ послѣднія между собою параллельны и $b > c$.

Требуется сторону a раздѣлить на n частей:

$$a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_x, \; a_{x+1}, \; \ldots \; a_n,$$

такъ, чтобы проведенныя черезъ точки дѣленія прямыя:

$$b_1, b_2, .. b_{x-1}, b_x, b_{x+1}, \dots b_{n-1},$$

параллельныя AD и BC и заключенныя между сторонами AB и CD, раздѣлили всю трапецію на равновеликія части.

Означивъ черезъ i уголъ наклоненія сторонъ a и b, по послѣднему условію имѣемъ

$$\frac{1}{2}(b_{x-1}+b_x)\,a_x \sin i = \frac{1}{2n}(b+c)a \sin i,$$

и

$$\frac{1}{2}(b_x+b_{x+1})\,a_{x+1} \sin i = \frac{1}{2n}(b+c)a \sin i.$$

Сокращая общаго множителя $\frac{1}{2}\sin i$, дѣля первое уравненіе на a_x, второе на a_{x+1} и вычтя изъ него предыдущее, получимъ

$$b_{x+1} - b_{x-1} = \frac{a\,(b+c)}{n}\left(\frac{1}{a_{x+1}} - \frac{1}{a_x}\right).$$

Но легко замѣтить существованіе двухъ подобныхъ треугольниковъ, пропорціональность сторонъ которыхъ даетъ пропорцію

$$\frac{b_{x+1}-b_{x-1}}{a_{x+1}+a_x} = \frac{b-c}{a}.$$

Исключивъ $b_{x+1}-b_x$ изъ двухъ предыдущихъ уравненій, получимъ

$$a_{x+1}+a_x = \frac{a^2\,(b+c)}{n(b-c)}\left(\frac{1}{a_{x+1}} - \frac{1}{a_x}\right),$$

уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, къ интегрированію котораго приведено рѣшеніе предложенной задачи.

Интегралъ этого уравненія имѣетъ видъ

$$a_x = \sqrt{A+Bx} - \sqrt{A+B(x-1)},$$

гдѣ A произвольное постоянное, а B неопредѣленное постоянное, которое можно опредѣлить такъ, чтобы этотъ интегралъ дѣйствительно удовлетворялъ предыдущему уравненію въ конечныхъ разностяхъ.

Для этого находимъ

$$a_{x+1}=\sqrt{A+B(x+1)}-\sqrt{A+Bx},$$

$$a_{x+1}+a_x=\sqrt{A+B(x+1)}-\sqrt{A+B(x-1)},$$

$$\frac{1}{a_x}=\frac{\sqrt{A+Bx}+\sqrt{A+B(x-1)}}{B},$$

$$\frac{1}{a_{x+1}}=\frac{\sqrt{A+B(x+1)}+\sqrt{A+Bx}}{B},$$

$$\frac{1}{a_{x+1}}-\frac{1}{a_x}=\frac{\sqrt{A+B(x+1)}-\sqrt{A+B(x-1)}}{B}.$$

Слѣдовательно, подстановка даннаго интеграла въ предложенное уравненіе приводитъ къ слѣдующему значенію неопредѣленнаго постояннаго

$$B=\frac{a^2(b+c)}{n(b-c)}.$$

Что касается постояннаго A, то его значеніе осталось бы произвольнымъ, еслибъ задача выражалась лишь предыдущимъ уравненіемъ въ конечныхъ разностяхъ. Но изъ другихъ ея условій найдемъ для A вполнѣ опредѣленное значеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма всѣхъ отрѣзковъ a_1, a_2,.. a_n стороны a должна быть ей равна. Но мы имѣемъ

$$a_1=\sqrt{A+B}-\sqrt{A}$$

$$a_2=\sqrt{A+2B}-\sqrt{A+B}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_n=\sqrt{A+nB}-\sqrt{A+(n-1)B}$$

и, складывая эти равенства, получимъ

$$a=\sqrt{A+nB}-\sqrt{A};$$

откуда

$$\sqrt{A}=\frac{nB-a^2}{2a}=\frac{ac}{b-c}\ \text{ и }\ A=\frac{a^2c^2}{(b-c)^2}.$$

*

Слѣдовательно

$$a_x=\frac{a}{b-c}\left\{\sqrt{c^2+\frac{1}{n}(b^2-c^2)x}-\sqrt{c^2+\frac{1}{n}(b^2-c^2)(x-1)}\right\}.$$

Также легко привести предыдущую задачу къ одному изъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ:

$$b^2_{x+1}-2\,b^2_x+b^2_{x-1}=0$$

и

$$b^2_{x+1}-b^2_x=\frac{b^2-c^2}{n},$$

которыхъ соотвѣтственными интегралами будутъ

$$b_x=\sqrt{A+Bx}$$

и

$$b_x=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{n}x+C},$$

гдѣ произвольныя постоянныя A, B, C по даннымъ условіямъ должны имѣть значенія:

$$A=c^2,\ B=\frac{b^2-c^2}{n},\ C=c^2.$$

Элементарное рѣшеніе предыдущей задачи.

Означивъ черезъ α_x отрѣзокъ, отсѣкаемый отъ AB прямой b_x, параллельной сторонамъ b и c трапеціи, и выражая, что часть ея площади, заключающаяся между параллельными c и b_x, составляетъ $\frac{x}{n}$ часть всей трапеціи, получимъ

$$(c+b_x)\,\alpha_x=a(b+c)\,\frac{x}{n}.$$

Но легко замѣтить, что

$$\frac{b_x-c}{\alpha_x}=\frac{b-c}{a}.$$

Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій b_x, находимъ

$$\alpha^2_x + \frac{2\,ac}{b-c}\,\alpha_x = \frac{a^2(b+c)x}{n(b-c)},$$

откуда

$$\alpha_x = -\frac{a.c}{b-c} \pm \frac{a}{b-c}\sqrt{c^2+(b^2-c^2)\,\frac{x}{n}}\,.$$

Задачѣ соотвѣтствуетъ лишь корень съ верхнимъ знакомъ. Построеніе этого корня весьма легко. Изъ этого элементарнаго рѣшенія вытекаетъ предыдущее, потому что

$$a_x = \alpha_x - \alpha_{x-1}.$$

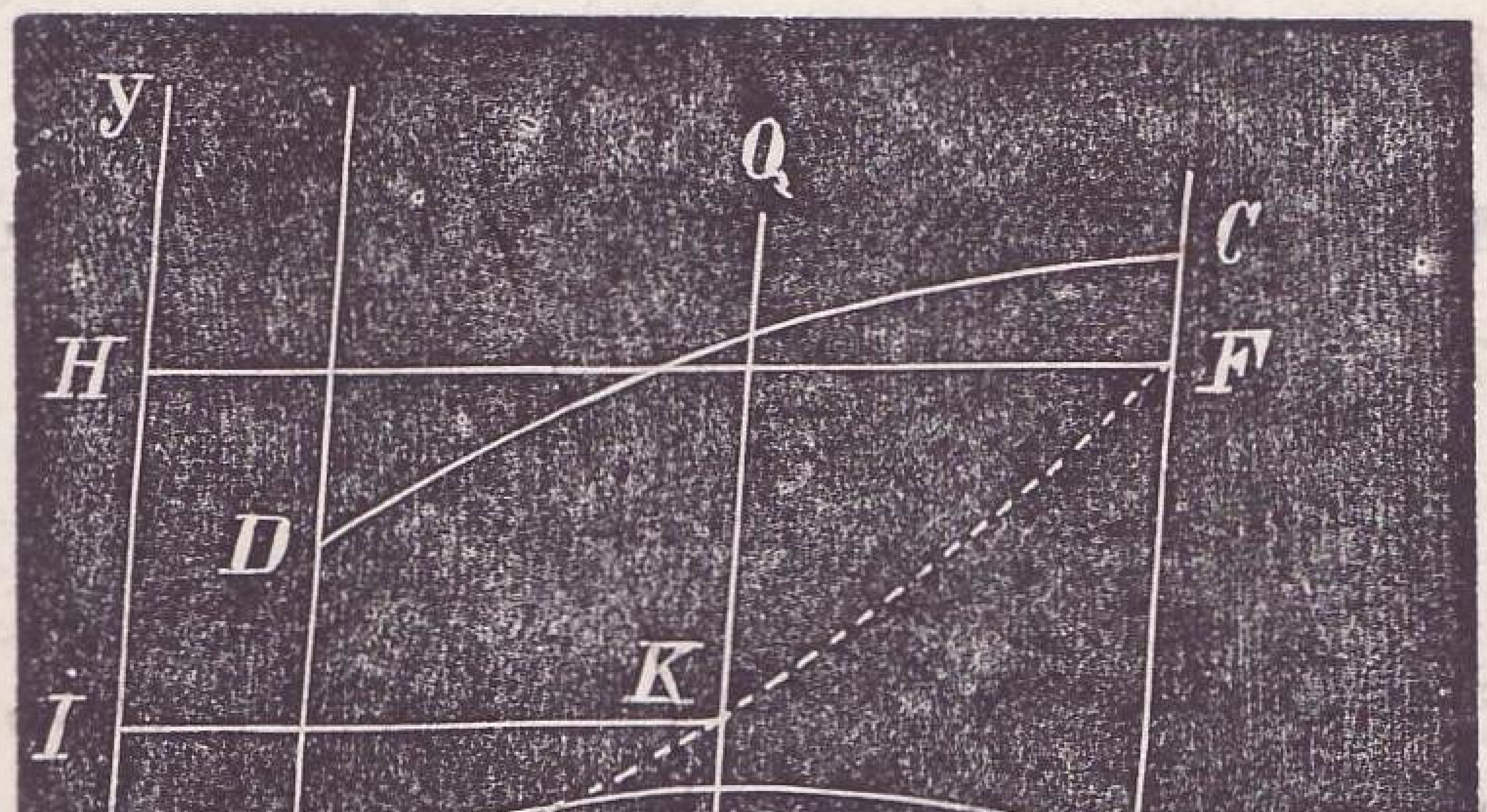
Подобнымъ-же образомъ опредѣляется неизвѣстная b_x.

Обобщеніе той-же задачи.

Назовемъ трапеціей фигуру, ограниченную двумя кривыми APB, CQD и двумя параллельными прямыми AD и BC.

Пусть требуется раздѣлить площадь $ABCD$ прямою PQ, параллельной AD и BC, на такія двѣ части, что

$$APQD : ABCD = m : n.$$



Пусть $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ уравненія кривыхъ AB и DC въ отношеніи осей OX и OY, изъ которыхъ OY параллельна AD и BC; въ отношеніи OX ординаты обѣихъ кривыхъ положительныя.

Если $O\alpha = a$, $O\beta = b$, $O\gamma = x$ абсциссы точекъ A, B, P, и $f_2(x) > f_1(x)$ отъ $x = a$ до $x = b$; то по условію задачи получимъ

$$\frac{\int_a^x \{f_2(x) - f_1(x)\}}{\int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\}} = \frac{m}{n}.$$

Если $\dfrac{dF(x)}{dx} = f_2(x) - f_1(x)$, то предыдущее уравненіе

приметъ видъ

$$F(x) - F(a) - \frac{m}{n}\Big\{F(b) - F(a)\Big\} = 0.$$

Отсюда должно быть получено единственное значеніе для x, удовлетворяющее задачѣ. Это значеніе x нетрудно построить. Между параллельными αAD и βBC проведемъ часть кривой EKF, представляемой уравненіемъ

$$Y = F\,(x).$$

Параллельно оси x проведемъ изъ E и F прямыя, пересѣкающія ось y въ G и H.

Отрѣзокъ GH раздѣлимъ въ точкѣ J такъ, что

$$GJ : GH = m : n.$$

Проведя изъ J параллельно оси x прямую, пересѣкающую кривую EF въ K, получимъ

$$x = JK.$$

Дѣйствительно, $OG = \alpha E = F(a)$, $OH = \beta F = F(b)$, $OJ = \gamma K = F(x)$; слѣдовательно послѣдняя пропорція приметъ видъ

$$\{F(x) - F(a)\} : \{F(b) - F(a)\} = m : n.$$

Нетрудно показать, какъ этотъ общій пріемъ примѣняется въ той частной задачѣ, которая приведена въ началѣ этой замѣтки.

Въ этомъ рѣшеніи заключается частный случай, когда параллельныя стороны AD и BC приводятся къ нулю и оно легко распространяется на тѣ случаи, когда условіе $f_1(x) < f_2(x)$ не выполняется въ промежуткѣ отъ $x=a$ до $x=b$.