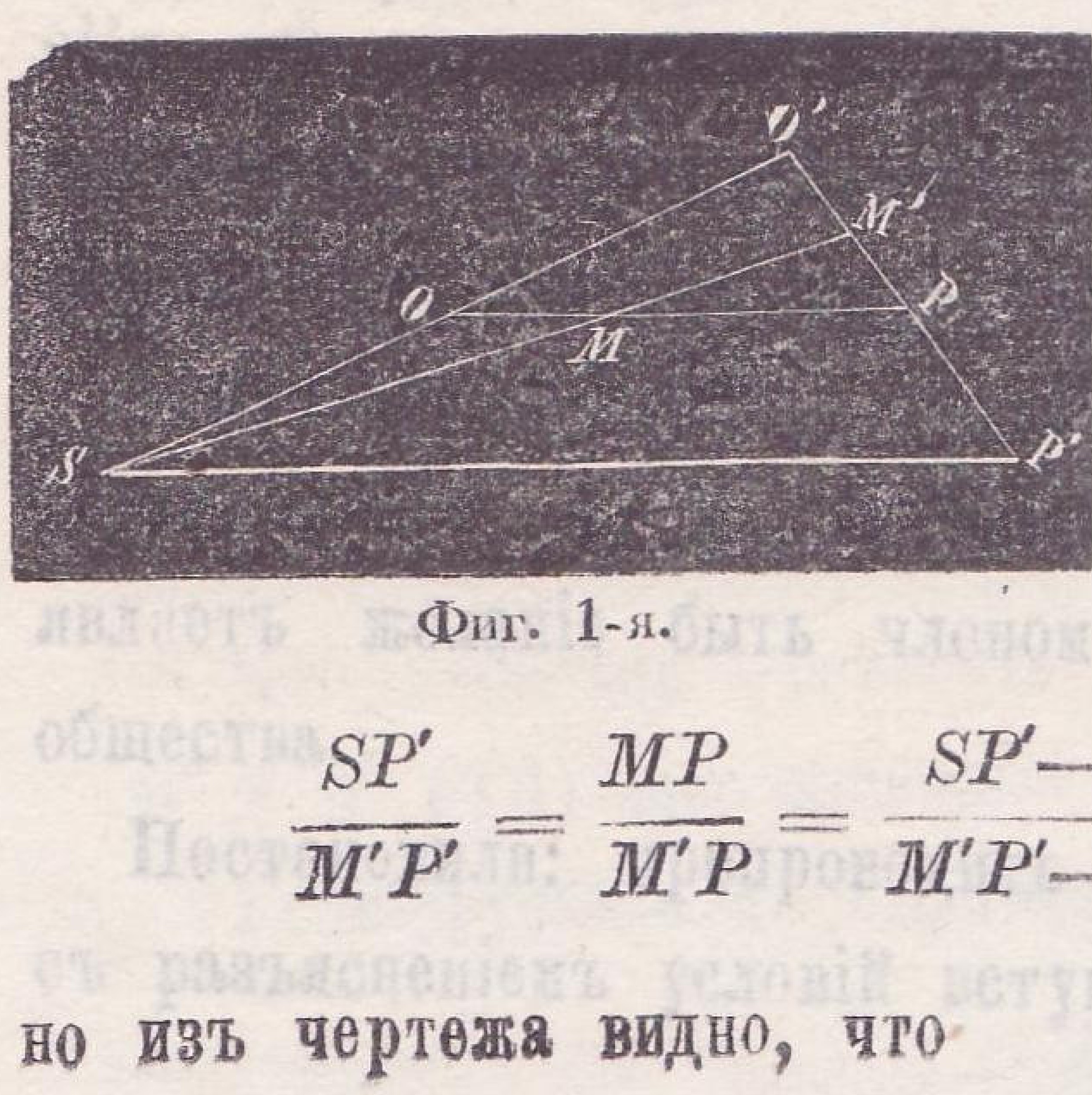
ЗАМѢТКА

объ одномъ вопросѣ графическаго исчисленія.

О. П. Фролова.

Положимъ, что намъ данъ какой-нибудь треугольникъ $SO'P'$ (фиг. 1-я), и пусть OP будетъ прямая, соединяющая средины двухъ сторонъ его SO' и $O'P'$. Проведемъ чрезъ вершину S прямую линію такъ, чтобы она отсѣкала на прямой OP отрѣзокъ OM, относящійся къ OP, какъ a къ b. Спрашивается, какую часть $O'M'$ отсѣкаетъ та-же самая прямая на сторонѣ $O'P'$, т. е. въ какомъ отношеніи будутъ находиться отрѣзки $O'M'$ и $O'P'$?



Фиг. 1-я.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ усматривается изъ подобія треугольниковъ $SM'P'$ и $MM'P$. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе этого подобія имѣемъ

$$\frac{SP'}{M'P'} = \frac{MP}{M'P} = \frac{SP'-MP}{M'P'-M'P} = \frac{SP'-2MP}{M'P'-2M'P}$$

но изъ чертежа видно, что

$$SP' - MP = 2OP - MP = OM + OP$$

$$SP' - 2MP = 2(OP - MP) = 2OM$$

$$M'P' - M'P = PP' = O'P = \frac{1}{2} O'P'$$

$$M'P' - 2M'P = O'P - M'P = O'M'$$

слѣдовательно, имѣемъ пропорцію

$$\frac{OM + OP}{O'P} = \frac{2OM}{O'M'}$$

откуда, перемѣстивъ крайніе члены и раздѣливъ обѣ части на 2, получимъ

$$\frac{O'M'}{O'P'} = \frac{OM}{OM + OP}.$$

По условію

$$\frac{OM}{OP} = \frac{a}{b} \text{ или } OM = \frac{a}{b} OP,$$

слѣдовательно

$$\frac{O'M'}{O'P'} = \frac{a}{b} : \left(\frac{a}{b} + 1 \right) = \frac{a}{a+b}.$$

Если положимъ $OP = O'P' = 1$ и назовемъ дробь $\frac{a}{b}$ чрезъ k, то будемъ имѣть

$$OM = k \quad \text{и} \quad O'M' = \frac{k}{k+1}.$$

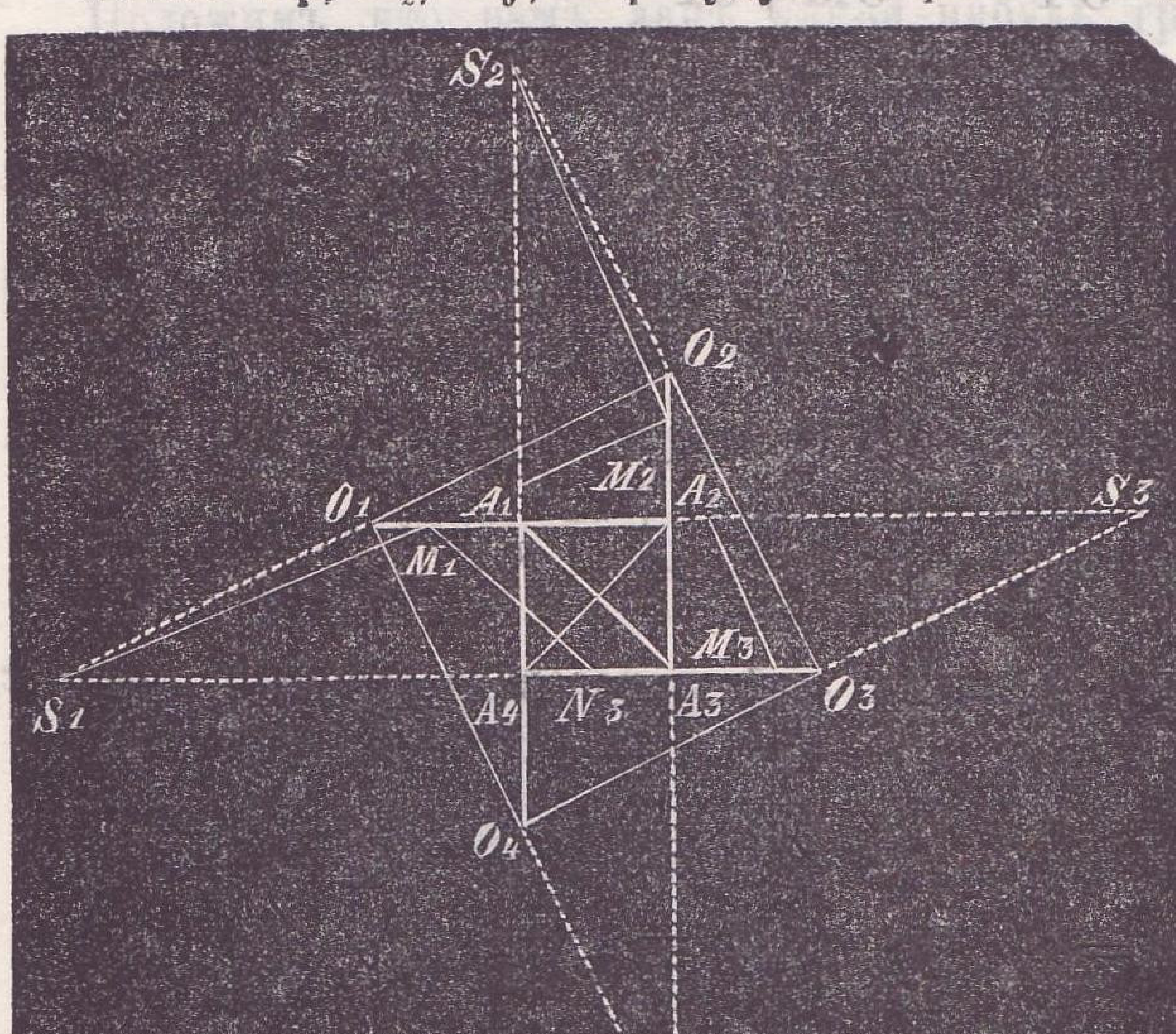
Найденнымъ соотношеніемъ между длинами OM и $O'M'$ можно воспользоваться для того, чтобы посредствомъ весьма простого и однообразнаго графическаго процесса построить какую угодно раціональную дробь, т. е. такую длину, которая относилась бы къ длинѣ, принятой за единицу, какъ два какія-нибудь цѣлыя числа m и n[1].

Съ этою цѣлью построимъ квадратъ $A_1A_2A_3A_4$, сторона котораго равняется $\frac{1}{2}$ (фиг. 2-я).

Продолжимъ стороны этого квадрата въ одномъ и томъ-же круговомъ направленіи до точекъ O_1, O_2, O_3, O_4 такъ, чтобы было

$$O_1A_1=O_2A_2=O_3A_3=O_4A_4=\frac{1}{2}.$$

Точки O_1, O_2, O_3, O_4 будутъ вершинами другого квадрата, котораго стороны пересѣкаются еще со сторонами перваго квадрата въ точкахъ S_1, S_2, S_3, S_4.



Фиг. 2-я.

Стороны квадратовъ $A_1A_2A_3A_4$ и $O_1O_2O_3O_4$ и ихъ точки пересѣченія послужатъ намъ основаніемъ или, такъ сказать, механизмомъ, при по-

[1] Числа m и n нужно, вообще говоря, предполагать очень большими, первыми между собою и притомъ $m < n$.

средствѣ котораго выполняется названный графическій процессъ. Самый же процессъ этотъ состоитъ въ повтореніи въ опредѣленномъ числѣ и опредѣленной послѣдовательности двухъ слѣдующихъ элементарныхъ графическихъ операцій.

1. *Проектированіе числа.* Возьмемъ произвольную точку M_1 на прямой O_1A_2 между точками O_1 и A_2. Разстояніе O_1M_1 будетъ имѣть нѣкоторую величину меньшую единицы. Если проведемъ изъ S_1 прямую, проектирующую точку M_1 на прямую O_2A_3, то получимъ на этой послѣдней точку M_1, которой разстояніе отъ O_2 будетъ имѣть также опредѣленную величину. Такое графическое опредѣленіе величины O_2M_2 по величинѣ O_1M_1 мы будемъ называть *проектированіемъ* послѣдней величины.

Такъ-какъ въ треугольникѣ $S_1O_2A_3$ сторона O_2A_3 равняется прямой O_1A_2, соединяющей средины двухъ сторонъ, и есть единица, то убѣждаемся изъ предыдущаго, что если O_1M_1 есть нѣкоторое число k, то O_2M_2 есть число $\dfrac{k}{k+1}$. Это значитъ, что *результатъ проектированія какого-нибудь числа есть отношеніе этого числа къ числу единицею большему.*

Величину O_2M_2 можно проектировать изъ точки S_2 на слѣдующую сторону квадрата $A_1A_2A_3A_4$ такъ-же точно какъ O_1M_1 проектировалась изъ точки S_1. Затѣмъ полученную величину можно проектировать изъ точки S_3 и т. д.

Если, имѣя первоначально величину k, мы произведемъ надъ нею проектированіе n разъ сряду, то въ результатѣ получится величина

$$\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{3k+1}\cdots\cdots\frac{(n-1)k+1}{nk+1}=\frac{k}{nk+1}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $k = O_1A_2 = 1$, въ результатѣ послѣдовательныхъ проектированій получаются дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.....

Когда k есть раціональная дробь $\frac{a}{b}$, то въ результатѣ n-кратнаго проектированія получается дробь $\frac{a}{na+b}$. Слѣдовательно, *результатъ n-кратнаго проектированія дроби есть дробь, у которой числитель равняется числителю данной дроби, а знаменатель болѣе знаменателя данной дроби на числителя, повтореннаго n разъ.*

2. *Перенесеніе числа.*— Проведемъ чрезъ точку M_1, опредѣляющую величину O_1M_1 меньшую единицы, прямую параллельную діагонали A_1A_3 квадрата $A_1A_2A_3A_4$. Точкой пересѣченія N_3 этой прямой съ противоположной стороной квадрата опредѣлится величина O_3N_3. Такое графическое опредѣленіе величины O_3N_3 по величинѣ O_1M_1 мы будемъ называть перенесеніемъ послѣдней на противоположную сторону квадрата или просто *перенесеніемъ* величины.

Такъ-какъ очевидно, что $O_1M_1 + O_3N_3 = O_1A_2 = 1$, то можно сказать, что *результатъ перенесенія какого-нибудь числа меньшаго единицы есть число дополнительное съ нимъ до единицы.*

Построеніе всякой раціональной дроби при помощи *проектированія* и *перенесенія* можетъ быть достигнуто слѣдующимъ образомъ.

Всякую раціональную дробь $\frac{m}{n}$ можно представить въ видѣ

$$\frac{1}{p+\frac{m'}{n'}}$$

гдѣ p, m' и n' суть цѣлыя числа. Допустивъ, что дробь $\frac{m'}{n'}$ уже построена и произведя надъ нею одинъ разъ проектированіе и одинъ разъ перенесеніе, получимъ дробь

$$1-\frac{m'}{m'+n'}=\frac{n'}{m'+n'}.$$

Произведемъ затѣмъ еще $(p-1)$ разъ проектированіе, получимъ

$$\frac{n'}{m'+n'+(p-1)n'}=\frac{n'}{m'+pn'}=\frac{1}{p+\frac{m'}{n'}},$$

т. е. данную дробь $\frac{m}{n}$.

Дробь $\frac{m'}{n'}$, въ свою очередь, можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{1}{q+\frac{m''}{n''}}$$

и, слѣдовательно, построена указаннымъ сейчасъ образомъ, когда построена дробь $\frac{m''}{n''}$.

Продолжая разсуждать такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что построеніе всякой непрерывной дроби

$$\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cdots+\cfrac{1}{v}}}$$

достигается при помощи ряда послѣдовательныхъ проектированій и перенесеній, какъ-скоро построена дробь $\frac{1}{v}$. Но мы уже видѣли, что эта дробь строится посредствомъ $(v-1)$ кратнаго проектированія единицы.

Возьмемъ частный примѣръ. Пусть требуется построить дробь $\frac{79}{337}$, которая разлагается въ слѣдующую непрерывную

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7.}}}}}$$

Произведя 7 разъ проектированіе единицы, получимъ $\frac{1}{8}$, послѣ чего перенесеніе дастъ

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Проектируя затѣмъ эту дробь два раза и перенеся полученный результатъ, найдемъ

$$1-\frac{7}{2.7+8}=1-\frac{7}{22}=\frac{15}{22}.$$

Проектируя эту дробь 5 разъ и перенеся результатъ, получимъ

$$1-\frac{15}{5.15+22}=1-\frac{15}{97}=\frac{82}{97}.$$

Проектируя эту дробь одинъ разъ и перенеся результатъ, получимъ

$$1-\frac{82}{82+97}=1-\frac{82}{179}=\frac{97}{179}.$$

Проектируя наконецъ эту послѣднюю дробь два раза, получимъ

$$\frac{97}{2.97+179}=\frac{97}{373}.$$

Изъ всего сказаннаго видимъ, что разсматриваемый графическій процессъ построенія дроби, однообразный во всѣхъ частныхъ случаяхъ, состоитъ въ сущности въ проведеніи приличнымъ образомъ одной непрерывной ломанной линіи, вершины угловъ которой находятся на сторонахъ квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и которая обвертывается, такъ сказать, около этого квадрата, подобно непрерывной нити, обвертывающей клубокъ.

Въ предложенномъ примѣрѣ эта ломанная состоитъ изъ 20 прямолинейныхъ частей.