III.

КАНОНИЧЕСКІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ

гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны,

въ случаѣ потенціальныхъ силъ.

В. Г. Имшенецкаго.

(Окончаніе).

§ III.

5. Обыкновенныя дифференціальныя уравненія свободной или несвободной брахистохроны.

Брахистохроной называется вообще, какъ извѣстно, кривая линія, въ свободномъ пространствѣ или на данной поверхности, представляющая путь, между двумя точками A и B, проходимый въ наименьшее время матеріальною точкой, находящеюся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ и принужденною оставаться на этомъ пути.

Отнесемъ положенія разсматриваемыхъ точекъ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ; означимъ, во время t, черезъ x, y, z координаты движущейся матеріальной точки, имѣющей массу $=1$, черезъ v ея скорость и черезъ $u=\Phi\,(x,\ y,\ z)$ потенціалъ приложенныхъ къ ней внѣшнихъ силъ.

Мы будемъ имѣть

$$v^2 = 2(u+h) \tag{1}$$

уравненіе живой силы, гдѣ h постоянное, и

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2}$$

гдѣ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{3}$$

есть безконечно малый элементъ искомой кривой.

Изъ (2)

$$dt = \frac{ds}{v},$$

а интегрируя это уравненіе и распространяя интегралъ вдоль траекторіи отъ A до B, получимъ

$$\tau = \int \frac{ds}{v}, \tag{4}$$

гдѣ τ означаетъ время движенія между этими двумя точками.

Варіируя (4), по опредѣленію брахистохроны имѣемъ

$$\delta\tau = \int\left(\frac{\delta ds}{v} - \frac{ds\delta v}{v^2}\right) = 0, \tag{5}$$

а варіируя (3) и (1), получимъ

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}d\delta x + \frac{dy}{ds}d\delta y + \frac{dz}{ds}d\delta z,$$

$$\delta v = \frac{1}{v}\left(\frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z\right).$$

Вставивъ эти выраженія δds и δv въ (5), приведемъ его къ виду

$$\int\frac{1}{v}\left(\frac{dx}{ds}d\delta x + \frac{dy}{ds}d\delta y + \frac{dz}{ds}d\delta z\right) = \int\frac{ds}{v^3}\left(\frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z\right).$$

Произведя въ первой части послѣдняго уравненія интегрированіе по частямъ, находимъ

$$\frac{1}{v}\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)-\int\left\{\frac{d.\frac{dx}{vds}}{ds}\delta x+\right.$$

$$\left.+\frac{d.\frac{dy}{vds}}{ds}\delta y+\frac{d.\frac{dz}{vds}}{ds}\delta z\right\}ds.$$

Здѣсь интегралъ и проинтегрированную часть нужно взять въ предѣлахъ отъ A до B. Если предположимъ обѣ эти точки неизмѣняющимися при варіированіи, то для нихъ $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$; слѣдовательно, проинтегрированная часть въ предыдущемъ выраженіи сама собою уничтожится, а вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе получитъ видъ

$$\int ds\left\{\left[\frac{d.\left(\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}\right)}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dx}\right]\delta x+\right.$$

$$+\left[\frac{d.\left(\frac{1}{v}\frac{dy}{ds}\right)}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dy}\right]\delta y+$$

$$\left.+\left[\frac{d.\left(\frac{1}{v}\frac{dz}{ds}\right)}{ds}+\frac{1}{v^3}\frac{du}{dz}\right]\delta z\right\}=0. \qquad (6)$$

Далѣе нужно различать два случая.

1) Пусть отыскивается брахистихрона въ свободномъ пространствѣ. Въ этомъ случаѣ, вслѣдствіе совершенной произвольности δx, δy, δz внутри границъ интеграла, уравненіе (6) приводится къ слѣдующимъ:

$$
(A)\quad \begin{cases}
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds} + \dfrac{1}{v^3}\dfrac{du}{dx} = 0 \\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds} + \dfrac{1}{v^3}\dfrac{du}{dy} = 0 \\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds} + \dfrac{1}{v^3}\dfrac{du}{dz} = 0.
\end{cases}
$$

2) Если же брахистохрона должна находиться на данной поверхности

$$f(x,\ y,\ z) = 0,$$

то между δx, δy, δz мы имѣемъ условное уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0,$$

вслѣдствіе чего изъ (6), по правиламъ варіаціоннаго вычисленія, получимъ

$$
(B)\quad \begin{cases}
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds} + \dfrac{1}{v^3}\dfrac{du}{dx} + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\[2ex]
\dfrac{d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds} + \dfrac{1}{v^3}\dfrac{du}{dy} + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\[2ex]
d.\left(\dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{ds}\right) + \dfrac{1}{v^3}\dfrac{du}{dz} + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0,
\end{cases}
$$

гдѣ λ неопредѣленный множитель.

—

6. Приведеніе къ каноническому виду уравненій (A).

Полагая

$$\frac{1}{v}\frac{dx}{ds}=x_1,\quad \frac{1}{v}\frac{dy}{ds}=y_1,\quad \frac{1}{v}\frac{dz}{ds}=z_1, \tag{7}$$

вслѣдствіе уравненія

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

находимъ

$$v=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Поэтому уравненія (7) получаютъ видъ

$$\frac{dx}{ds}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{\partial.\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\partial x_1},$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{\partial.\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\partial y_1}, \tag{8}$$

$$\frac{dz}{ds}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}=\frac{\partial.\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\partial z_1},$$

а уравненія (A), при помощи (7) и (1), напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{ds}=-\frac{1}{(2u+2h)^{3/2}}\frac{du}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2u+2h}}\right),$$

$$\frac{dy_1}{ds}=-\frac{1}{(2u+2h)^{3/2}}\frac{du}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2u+2h}}\right), \tag{9}$$

$$\frac{dz_1}{ds}=-\frac{1}{(2u+2h)^{3/2}}\frac{du}{dz}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{2u+2h}}\right).$$

Уравненія (8) и (9) образуютъ каноническую систему.

Дѣйствительно, положивъ

$$H=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}$$

можно написать (8) и (9) слѣдующимъ образомъ

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds}&=\frac{\partial H}{\partial x_1}, & \frac{dx_1}{ds}&=-\frac{\partial H}{\partial x},\\
\frac{dy}{ds}&=\frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{dy_1}{ds}&=-\frac{\partial H}{\partial y},\\
\frac{dz}{ds}&=\frac{\partial H}{\partial z_1}, & \frac{dz_1}{ds}&=-\frac{\partial H}{\partial z}.
\end{aligned}\qquad(10)$$

7. Замѣчанія объ интегрированіи уравненій (10).

Приравнявъ H произвольному постоянному C, имѣемъ

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}=C\qquad(11)$$

одинъ изъ интеграловъ каноническихъ уравненій (10).

Но вставивъ сюда значенія x_1, y_1, z_1 (7), получимъ уравненіе

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}=C,$$

первая часть котораго, очевидно, уничтожается въ силу (1); поэтому $C=0$. Слѣдовательно (1) и (11) представляютъ одинъ и тотъ-же интегралъ нашей задачи; въ немъ h не есть произвольное, но данное постоянное. Оно вполнѣ опредѣляется, напр., условіемъ, что матеріальная точка проходитъ положеніе $A(x_0, y_0, z_0)$ съ данною по величинѣ скоростью $v=v_0$; тогда

$$h=\frac{1}{2}v_0^2-\varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Уравненія (10) по исключеніи ds имѣютъ видъ

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = -\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial y_1}} = \frac{dy_1}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial H}{\partial z_1}} = -\frac{dz_1}{\frac{\partial H}{\partial z}} \qquad (12)$$

и всѣ пять интеграловъ ихъ можно получить, какъ извѣстно, отыскавъ полный интегралъ V уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2(u+h)},$$

легко составляемаго помощію уравненія (11). Этотъ полный интегралъ долженъ, кромѣ просто приданнаго, содержать еще два произвольныхъ постоянныхъ a и b.

Означивъ черезъ α и β еще два произвольныхъ постоянныхъ, всѣ интегралы уравненій (12) можно представить слѣдующими уравненіями

$$x_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y_1 = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z_1 = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \; \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

изъ которыхъ два послѣднія опредѣлятъ траекторію, имѣющую свойство брахистохроны. Введя условіе, что она проходитъ черезъ данную точку $A\,(x_0, y_0, z_0)$, должно для α и β взять значенія

$$\alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0, \quad \beta = \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0,$$

гдѣ указатель $(_0)$ требуетъ положить $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Слѣдовательно брахистохрону опредѣляютъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial a} - \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 = 0 \;\text{ и }\; \frac{\partial V}{\partial b} - \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0 = 0.$$

Можно слѣдующимъ образомъ повѣрить это рѣшеніе. Мы имѣемъ

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

$$= x_1\,dx + y_1\,dy + z_1\,dz$$

или, вставивъ значенія x_1, y_1, z_1 (7),

$$dV = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{vds} = \frac{ds}{v} = dt.$$

Интегрируя это уравненіе отъ $A\,(x_0,\,y_0,\,z_0)$ до $B\,(x,\,y,\,z)$, находимъ

$$\tau = V - V_0$$

время движенія между точками A и B. Уравненія же (13) выражаютъ условія, необходимыя для значенія minimum τ; слѣдовательно ими опредѣляется брахистохрона.

---

§ IV.

8. Приведеніе къ каноническому виду уравненій (B) несвободной брахистохроны.

Предварительно нужно сдѣлать, точно такъ-же, какъ выше (§ II п. 4), число неизвѣстныхъ возможно меньшимъ. Для этого пусть x, y, z будутъ выражены въ новыхъ перемѣнныхъ p и q такимъ образомъ, что обратятъ въ тождество уравненіе

$$f\,(x,\,y,\,z) = 0$$

поверхности, на которой должна находиться искомая брахистохрона.

Полагая для краткости

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z', \quad \frac{dp}{ds} = p', \quad \frac{dq}{ds} = q'$$

и складывая уравненія (B), соотвѣтственно умноженныя на $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$, находимъ

$$\frac{\partial x}{\partial p}\,\frac{d.\frac{x'}{v}}{ds}+\frac{\partial y}{\partial p}\,\frac{d.\frac{y'}{v}}{ds}+\frac{\partial z}{\partial p}\,\frac{d.\frac{z'}{v}}{ds}+\frac{1}{v^3}\,\frac{\partial u}{\partial p}=0,$$

или

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{v}\left(x'\frac{\partial x}{\partial p}+y'\frac{\partial y}{\partial p}+z'\frac{\partial z}{\partial p}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{v}\left(x'\,\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{ds}+y'\,\frac{d.\frac{\partial y}{\partial p}}{ds}+z'\,\frac{d.\frac{\partial z}{\partial p}}{ds}\right)+\frac{1}{v^3}\,\frac{\partial u}{\partial p}=0.$$

Замѣчая теперь (§ II, п. 4), что

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial x'}{\partial p'},\ \frac{\partial y}{\partial p}=\frac{\partial y'}{\partial p'},\ \frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial z'}{\partial p'},$$

и

$$\frac{d.\frac{\partial x}{\partial p}}{ds}=\frac{\partial x'}{\partial p},\ \frac{d.\frac{\partial y}{\partial p}}{ds}=\frac{\partial y'}{\partial p},\ \frac{d.\frac{\partial z}{\partial p}}{ds}=\frac{\partial z'}{\partial p}$$

и полагая для краткости

$$\frac{1}{2}\,(x'^2+y'^2+z'^2)=W,$$

можно предыдущее уравненіе написать въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{d.\left(\frac{1}{v}\,\frac{\partial W}{\partial p'}\right)}{ds}-\frac{1}{v}\,\frac{\partial W}{\partial q}+\frac{1}{v^3}\,\frac{\partial u}{\partial p}=0;$$

точно такимъ-же образомъ получимъ

$$\frac{d.\left(\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q'}\right)}{ds} - \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q} + \frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial q} = 0. \tag{14}$$

Эти два уравненія вмѣстѣ съ уравненіями

$$\frac{dp}{ds} = p', \quad \frac{dq}{ds} = q' \tag{15}$$

$$2W = 1 \tag{16}$$

опредѣляютъ брахистохрону въ криволинейныхъ координатахъ p и q на данной поверхности $f=0$.

9. Теперь остается только замѣнить послѣднія уравненія системой уравненій каноническаго вида.

Для этого вмѣсто p' и q' введемъ новыя перемѣнныя p_1 и q_1, полагая

$$\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial p'} = p_1, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial q'} = q_1. \tag{17}$$

Далѣе имѣемъ

$$2W = Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2 = \frac{\partial W}{\partial p'}p' + \frac{\partial W}{\partial q'}q'. \tag{18}$$

Слѣдовательно, сложивъ (17) по соотвѣтственномъ умноженіи ихъ на p' и q', будемъ имѣть

$$\frac{1}{v} = p_1 p' + q_1 q'. \tag{19}$$

Съ другой стороны, написавъ (17) слѣдующимъ образомъ

$$Ep' + Fq' = vp_1, \quad Fp' + Gq' = vq_1,$$

выводимъ изъ нихъ значенія

$$p' = \frac{v}{D}(Gp_1 - Fq_1) \quad \text{и} \quad q' = \frac{v}{D}(Eq_1 - Fp_1), \tag{20}$$

гдѣ

$$D = EG - F^2.$$

Посредствомъ этихъ значеній p' и q' изъ (19) находимъ

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{G}{D} p_1^{\,2} - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_1^{\,2}}. \qquad (21)$$

Послѣ чего легко замѣтить, что (15) получатъ видъ

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial}{\partial p_1} \sqrt{\frac{G}{D} p_1^{\,2} - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_1^{\,2}},$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{\partial}{\partial q_1} \sqrt{\frac{G}{D} p_1^{\,2} - 2\frac{F}{D} p_1 q_1 + \frac{E}{D} q_1^{\,2}}.$$

Далѣе, уравненія (14) на основаніи (17) будутъ

$$\frac{dp_1}{ds} = \frac{1}{v}\frac{\partial W}{dp} - \frac{1}{v^3}\frac{du}{dp},$$

$$\frac{dq_1}{ds} = \frac{1}{v}\frac{\partial W}{dq} - \frac{1}{v^3}\frac{du}{dq}.$$

Во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій значенія $\frac{\partial W}{dp}$ и $\frac{\partial W}{dq}$ должно вычислить изъ (18), подставить въ нихъ выраженія p' и q' посредствомъ p_1 и q_1 (20), причемъ результаты подстановокъ можно условно означить чрезъ $\left(\frac{\partial W}{dp}\right)$ и $\left(\frac{\partial W}{dq}\right)$. Такимъ образомъ

$$\frac{\partial W}{dp} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{dp} p'^2 + 2\frac{\partial F}{dp} p' q' + \frac{\partial G}{dp} q'^2\right];$$

$$\left(\frac{\partial W}{dp}\right) = \frac{v^2}{2D^2}\left\{\frac{\partial E}{dp}(Gp_1 - Fq_1)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial F}{dp}(Gp_1 - Fq_1)(Eq_1 - Fp_1) + \frac{\partial G}{dq}(Eq_1 - Fp_1)^2\right\}.$$

Съ другой стороны, дифференцируя частнымъ образомъ въ отношеніи p (21), получимъ

$$\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dp} = \frac{v}{2D^2}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial p}p_1^2 - 2\frac{\partial F}{\partial p}p_1 q_1 + \frac{\partial E}{\partial p}q_1^2\right)(EG - F^2)\right.$$

$$\left. - \left(G\frac{\partial E}{\partial p} + E\frac{\partial G}{\partial p} - 2F\frac{\partial F}{\partial p}\right)(Gp_1^2 - 2Fp_1 q_1 + Eq_1^2)\right\}$$

$$= -\frac{v}{2D^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial p}(Gp_1 - Fq_1)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p}(Gp_1 - Fq_1)(Eq_1 - Fp_1)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial p}(Eq_1 - Fp_1)^2\right\}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right) = -\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{G}{D}p_1^2 - 2\frac{F}{D}p_1 q_1 + \frac{E}{D}q_1^2}$$

и точно такъ-же можно доказать, что

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right) = -\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial q}.$$

Наконецъ остается еще замѣтить, что вслѣдствіе уравненія

$$v = \left\{2(u+h)\right\}^{1/2},$$

имѣемъ

$$-\frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left\{(2u+h)\right\}^{-1/2} \text{ и } -\frac{1}{v^3}\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left\{2(u+h)\right\}^{-1/2}.$$

Слѣдовательно, если положимъ для краткости

$$H=\sqrt{\left\{\frac{G}{D}p_1^{\,2}-2\frac{F}{D}p_1q_1+\frac{E}{D}q_1^{\,2}\right\}}-\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}},$$

то уравненія (14) и (15) приведутся къ канонической формѣ

$$\frac{dp}{ds}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dq}{ds}=\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{dp_1}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dq_1}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial q},$$

а уравненіе (16) обратится въ тождественное при подстановкѣ значеній p' и q' (20).

---

§ V.

10. Отношенія между потенціалами силъ, при которыхъ одна и та-же кривая представляетъ путь свободной точки, брахистохрону или фигуру равновѣсія нити.

Каноническая форма дифференціальныхъ уравненій, имѣющая мѣсто въ случаѣ потенціальныхъ силъ, какъ для двухъ выше разсмотрѣнныхъ задачъ, такъ и для задачи о движеніи матеріальной точки свободной или принужденной оставаться на данной поверхности,— позволятъ сдѣлать замѣчательныя сближенія между этими тремя различнаго рода вопросами.

Пусть каноническія уравненія

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_1},\quad \frac{dx_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1},\quad \frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},\qquad (1)$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial z_1},\quad \frac{dz_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z},$$

опредѣляютъ въ отношеніи прямоугольныхъ осей движеніе свободной матеріальной точки съ массой $=1$, при дѣйствіи на нея силъ съ потенціаломъ u.

Тогда, какъ извѣстно, весь вопросъ окончательно приводится къ отысканію полнаго интеграла A уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\nabla A = 2(u+h), \tag{2}$$

гдѣ для краткости положено

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 = \nabla A$$

и h означаетъ постоянное.

Функція A, выражающаяся посредствомъ x, y, z, h и двухъ произвольныхъ постоянныхъ a и b, представляетъ такъ называемое *дѣйствіе*, имѣющее мѣсто при переходѣ матеріальной точки изъ положенія (x_0, y_0, z_0) въ положеніе (x, y, z). Посредствомъ этой функціи траекторія получится изъ уравненія

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_0 \text{ и } \frac{\partial A}{\partial b} = \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)_0, \tag{3}$$

гдѣ знакъ (o) требуетъ положить $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ во вторыхъ частяхъ.

Уравненія (3) выражаютъ, очевидно, условія необходимыя для того, чтобы A имѣло наименьшее значеніе на дѣйствительной траекторіи между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z). Слѣдовательно и обратно, принимая за принципъ, что дѣйствіе A должно имѣть значеніе minimum для дѣйствительной траекторіи, мы получимъ ея уравненія (3), т. е. два изъ интеграловъ движенія. Это замѣчаніе легко обобщается и остается вѣрнымъ и при движеніи многихъ точекъ въ случаѣ существованія потенціала силъ [1].

Предположимъ теперь, что каноническія уравненія

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{dx_1}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \dots \qquad (1')$$

опредѣляютъ свободную брахистохрону для матеріальной точки съ массой $=1$, движущейся подъ дѣйствіемъ силъ, которыхъ потенціалъ u_1. Эта задача окончательно приводится (§ III, п. 7) къ отысканію полнаго интеграла τ уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\nabla \tau = \frac{1}{(2u_1+h_1)}, \qquad (2')$$

гдѣ h_1 постоянное и ∇ тотъ-же сокращающій символъ, какъ и выше. Функція τ, выражающаяся посредствомъ x, y, z, h и двухъ произвольныхъ постоянныхъ a и b, представляетъ время перехода матеріальной точки изъ положенія (x_0, y_0, z_0) въ положеніе (x, y, z) по траекторіи, опредѣляемой уравненіями

$$\frac{\partial \tau}{\partial a} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial a}\right)_0 \text{ и } \frac{\partial \tau}{\partial b} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial b}\right)_0. \qquad (3')$$

---

[1] Это замѣчаніе, мнѣ кажется, совершенно опровергаетъ установившійся взглядъ, что принципъ наименьшаго дѣйствія отличается отъ другихъ принциповъ тѣмъ, что не даетъ интеграловъ движенія. Этотъ ошибочный взглядъ опирается на весьма авторитетное мнѣніе *Якоби*, усвоенное и другими писателями. Въ его «динамикѣ» въ началѣ шестой лекціи, посвященной этому принципу, говорится: Wir kommen jetzt zu einem neuen Princip, welches nicht, wie die früheren, ein Integral giebt». *Schell* въ своей Theorie der Bewegung und der Kräfte повторятъ то-же самое: «Das... Princip der kleinsten Wirkung unterscheidet sich von den bisher aufgestellten Principen dadurch, dass es nicht ein Integral der Diff.-gleichungen der Bewegung liefert ....» (III Cap. § 17, S. 292).

Они выражаютъ необходимое условіе для того, чтобы τ было *minimum* для найденной траекторіи, т. е. чтобы послѣдняя была брахистохроной.

Возможенъ случай, когда въ обѣихъ только-что разсмотрѣнныхъ задачахъ получается одна и та-же траекторія, т. е. когда уравненіями (3′), опредѣляется та-же кривая какъ и уравненіями (3). Для этого достаточно, чтобы функція A, представляющая дѣйствіе въ первой задачѣ, выражалась точно такъ-же, какъ функція τ, выражающая время движенія во второй. А такъ-какъ A и τ суть соотвѣтственно полные интегралы уравненій (1) и (1′), то послѣднее условіе влечетъ за собой слѣдующее

$$2(u+h) = \frac{1}{2(u_1+h_1)}. \tag{4}$$

Отсюда по данному потенціалу u силъ, заставляющихъ свободную точку описывать нѣкоторую траекторію (C), получается потенціалъ u_1 силъ, при дѣйствіи которыхъ на ту-же точку, брахистохроной будетъ кривая (C). Называя v и v_1 соотвѣтственныя скорости этихъ двухъ движеній въ той-же точкѣ ихъ одинаковыхъ траекторій и замѣчая, что въ томъ и другомъ имѣетъ мѣсто начало живыхъ силъ, вмѣсто (4) получимъ

$$v = \frac{1}{v_1}$$

отношеніе, показывающее, что величины этихъ двухъ скоростей обратно пропорціональны. Слѣдовательно, если направленія ихъ постоянно одинаковыя или прямо противуположныя, то, очевидно, годографъ одного движенія получится изъ годографа другого помощію преобразованія посредствомъ обратныхъ радіусовъ-векторовъ.

Тэтъ выводитъ изъ этихъ отношеній теорему, которой для большей ясности можно дать слѣдующій видъ. Пусть при потенціалахъ силъ u и u_1 пути свободной точки массы $=1$ будутъ соотвѣтственно (C) и (C_1), а ея брахистохроны (B) и (B_1). Если свободный путь (C_1) одинаковъ съ брахистохроной B, между тѣми-же крайними точками; то и брахистохрона (B_1) должна быть одного вида съ свободнымъ путемъ (C) между общими крайними точками. Въ самомъ дѣлѣ, для совпаденія (C_1) съ (B), по доказанному выше, необходимо условіе

$$2(u_1+h_1)=\frac{1}{2(u+h)},$$

котораго очевидно достаточно и для совпаденія (B) съ (C_1).

Предыдущія отношенія между скоростями и потенціалами движеній свободнаго и брахистохроннаго по одному и тому-же пути находятся непосредственно изъ выраженія принципа наименьшаго дѣйствія

$$\delta\int vds=0, \tag{7}$$

имѣющаго мѣсто въ первомъ движеніи, и изъ условія

$$\delta\int\frac{ds}{v_1}=0, \tag{8}$$

вполнѣ опредѣляющаго второе движеніе.

Изъ этихъ двухъ уравненій тотчасъ-же видно, что, при условіи (5), влекущемъ за собой (4), на основаніи начала живой силы, траекторіи двухъ движеній должны быть одинаковыя и что дѣйствіе $A=\int vds$ въ 1-мъ и время $\tau=\int\frac{ds}{v_1}$ во 2-мъ при одинаковости границъ этихъ двухъ интеграловъ получатъ одинаковыя выраженія.

11. Теперь остается еще сдѣлать подобное же сближеніе вопроса о фигурѣ равновѣсія гибкой нити съ каждымъ изъ двухъ предыдущихъ. Для этого положимъ, что каноническія

уравненія (1') п. 10 опредѣляютъ фигуру равновѣсія гибкой, нерастяжимой нити, плотность которой $= 1$, при дѣйствіи на нее силъ, имѣющихъ потенціалъ U. Вопросъ этотъ окончательно приводится (§ I, п. 1 и 2) къ отысканію полнаго интеграла V уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\nabla V = (H - U),$$

гдѣ H постоянное. Функція V, выражающаяся посредствомъ x, y, z, H и двухъ произвольныхъ постоянныхъ a и b, представляетъ уровни для силъ T натяженія нити, опредѣленныхъ формулой

$$T = \sqrt{\Delta V} = H - U.$$

Кривая, соединяющая точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) и представляющая фигуру равновѣсія нити, получится изъ уравненій

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial b} = \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0,$$

выражающихъ условіе, необходимое для того, чтобы V имѣло наименьшее значеніе для этой кривой между разсматриваемыми точками.

Понятно, что найденная фигура равновѣсія можетъ быть одного вида съ траекторіей свободной точки въ 1-й задачѣ, или съ брахистохроной 2-й задачи. Для этого достаточно, чтобы имѣли мѣсто тождественныя равенства:

$$V = A \text{ въ первомъ случаѣ},$$

$$V = \tau \text{ во второмъ случаѣ}.$$

Эти условія влекутъ за собой соотвѣтственно слѣдующія

$$2(u+h)=(H-U)^2,$$

и

$$\frac{1}{2(u_1+h_1)}=(H-U)^2,$$

которыя равнозначущи соотвѣтственно

$$v=T,$$

и

$$\frac{1}{v_1}=T.$$

Эти выводы, истолкованіе значенія которыхъ очень просто, можно получить еще другимъ путемъ. На основаніи § 1 можно функціи V дать слѣдующія выраженія

$$V=\int(x_1dx+y_1dy+z_1dz)=\int T\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds}$$

$$=\int T ds=\int(H-U)ds.$$

Но, какъ доказано выше, V имѣетъ значеніе minimum для фигуры равновѣсія между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z); поэтому задача объ отысканіи этой кривой выражается однимъ изъ уравненій

$$\delta V=\delta\int \mathrm{T}\, ds=\delta\int(H-U)ds=0,$$

гдѣ неизмѣняемыя границы s_0 и s интеграла соотвѣтствуютъ точкамъ (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) и присоединяется условіе

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Дѣйствительно, при такой постановкѣ вопроса, при помощи варіаціоннаго вычисленія легко получаемъ уравненія (1) § I.

Теперь, принимая во вниманіе уравненія (7) и (8), служащія выраженіемъ 1 и 2 изъ выше разсмотрѣнныхъ задачъ, непосредственно заключаемъ, что фигура равновѣсія совпадетъ съ путемъ свободной точки, или съ брахистохроной, смотря по тому, будетъ ли

$$v = T,$$

или

$$\frac{1}{v_1} = T,$$

откуда получаемъ, какъ равнозначущія условія,

$$2(u+h) = (H-U)^2,$$

или

$$\frac{1}{2(u_1+h_1)} = (H-U)^2.$$

12. Для опредѣленности мы предполагали движущуюся точку, брахистохрону и уравновѣшенную нить въ свободномъ пространствѣ.

Но каноническая форма уравненій, служившая основаніемъ для послѣднихъ выводовъ, сохраняется и въ случаѣ движенія точки на данной поверхности, или когда на ней должны находиться брахистохрона и уравновѣшенная нить. Поэтому легко было бы убѣдиться изъ сравненія этихъ трехъ новыхъ задачъ, что и для нихъ останутся безъ измѣненія только-что полученные выводы.

Часть этихъ выводовъ, относящуюся до связи между вопросами о движеніи точки и о равновѣсіи нити на данной поверхности, Н. Е. Жуковскій недавно [1] доказалъ слѣдующимъ образомъ.

[1] «Математическій Сборникъ». Т. 9. Вып. 3-й, стр. 530.

Означимъ черезъ u потенціалъ силъ, дѣйствующихъ на точку массы $=1$, черезъ v ея скорость, черезъ ds элементъ траекторіи, черезъ ϱ радіусъ ея *геодезической* кривизны относительно данной поверхности $f=0$, и черезъ dn элементъ нормала по направленію ϱ.

Изъ обыкновенныхъ уравненій движенія точки на данной поверхности, складывая ихъ по умноженіи сначала на косинусы направленія v, потомъ — на косинусы направленія n, получимъ

$$v\frac{dv}{ds}=\frac{du}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{v^2}{\rho}=\frac{du}{dn}. \tag{1}$$

Точно такъ-же изъ уравненій равновѣсія (B) несвободной нити (§ II) найдемъ

$$\frac{dT}{ds}=-\frac{dU}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{T}{\rho}=-\frac{dU}{dn}, \tag{2}$$

отсюда, интегрируя и означая h и H произвольныя постоянныя, имѣемъ

$$v=\sqrt{2(u+h)} \quad \text{и} \quad T=H-U. \tag{3}$$

При помощи (3) уравненія (1) и (2) напишутся слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{ds}&=\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}\frac{du}{ds}=\frac{d.\sqrt{2(u+h)}}{ds}\\ \frac{v}{\rho}&=\frac{1}{\sqrt{2(u+h)}}\frac{du}{dn}=\frac{d.\sqrt{2(u+h)}}{dn}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}T.\frac{dT}{ds}&=-(H-U)\frac{dU}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d(H-U)^2}{ds}\\ \frac{T^2}{\rho}&=-(H-U)\frac{dU}{dn}=\frac{1}{2}\frac{d(H-U)^2}{dn}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если въ (4) положимъ $\sqrt{2(u+h)} = H - U$ и $v = T$, то получимъ (2). Если, на-оборотъ, въ (5) сдѣлаемъ $(H-U)^2 = 2(u+h)$ и $T=v$, то получимъ уравненія (1).

Чтобы имѣть право приложить эти выводы къ свободной точкѣ и нити нужно только предположить, что нормалъ n есть главный нормалъ траекторіи, т. е. направленъ къ центру ея кривизны.

Не желая еще болѣе увеличивать объема этой статьи, я долженъ отказаться отъ поясненія предыдущихъ общихъ выводовъ частными примѣрами, прекрасные образцы которыхъ можно найдти у *Клебша* и *Тэта*. По той-же причинѣ я не касаюсь вопроса о фигурѣ равновѣсія тонкой эластической нити, разобраннаго въ послѣднемъ § цитированнаго выше изслѣдованія Клебша.