II.

Линейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка, интегрируемыя посредствомъ множителя.

По поводу сообщенія г. *Грендоржа.*

В. Г. Имшенецкаго.

Данное г. Грендоржемъ полное рѣшеніе

$$y=\frac{ax+b}{\sin x}$$

линейнаго дифференціальнаго уравненія

$$y''+2\cot\!g\, x.\ y'-y=0$$

подало мнѣ мысль искать другіе случаи, интегрируемые точно такимъ-же образомъ. Но, занимаясь этой задачей, нетрудно замѣтить, что всѣ такіе случаи заключаются въ дифференціальномъ уравненіи общаго вида

$$\frac{d^2(Xy)}{dx^2}=0,$$

гдѣ y неизвѣстная, а X какая-нибудь данная функція отъ x.

Дѣйствительно, интегрируя дважды это уравненіе и означая черезъ a и b произвольныя постоянныя, найдемъ

$$y=\frac{ax+b}{X}.$$

Случай, разрѣшенный г. Грендоржемъ, соотвѣтствуетъ положенію

$$X=\sin x.$$

Другіе весьма сходные съ этимъ случаи получаются при послѣдовательныхъ положеніяхъ

$$X=\cos x,\quad X=sh\,x,\quad X=ch\,x,$$

гдѣ sh и ch означаютъ гиперболическіе синусъ и косинусъ.

Мнѣ кажется, заслуживаютъ вниманія тѣ частные случаи этого рода, гдѣ X будетъ amplitudo эллиптическихъ функцій, или одной изъ нихъ.

Для вывода этихъ случаевъ полагаемъ

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.}=F(\varphi)=x,\ \text{гдѣ}\ 0\leqq k\leqq 1,$$

и беремъ функціи

$$\varphi=am\,x,\ \lambda=\sin\varphi,\ \mu=\cos\varphi,\ \nu=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta\varphi.$$

Дифференцируя ихъ въ отношеніи x, получимъ:

$$\varphi'=\nu,\quad \lambda'=\mu\nu,\quad \mu'=-\nu\lambda,\quad \nu'=-k^2\lambda\mu;$$

$$\varphi''=-k^2\lambda\mu,\ \lambda''=-\lambda(\nu^2+k^2\mu^2),\ \mu''=\mu(k^2\lambda^2-\nu^2),\ \nu''=-k^2\nu(\mu^2-\lambda^2).$$

И такъ полагая:

1) $X=\varphi$; 2) $X=\lambda$; 3) $X=\mu$; 4) $X=\nu$;

мы получимъ слѣдующія линейныя дифференціальныя уравненія вмѣстѣ съ ихъ полными интегралами

$$(1)\left\{\begin{aligned}&am\,x.\frac{d^2y}{dx^2}+2\,\Delta\,am\,x\,\frac{dy}{dx}-k^2\sin am\,x\cos am\,x.\ y=0\\&\text{и}\qquad y=\frac{ax+b}{am\,x}\end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2}+2\,\frac{\cos am\,x\,\Delta\,am\,x}{\sin am\,x}\,\frac{dy}{dx}-(1+k^2\cos 2\,am\,x)\,y=0\\&\text{и}\qquad y=\frac{ax+b}{\sin am\,x}\end{aligned}\right.$$

$$
(3)\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{\sin am\,x\,\Delta\,am\,x}{\cos am\,x}\dfrac{dy}{dx}-(k'^2+k^2\cos 2am\,x)\,y=0,\\[2ex] \text{гдѣ } k'^2=1-k^2, \quad \text{и} \quad y=\dfrac{ax+b}{\cos am\,x};\end{cases}
$$

$$
(4)\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{\sin am\,x\cos am\,x}{\Delta\,am\,x}\dfrac{dy}{dx}-\cos 2am\,x\;y=0\\[2ex] \text{и} \quad y=\dfrac{ax+b}{\Delta\,am\,x}.\end{cases}
$$

Для $k=0$ изъ (2) получаются уравненія г. Грендоржа. Уравненіямъ (1)—(4) нетрудно дать еще другой видъ, введя въ нихъ независимымъ перемѣннымъ $am\,x$ вмѣсто x. Для этого имѣемъ

$$
am\,x=\varphi,
$$

$$
\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}\,\nu=\frac{dy}{d\varphi}\,\Delta\varphi,
$$

$$
\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\varphi^2}\,\nu^2-k^2\frac{dy}{d\varphi}\lambda\mu=-\frac{d^2y}{d\varphi^2}\,(\Delta\varphi)^2-k^2\frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi,
$$

Черезъ подстановку этихъ значеній напр. въ (1) получимъ

$$
(1')\begin{cases}\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}+[2(1-k^2\sin^2\varphi)-k^2\varphi\sin\varphi\cos\varphi]\,\dfrac{dy}{d\varphi}\\ -k^2\sin\varphi\cos\varphi\;y=0\\[2ex] \text{и} \quad y=\dfrac{aF(\varphi)+b}{\varphi}.\end{cases}
$$

Для $k=1$ уравненія (1′), даютъ

$$
(1'')\begin{cases}\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}+\left(\dfrac{2}{\varphi}-\operatorname{tg}\varphi\right)\dfrac{dy}{d\varphi}-\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}\,y=0\\[2ex] \text{и} \quad y=\dfrac{a\log\operatorname{tg}\left(\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)+b}{\varphi}\end{cases}
$$

Замѣтимъ еще, что уравненіе (1′) можно написать такимъ образомъ

$$\varphi \frac{d^2 y}{d\varphi^2} + 2\frac{dy}{d\varphi} = k^2 \varphi \operatorname{Sin}^2 \varphi \left[\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \left(\frac{2}{\varphi} + \operatorname{Cotg} \varphi \right) \frac{dy}{d\varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varphi} \operatorname{Cotg} \varphi . y \right].$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ частное рѣшеніе $y = \frac{1}{\varphi}$, которое очевидно обращаетъ также въ нуль и первую его часть; слѣд. то-же самое оно сдѣлаетъ и со второй его частью, т. е. уравненіе

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \left(\frac{2}{\varphi} + \operatorname{Cotg} \varphi \right) \frac{dy}{d\varphi} + \frac{1}{\varphi} \operatorname{Cotg} \varphi . y = 0$$

имѣетъ частное рѣшеніе $y = \frac{1}{\varphi}$. Другое частное рѣшеніе этого уравненія получится по извѣстной формулѣ, а затѣмъ и полный его интегралъ вида

$$y = \frac{a \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + b}{\varphi}.$$

Имѣя теперь нѣсколько линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ общимъ всѣмъ имъ частнымъ рѣшеніемъ $y = \frac{1}{\varphi}$ и складывая ихъ, по умноженіи на какія-нибудь функціи отъ φ, можно составлять другія болѣе или менѣе сложныя дифференціальныя уравненія съ тѣмъ-же частнымъ рѣшеніемъ, а слѣдовательно и находить ихъ полныя рѣшенія. Подобныя преобразованія и замѣчанія прилагаются также и къ уравненіямъ (2) (3) и (4).

И такъ, о всѣхъ приведенныхъ выше примѣрахъ и множествѣ еще другихъ можно сказать: 1) что они интегрируются посредствомъ множителя, приводясь къ виду

$$\frac{d^2(Xy)}{dx^2} = 0;$$

2. Данное уравненіе вида

(A) $$y'' + 2f(x).\,y' + F(x).\,y = 0$$

интегрируется такимъ образомъ, если выполнено условіе

$$F(x) = f'(x) + f(x)^2;$$

тогда интегрирующимъ множителемъ будетъ

$$X = e^{\int f(x)\,dx}.$$

Подобный случай интегрируемости посредствомъ множителя встрѣчается въ линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ всѣхъ порядковъ.

3. Если извѣстно отношеніе $\frac{y_1}{y_2} = \Phi(x)$ двухъ частныхъ рѣшеній y_1 и y_2 даннаго дифференціальнаго уравненія (A); то, полагая

$$\Phi(x) = z$$

и введя независимое перемѣнное z вмѣсто x, мы преобразуемъ уравненіе (A) въ слѣдующее

(B) $$\frac{d^2y}{dz^2} + 2f_1(z)\frac{dy}{dz} + F_1(z)y = 0,$$

а полный интегралъ

$$y = ay_1 + by_2$$

уравненія (A) обратится въ полный интегралъ уравненія (13) и приметъ видъ

$$y = \frac{a\Phi(x) + b}{\frac{1}{y_2}} = \frac{az + b}{Z}.$$

Отсюда, на основаніи предыдущаго, видно, что уравненіе (B) непосредственно интегрируется по умноженіи на

$$Z = \frac{1}{y_2} = e^{-\int f_1(z)\,dz}.$$

Другими словами, такимъ образомъ обнаружилось извѣстное свойство частныхъ рѣшеній уравненія (A): что по данному отношенію двухъ частныхъ рѣшеній уравненія (A) всегда можно вычислять каждое изъ нихъ.