III

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

1880 года.

II.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1881.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *В. Цѣхановецкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія:

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ, 8-го сентября 1880 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, М. С. Косенко, Г. В. Левицкій, Ю. И. Морозовъ, А. К. Погорѣлко, П. М. Рудневъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

По открытіи засѣданія секретаремъ былъ прочитанъ отчетъ о дѣятельности общества за истекшій 1879 — 80-й академическій годъ.

Обсуждались мѣры для усиленія занятій общества вопросами педагогическими, причемъ М. Ѳ. Ковальскій предложилъ представить въ одно изъ ближайшихъ засѣданій разборъ нѣкоторыхъ элементарныхъ учебниковъ по математикѣ.

Обсуждался вопросъ объ установленіи сношеній съ учеными обществами и отдѣльными учеными, причемъ постановлено:

1. Разослать два первыхъ выпуска «Сообщеній» общества ученымъ обществамъ, редакціямъ математическихъ журналовъ и отдѣльнымъ ученымъ по усмотрѣнію комитета.

2. Сдать нѣсколько экземпляровъ «Сообщеній» общества кому либо изъ книгопродавцевъ для продажи.

Въ концѣ засѣданія произведены были, посредствомъ закрытой подачи голосовъ, выборы въ распорядительный комитетъ, причемъ избраны слѣдующія лица: предсѣдателемъ общества — *В. Г. Имшенецкій;* товарищами предсѣдателя — *А. П. Шимковъ* и *К. А. Андреевъ;* секретаремъ — *Г. В. Левицкій.*

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

О ДѢЯТЕЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ, ЗА 1879—80 ГОДЪ.

Согласно параграфамъ 2 и 4 устава общества, лица, имѣющія право быть членами его безъ избранія, собрались въ предварительное засѣданіе 8-го сентября 1879 года. Въ этомъ засѣданіи былъ составленъ распорядительный комитетъ, которому и было поручено веденіе дѣлъ общества.

Въ слѣдующія два засѣданія составъ общества былъ пополненъ вновь избранными членами, а впослѣдствіи къ нему присоединился, въ качествѣ члена безъ избранія, поступившій вновь преподавателемъ харьковскаго университета Г. В. Левицкій, нынѣ доцентъ сего университета по каѳедрѣ астрономіи.

Въ настоящее время общество состоитъ изъ 23 членовъ, изъ которыхъ 10 безъ избранія и 13 избранные въ теченіе года.

Дѣятельность общества состояла главнымъ образомъ въ ученыхъ засѣданіяхъ, въ которыхъ излагались и выслушивались сообщенія. Въ теченіе минувшаго года, т. е. съ 8-го сентября по 7-е апрѣля, общество имѣло 10 такихъ засѣданій, изъ которыхъ одно предварительное, 8 очередныхъ и одно экстренное. Засѣданія эти составлялись по мѣрѣ накопленія дѣлъ и въ нихъ въ теченіе всего года было сдѣлано 22 сообщенія.

Кромѣ членовъ, общество засѣданія посѣщали и посторонния лица. Особенный интересъ къ дѣлу общества выказывали студенты физико-математическаго факультета, которые въ качествѣ слушателей слѣдили всегда съ большимъ вниманіемъ какъ за самыми сообщеніями, такъ и за возникавшими по поводу ихъ совѣщаніями и преніями между членами общества.

Предметами сообщеній были главнымъ образомъ вопросы по чистой и прикладной математикѣ и эти сообщенія дѣлались не только профессорами университета, по инициативѣ которыхъ возникло общество, но и членами, избранными впослѣдствіи, и даже лицами посторонними. Можно сказать, что этою стороной своей дѣятельности общество въ достаточной мѣрѣ удовлетворило въ этомъ году одной изъ своихъ цѣлей, предположенныхъ въ его уставѣ.

Что касается другой цѣли, занятій вопросами педагогическими, то объ ней нельзя сказать того-же самаго; но можно надѣяться, что въ будущее время дѣятельность общества получитъ надлежащее развитіе и въ этомъ направленіи. За осуществленіе такой надежды говоритъ то, что въ числѣ членовъ общества находится большинство гг. педагоговъ, состоящихъ преподавателями въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Харькова, изъ которыхъ нѣкоторые уже и въ этомъ году излагали обществу свои сообщенія.

Впрочемъ нужно замѣтить, что и въ истекшемъ году были уже сдѣланы попытки сообщеній по вопросамъ элементарнымъ и въ нѣкоторой степени педагогическимъ, частію основанныя на личной инициативѣ сообщавшаго, частію же заимствованныя изъ корреспонденціи.

Само собою понятно, что, въ короткій періодъ существованія общества, оно не могло установить болѣе или менѣе обширныхъ внѣшнихъ сношеній ни съ другими учеными обществами, ни съ отдѣльными лицами. Но изъ протоколовъ засѣданій общества можно видѣть, что начало такихъ сношеній уже положено. Такъ, общество физическихъ и естественныхъ наукъ въ Бордо (Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux) предложило нашему обществу чрезъ профессора В. Г. Имшенецкаго установить обмѣнъ изданій. Профессоръ J. Graindorge въ Люттихѣ прислалъ ученую замѣтку также В. Г. Имшенецкому, прося сообщить ее обществу. Кромѣ того къ обществу уже обращались письменно и нѣкоторые изъ нашихъ соотечественниковъ, интересующіеся математическими науками и ихъ успѣхами.

Если принять во вниманіе, что до сего времени наше общество не заявило еще о себѣ никакимъ печатнымъ изданіемъ и что, вслѣдствіе этого, самое существованіе его остается многимъ совершенно неизвѣстнымъ, то указаннымъ сейчасъ началомъ внѣшнихъ сношеній общество можетъ оставаться какъ нельзя болѣе довольнымъ.

Матеріальныхъ средствъ общество не имѣло до сихъ поръ никакихъ, такъ-какъ не получало въ теченіе года ни субсидій, ни пожертвованій, а обязательнаго членскаго взноса по уставу общества не существуетъ.

Согласно 9 параграфу устава, протоколы засѣданій общества печатались въ ученыхъ Запискахъ университета. Сообщенія, представленныя господами референтами въ рукописяхъ и неимѣвшія значительнаго объема, были также напечатаны вмѣстѣ съ протоколами, какъ составляющія, въ виду краткости послѣднихъ, ихъ естественное и необходимое дополненіе.

Отдѣльные оттиски напечатанныхъ такимъ образомъ трудовъ общества сброшюрованы по распоряженію комитета въ двѣ тетрадки и выпущены въ свѣтъ подъ названіемъ «Сообщеній и протоколовъ засѣданій математическаго общества». Первый выпускъ обнимаетъ дѣятельность общества во вторую половину 1879 года, а второй — въ первую половину 1880 года.

Такимъ образомъ, не смотря на отсутствіе матеріальныхъ средствъ, общество наше имѣетъ теперь возможность обмѣнивать свое изданіе на изданія другихъ обществъ, установить съ послѣдними болѣе правильныя сношенія и вообще обратить на свою дѣятельность вниманіе лицъ, читающихъ математическія сочиненія и интересующихся успѣхами у насъ этой отрасли знанія.

Такова была дѣятельность общества въ первый годъ его существованія. Положенное такимъ образомъ начало подаетъ, кажется, надежду на преуспѣяніе общества и въ будущіе годы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРІЯ

ЯВЛЕНІЙ ОТРАЖЕНІЯ И ПРЕЛОМЛЕНІЯ ПОЛЯРИЗОВАННАГО СВѢТА НА ГРАНИЦАХЪ ИЗОТРОПНЫХЪ СРЕДИНЪ.

А. П. Грузинцова.

I.

---

1. Свѣтовыя волны, распространяющіяся въ прозрачной изотропной срединѣ, сохраняютъ какъ свое направленіе, такъ и напряженность и фазу колебаній эфирныхъ частицъ на своихъ поверхностяхъ; но при переходѣ изъ одной средины въ другую онѣ измѣняютъ какъ направленіе, вдоль котораго перемѣщаются, такъ и напряженность съ фазой колебаній своихъ частицъ. Опредѣленіе законовъ обоихъ этихъ измѣненій въ формѣ по возможности простой, но совершенно точной и общей, и составитъ цѣль настоящей статьи. Эти законы извѣстны, но способы ихъ вывода недостаточны—одни по малой строгости основаній, на которыхъ покоятся эти выводы, другіе по трудности своей; вотъ почему я считаю полезнымъ рѣшить эту задачу снова.

Какъ сказано, законы отраженія и преломленія давно извѣстны; первые изъ нихъ, именно — законы, относящіеся до направленій свѣтовыхъ волнъ, извѣстны уже давно [1]; теоретически (на

---

[1] Законы отраженія были извѣстны еще древнимъ. См. Poggendorff's Geschichte der Physik, p. 23; а законъ преломленія найденъ Декартомъ въ 1637 г.; см. тамъ-же, стр. 311.

основании предположеній теоріи волнообразныхъ движеній) они были выведены въ первый разъ Гюйгенсомъ [1] въ 1690 году; что же касается до вторыхъ законовъ напряженностей и фазъ, то они найдены сравнительно очень недавно, именно—Фрэнелемъ [2], въ 1819 году, хотя ихъ старались опредѣлить еще Ламбертъ и потомъ (1817) Юнгъ. Законы, найденные Фрэнелемъ, были приближенные; болѣе же точнымъ знаніемъ ихъ физика обязана Коши (1830) [3].

Законы направленія отраженныхъ и преломленныхъ волнъ выходятъ непосредственно изъ основныхъ предположеній теоріи волнообразныхъ движеній, вотъ почему они были найдены теоретически тотчасъ-же, какъ только была предложена теорія колебательныхъ движеній, какъ теорія свѣтовыхъ явленій; нельзя того-же сказать о законахъ напряженностей и фазъ; —наблюденія напряженностей отраженныхъ и преломленныхъ лучей несравненно болѣе трудныя, чѣмъ наблюденія направленій, не давали возможности найти законы измѣненій напряженностей путемъ опыта, вслѣдствіе чего сказанные законы найдены были сначала путемъ теоретическихъ разсужденій, а уже за-тѣмъ произведена была опытная ихъ провѣрка.

Такимъ образомъ въ математической физикѣ законы отраженія и преломленія свѣта на границахъ изотропныхъ срединъ выводятъ обыкновенно (кромѣ Коши) отдѣльно одни (законы направленія) отъ другихъ (законы напряженностей и фазъ) и для различныхъ [4] срединъ различно, хотя самыя явленія существуютъ совмѣстно. Здѣсь же будетъ предложенъ простой способъ одновременнаго ихъ вывода изъ однихъ и тѣхъ-же началъ

[1] См. его Traité de la lumière.

[2] Oeuvres complètes de Fresnel. T. I. p. 767—799 (1823).

[3] См. напр. его Exércices de mathématiques et de physique — mathématique 1840 p. 212 et suivs. Еще: Comptes rendus de l'Acad. de Paris, vol. VIII, p p. 985—1000, vol. IX p. p. 60—68; 676—691; 727—730.

[4] Т. е. прозрачныхъ отдѣльно отъ непрозрачныхъ.

будутъ даны законы, общіе всѣмъ изотропнымъ срединамъ какъ прозрачнымъ, такъ и непрозрачнымъ. Но прежде, чѣмъ перейти къ этому выводу, полезно дать краткій очеркъ дальнѣйшей исторіи разбираемаго вопроса. Какъ сказано выше, Фрэнэль былъ первый, нашедшій теоретическимъ путемъ законы напряженностей отраженныхъ и преломленныхъ лучей на границахъ изотропныхъ прозрачныхъ срединъ. Но формулы Фрэнеля были основаны на нѣкоторыхъ ограниченіяхъ и допущеніяхъ, которыя, уменьшивъ общность его рѣшенія, не позволили ему прійти къ результатамъ, вполнѣ подтверждаемымъ опытомъ. Коши далъ первый формулы, вполнѣ отвѣчающія явленіямъ. Самъ онъ сначала не показалъ вывода своихъ рѣшеній, а далъ только основанія, руководствуясь которыми, можно прійти къ предложеннымъ имъ формуламъ [1], но нѣсколько времени спустя онъ сообщилъ [для прозрачныхъ срединъ] эти доказательства. Другія доказательства его формулъ даны Бэромъ [2], Эттингсгаузеномъ [3], Эйзенлоромъ [4], Лангомъ [5] и др.

Формулы, предложенныя Коши, даютъ законы отраженія не только на границахъ прозрачныхъ тѣлъ, но и на границахъ прозрачнаго съ непрозрачнымъ [6] (именно съ металломъ). Затѣмъ предложены были рѣшенія того-же вопроса Гриномъ [7] (1837), исходящимъ изъ другихъ основаній, чѣмъ Коши, Нейманомъ [8] (1835), основныя положенія теоріи котораго, сход-

[1] См. Comptes rendus de l'Acad. de Paris. T. IX, p. 9, а доказательства: p. 676 — 691, p. 727 — 730. Ср. также T. II. p. 341 — 349.

[2] Pogg. Annalen. Bd. XCI, S. 268.

[3] Wiener Sitzungsberichte 1855, XVIII. S. 369 — 391.

[4] Pogg. Annalen. Bd. CIV, S. 346.

[5] Theoretische Physik. S. 264.

[6] Comptes rendus. T. VIII. p. 553 — 561. Формулы стр. 559 и 560 не были доказаны Коши.

[7] Mathematical papers, p. 243.

[8] Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflection des Lichtes etc. § 3.

ныя въ нѣкоторыхъ пунктахъ съ положеніями теоріи Фрэнеля, въ другихъ отличаются отъ нихъ.

Наконецъ въ послѣднее время (1878) была предложена новая теорія тѣхъ-же явленій Кеттелеромъ[1], основанія которой хотя и вѣроятны, но не доказаны. Къ упомянутымъ авторамъ нужно прибавить еще Лундквиста[2] (1874), изложившаго сравнительно теоріи Грина и Коши, затѣмъ Макъ-Куллоха[3] (1834), выведшаго изъ формулъ Фрэнеля формулы, аналогичныя формуламъ Коши для металлическаго отраженія.

Кромѣ перечисленныхъ авторовъ о математической теоріи явленій отраженія и преломленія писали еще другіе. Я упомянулъ только главнѣйшихъ по моему мнѣнію[4].

Для удобнѣйшаго обозрѣнія основаній важнѣйшихъ перечисленныхъ теорій можно составить таблицу, въ которой

$$u, v, w,$$

составляющія колебанія вдоль координатныхъ осей, за кои приняты нормалъ къ разграничивающей средины плоскости (ось z-овъ), слѣдъ плоскости паденія на этой границѣ (ось x-овъ) и перпендикуляръ къ плоскости паденія (ось y-овъ); начало же координатъ въ точкѣ паденія луча; T — живая сила колебаній;

$$p_{xx},\ p_{yy},\ p_{xy}$$

давленія вдоль осей x и y на единицу площади, перпендикулярной соотвѣтственно осямъ x и y; указатель $(\ )_0$ показываетъ, что количества относятся къ нижней срединѣ, а указатель $(\ )_1$ — къ верхней. Am показываетъ равенство амплитудъ, но не колебаній. Эта таблица слѣдующая:

---

1 Wiedemann's Annalen. Bd. I. S. 206. Bd. III. S. 83.

2 Pogg. Annalen Bd. CLII. S. 177.

3 Journal de mathématiques. t. VII (1842), pp. 217—265. Оригинальнаго мемуара я немогъ достать.

4 Напр. Lorenz въ Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. XXII (1877). S. 1 und S. 205.

Фрэнель. $T_0 = T_1; Am(u)_0 = Am(u)_1; Am(v)_0 = Am(v)_1$; упругость обѣихъ срединъ одинакова, плотность различна, формулы не даютъ разности фазъ и относятся только къ прозрачнымъ срединамъ; колебанія поперечныя; составляющихъ w не разсматриваетъ.

Коши $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1$

$$(\Delta u)_0 = (\Delta u)_1, (\Delta v)_0 = (\Delta v)_1, (\Delta w)_0 = (\Delta w)_1$$ [1]

Упругость и плотность различны. Вводитъ продольныя колебанія. Даетъ разность фазъ. Разсматриваетъ и случай непрозрачныхъ (металлическихъ) срединъ.

Гринъ $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1$

$$(Pxx)_0 = (Pxx)_1, (Pyy)_0 = (Pyy)_1, (Pxy)_0 = (Pxy)_1.$$

Разсматриваетъ въ случаѣ $(u)_0 = (u)_1$ и $(w)_0 = (w)_1$ продольныя колебанія. Упругость принимаетъ одинаковою въ обѣихъ срединахъ. Полныхъ и окончательныхъ рѣшеній не даетъ, металлическихъ срединъ не разсматриваетъ.

Нейманнъ $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1 T_0 = T_1$.

Упругость принимаетъ различною, но плотность одинаковою; продольныхъ колебаній не разсматриваетъ; у него плоскость поляризаціи луча перпендикулярна къ общепринимаемой. Не даетъ измѣненія фазъ. Непрозрачныхъ срединъ не разсматриваетъ.

Кеттелеръ $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1, T_0 = T_1$.

Равенство деформацій эфира около оси z-овъ, равенство *скоростей* и *силъ перпендикулярныхъ къ плоскости раздѣла*. Продольныхъ колебаній не разсматриваетъ; даетъ разность фазъ; непрозрачныя средины разсмотрѣны. Его формулы сложны, хотя могутъ быть при-

---

[1] Δ означаетъ измѣненія, претерпѣваемыя количествами u, v, w, при переходѣ изъ одной средины въ другую.

ведены, какъ онъ показалъ, къ рѣшеніямъ Коши; принимаетъ въ расчетъ дѣйствія матеріальныхъ частицъ.

II.

2. Покажемъ теперь основанія новаго простого и общаго способа рѣшенія задачи, состоящей въ опредѣленіи законовъ отраженія и преломленія свѣта на границахъ изотропныхъ срединъ. Допуская непрерывность измѣненій упругихъ силъ при переходѣ изъ одной средины въ другую и называя

$$X, Y, Z,$$

составляющія по координатнымъ осямъ упругаго давленія на элементъ поверхности раздѣла срединъ со стороны первой средины (для ясности — нижней), а

$$X', Y', Z'$$

подобныя же составляющія давленія со стороны второй средины (верхней) на тотъ-же элементъ поверхности, на основаніи равенства давленій имѣемъ:

$$X = X'$$

$$Y = Y'$$

$$Z = Z';$$

но если назовемъ

$$A_1, B_1, C_1,$$

косинусы направленія нормала къ поверхности раздѣла срединъ, направленнаго въ верхнюю (вторую) средину, тогда предъидущія уравненія обратятся въ слѣдующія [1]:

---

[1] См. напр. *Clebsch*'a Theorie der Elasticität fester Körper. S. 35.

$$\left.\begin{array}{l}A_1(Pxx)_0+B_1(Pxy)_0+C_1(Pxz)_0=A_1(Pxx)_1+\\ \qquad\qquad+B_1(Pxy)_1+C_1(Pxz)_1\\ A_1(Pxy)_0+B_1(Pyy)_0+C_1(Pyz)_0=A(Pxy)_1+\\ \qquad\qquad+B_1(Pyy)_1+C_1(Pyz)_1\\ A_1(Pxz)_0+B_1(Pyz)_0+C_1(Pzz)_0=A_1(Pxz)_1+\\ \qquad\qquad+B_1(Pyz)_1+C_1(Pzz)_1\end{array}\right\}\text{(I)}$$

гдѣ

$$Pxx,\ Pxy,\ldots$$

суть составляющія вдоль прямоугольныхъ осей координатъ упругихъ силъ, дѣйствующихъ на единицу поверхности внутри средины $(x,\ y,\ z)$ соотвѣтственно перпендикулярной координатнымъ осямъ; указатель $(\ )_0$ относится къ нижней срединѣ, а $(\ )_1$ къ верхней.

Кромѣ уравненій (I) можно написать еще группу условныхъ уравненій. Называя

$$u',\ v',\ w'$$

составляющія скорости колебанія частицы вдоль координатныхъ осей, можно принять, что

$$\left.\begin{array}{l}(u')_0=(u')_1\\ (v')_0=(v')_1\\ (w')_0=(w')_1\end{array}\right\}\text{(II)}$$

эти равенства, существующія на границахъ обѣихъ срединъ, выражаютъ *непрерывность* измѣненій колебаній частицъ *во времени*, причемъ на равенства (I) можно смотрѣть, какъ на условія *непрерывности въ пространствѣ*.

Уравненія (I) и (II) и суть рѣшающія вопросъ.

Къ уравненіямъ (I) и (II) надо прибавить еще геометрическое условіе, выражающее тотъ фактъ, что точка, для которой справедливы предъидущія условія, лежитъ на поверхности раздѣла срединъ и есть такъ называемая точка паденія луча. Это условіе есть слѣдующее:

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0. \qquad \text{(III)}$$

Оно есть уравненіе плоскости раздѣла срединъ [1].

3. Такъ-какъ

$$Pxx,\ Pxy\ \ldots.$$

выражаются въ теоріи упругости посредствомъ составляющихъ колебанія частицы, то надо ввести эти послѣднія.

Пусть въ точку (x, y, z) поверхности раздѣла падаютъ въ верхней срединѣ плоскія волны, частицы эфира, въ коихъ колеблются перпендикулярно къ лучамъ; эти волны разовьютъ на границѣ двѣ системы волнъ: одну — отраженныхъ, другую преломленныхъ; причемъ, какъ въ той, такъ и въ другой, кромѣ лучей съ поперечными колебаніями, на границѣ срединъ могутъ существовать лучи съ продольными колебаніями [2]. — Необходимость введенія лучей съ продольными колебаніями обусловливается какъ общностью математическаго рѣшенія вопроса, такъ, кажется, и сущностью дѣла — именно въ продольныхъ колебаніяхъ заключается дѣйствіе поверхностнаго слоя.

Назовемъ составляющія колебанія въ падающемъ лучѣ

$$u,\ v,\ w,$$

въ отраженномъ съ поперечными колебаніями:

$$u',\ v',\ w',$$

---

[1] Ясно, что подобнымъ предположеніемъ рѣшеніе не теряетъ своей общности.

[2] Лучи съ продольными колебаніями введены Коши.

въ отраженномъ съ продольными колебаніями:

$$u'', v'', w'',$$

въ преломленномъ съ поперечными колебаніями:

$$u_1, v_1, w_1,$$

въ преломленномъ съ продольными колебаніями:

$$u_{11}, v_{11}, w_{11},$$

косинусы направленія колебаній соотвѣтственно чрезъ

$$A', B', C'; m', n', p'; m'', n'', p''; m'_{,}, n'_{,}, p'_{,} \text{ и } m_{,,}, n_{,,}, p_{,,};$$

а косинусы направленія самыхъ лучей

$$A, B, C; m, n, p; m'', n'', p''; m_{,}, n_{,}, p_{,}; m_{,,}, n_{,,}, p_{,,}.$$

Тогда всѣ u, v, w выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$u = A'. I. \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t - \delta)\,[1]; \quad v = B'. I. \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t - \delta);$$

$$w = C'. I. \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t - \delta);$$

$$u' = m'. I'. \sin\frac{2\pi}{\lambda'}(\omega' t - \delta'); \quad v' = n'. I'. \sin\frac{2\pi}{\lambda'}(\omega' t - \delta');$$

$$w' = p'. I'. \sin\frac{2\pi}{\lambda'}(\omega' t - \delta');$$

$$u_{,} = m'_{,}. I_{,}. \sin\frac{2\pi}{\lambda_{,}}(\omega_{,} t - \delta_{,}); \quad v_{,} = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$w_{,} = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$u'' = m''. I''. \sin\frac{2\pi}{\lambda''}(\Omega t - \delta''); \quad v'' = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$w'' = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

[1] Это суть частные интегралы тѣхъ дифференціальныхъ уравненій, которыя существуютъ для всѣхъ точекъ внутри срединъ.

$$u_{\prime\prime} = m_{\prime\prime}.I_{\prime\prime}.\sin\frac{2\pi}{\lambda_{\prime\prime}}(\Omega_{\prime}t - \delta_{\prime\prime});\ v_{\prime\prime} = \ldots\ldots\ldots;$$

$$w_{\prime\prime} = \ldots\ldots\ldots;$$

при чемъ буквами

$$I, I', \ldots, \lambda, \lambda', \ldots, \omega, \omega', \ldots$$

означены соотвѣтственно амплитуды всѣхъ колебаній, длины волнъ и скорости ихъ, а количества

$$\delta, \delta', \ldots\ldots$$

суть:

$$\delta = Ax + By + Cz$$

$$\delta' = mx + ny + pz$$

$$\delta'' = m''x + n''y + p''z$$

$$\delta_{\prime} = m_{\prime}x + ny + p_{\prime}z$$

$$\delta_{\prime\prime} = m_{\prime\prime}x + n_{\prime\prime}y + p_{\prime\prime}z,$$

т. е. разстоянія плоскихъ волнъ отъ начала координатъ, которое есть точка паденія.

4. Теперь замѣтимъ, что составляющія колебаній частицы на границѣ въ верхней срединѣ будутъ:

$$u + u' + u'',\quad v + v' + v'',\quad w + w' + w'',$$

а въ нижней:

$$u_{\prime} + u_{\prime\prime},\quad v_{\prime} + v_{\prime\prime},\quad w_{\prime} + w_{\prime\prime}.$$

Подставляя значенія $u, v, w, \ldots\ldots$ въ выраженія для упругихъ силъ[1] и предполагая, что упругость эфира на границѣ срединъ одна и та-же, изъ уравненій (I) и (II) § 2 находимъ равенства, которыя должны существовать для всѣхъ значеній

[1] См. напр. *Clebsch*'a Theorie der El. S. 48, причемъ одинъ коэффиціентъ принятъ здѣсь равнымъ 1-цѣ.

аргументовъ подъ знаками синусовъ и косинусовъ; поэтому, называя эти аргументы буквами Q, Q',..., должны имѣть:

$$Q = Q' = Q'' = Q_{,} = Q_{,,} \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Эти равенства должны существовать для всѣхъ значеній времени t, а потому, полагая въ нихъ

$$t = 0,$$

находимъ:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta'}{\lambda'} = \frac{\delta''}{\lambda''} = \frac{\delta_{,}}{\lambda_{,}} = \frac{\delta_{,,}}{\lambda_{,,}}. \qquad (1)$$

Сокращая теперь въ (а) равныя отношенія (1), имѣемъ:

$$\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\omega'}{\lambda'} = \frac{\Omega}{\lambda_{,}} = \frac{\omega'}{\lambda'} = \frac{\Omega_{,}}{\lambda_{,,}} \qquad (2)$$

Но ясно, что

$$\omega' = \omega$$

слѣдовательно и

$$\lambda' = \lambda,$$

а потому (2) можно написать въ видѣ:

$$\lambda_{,} = \omega_{,}\tau, \quad \lambda'' = \Omega\tau, \quad \lambda_{,,} = \Omega_{,}\tau, \; . \; . \; . \; . \; (2 \text{ bis})$$

гдѣ

$$\tau = \frac{\lambda}{\omega}.$$ [1]

Подставляя въ (1), имѣемъ

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{\delta'}{\omega} = \frac{\delta''}{\Omega} = \frac{\delta_{,}}{\omega_{,}} = \frac{\delta_{,,}}{\Omega_{,}}. \qquad (1 \text{ bis})$$

Если теперь, пользуясь уравненіемъ (III), исключимъ z изъ всѣхъ δ и подставимъ въ уравненіе (1 bis), то получимъ равенства вида

[1] τ есть время одного колебанія частицы эфира.

$$Mx+Ny=M'x+N'y$$

существующія при всѣхъ значеніяхъ x и y [вслѣдствіе уравненія (III)], а потому

$$M=M', \quad N=N'$$ [1]

составляя эти количества M, N.... получимъ четыре равенства, изъ которыхъ достаточно разсмотрѣть одно.

Разсмотримъ равенство

$$\frac{\delta}{\omega}=\frac{\delta_1}{\omega_1}.$$

Имѣемъ:

$$\omega(m_1C_1-A_1p_1)=\omega_1(AC_1-A_1C),$$

$$\omega(n_1C_1-B_1p_1)=\omega_1(BC_1-B_1C),$$

$$\omega(m_1B_1-n_1A_1)=\omega_1(AB_1-A_1B).$$

Такъ какъ множители при ω въ лѣвыхъ частяхъ пропорціональны косинусамъ направленія нормала къ плоскости преломленія[2], а множители при ω_1 въ правыхъ частяхъ — косинусамъ направленія нормала къ плоскости паденія, то заключаемъ: I) *нормалы къ преломленнымъ волнамъ лежатъ въ плоскости паденія,* или *плоскія преломленныя волны перпендикулярны къ плоскости паденія. Это есть въ общей формѣ первый законъ преломленія.*

Далѣе, складывая квадраты тѣхъ-же равенствъ, послѣ извѣстнаго преобразованія, находимъ:

$$\omega^2 \sin^2 r=\omega_1^2 . \sin^2 i$$

---

[1] Частныя рѣшенія $M=M'=N=N'=0$, ясно, заключаются въ написанномъ общемъ.

[2] Подъ плоскостью преломленія здѣсь подразумѣвается плоскость нормала къ границѣ средины и нормала къ плоской преломленной волнѣ.

или

$$(\mathrm{II})\quad \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\omega}{\omega_{1}}$$

это *второй законъ преломленія въ общей формѣ;* при этомъ i (уголъ паденія) и r (уголъ преломленія)[1] опредѣляются равенствами:

$$\cos r = A_{1}m_{1} + B_{1}n_{1} + C_{1}p_{1}$$

$$\cos i = A_{1}A + B_{1}B + C_{1}C.$$

Соотношенія подобныя (II) получаются и для остальныхъ волнъ, при чемъ для отраженныхъ волнъ съ поперечными колебаніями получили бы:

$$\sin i' = \sin i$$

$$\cos i' = -\cos i$$

т. е.

$$i' = \pi - i$$

законъ отраженія.

5. Подставляя теперь значенія u, u',.... въ первую формулу группы (I) и пользуясь равенствами для Q имѣемъ послѣ небольшого преобразованія

$$A.SA_{1}A' + A'.SAA_{1} + mH.SA_{1}m' + m'H.SA_{1}m +$$

$$\frac{2m''K}{\Omega}SA_{1}m'' + \frac{KE}{\Omega}A_{1} = \frac{m_{1}G}{\omega_{1}}SA'm_{1}' + \frac{m_{1}'G}{\omega_{1}}SA_{1}m_{1} +$$

$$\frac{2m_{11}L}{\Omega}SA_{1}m_{11} + \frac{LE}{\Omega_{1}}A_{1}$$

гдѣ значеніе S понятно, а H, K, L, G суть отношеніе амплитудъ къ амплитудѣ падающаго луча.

---

[1] Здѣсь уголъ преломленія есть уголъ между нормалами къ плоскости раздѣла и плоской преломленной волнѣ.

Если теперь положимъ

$$SAA' = \cos\psi,\quad SA_{,}m' = \cos\psi',\quad SA_{,}m_{,}' = \cos\psi_{,},$$

причемъ $\psi, \psi', \psi_{,}$ суть углы между нормаломъ къ поверхности раздѣла и направленіями колебаній въ падающемъ, отраженномъ и преломленномъ лучахъ (съ поперечными колебаніями), и замѣтимъ, что

$$SAA_{,} = \cos i,\ SA_{,}m = -\cos i,\ SA_{,}m' = \cos i_{,},\ SA_{,}m_{,} = \cos r,$$

$$SA_{,}m_{,,} = \cos r_{,},\ \cos\psi = \sin\phi.\sin i,\ \cos\psi' = \sin\phi'.\sin i,$$
$$\cos\psi_{,} = \sin\phi_{,}.\sin r$$ [1],

то получимъ:

$$A\sin\phi.\sin i + A'.\cos i + (m\sin\phi'.\sin i - m'\cos i).\,H +$$
$$\frac{2m''K}{\Omega}\cos i_{,} + \frac{KE}{\Omega}A_{,} = \frac{m_{,}\sin\phi_{,}\sin r + m_{,}'\cos r}{\omega_{,}}R + \frac{2m_{,,}L\cos r_{,}}{\Omega_{,}} +$$
$$\frac{LEA_{,}}{\Omega_{,}} \qquad (1)$$

Также:

$$B\sin\phi.\sin i + B'\cos i + (n\sin\phi'.\sin i - n'\cos i).\,H +$$
$$\frac{2n''K}{\Omega}\cos i_{,} + \frac{KE}{\Omega}B_{,} = \frac{n_{,}\sin\phi_{,}\sin r + n_{,}'\cos r}{\omega_{,}}G +$$
$$+\frac{2n_{,,}L\cos r_{,}}{\Omega_{,}} + \frac{LEB_{,}}{\Omega_{,}} \qquad (2)$$

$$C\sin\phi.\sin i + C'\cos i + (p.\sin\phi'.\sin i - p'\cos i).\,H +$$
$$+\frac{2p''K}{\Omega}\cos i_{,} + \frac{KE}{\Omega}C_{,} = \frac{p_{,}\sin\phi_{,}\sin r + p_{,}'\cos r}{\Omega_{,}}G +$$
$$\frac{2p''L\cos r_{,}}{\Omega_{,}} + \frac{LEC_{,}}{\Omega_{,}} \qquad (3)$$

---

[1] $\phi, \phi', \phi_{,}$ суть азимуты плоскостей поляризацій падающаго, отраженнаго и преломленнаго лучей.

Подставляя въ уравненія (II) значенія u, u'',... по приведеніи получимъ:

$$A' + m'H + m''K = m_{,}G + m_{,,}L \qquad (4)$$

$$B' + n'H + n''K = n_{,}G + n_{,,}L \qquad (5)$$

$$C' + p'H + p''K = p_{,}G + p_{,,}L \qquad (6)$$

Система уравненій (1) — (6) и есть упрощенная общая система[1].

Умножая теперь уравненія (1), (2), (3) по порядку на

$$A_{,},\ B_{,},\ C_{,},$$

потомъ на

$$A_{,,},\ B_{,,},\ C_{,,},$$

и складывая результаты, получимъ:

$$2\sin\phi.\sin i.\cos i - 2H\sin\phi'.\sin i\cos i + \frac{2K\cos^2 i_{,}}{\Omega} +$$

$$+\frac{KE}{\Omega} = \frac{2\sin\phi_{,}\sin r\cos r}{\Omega}G + \frac{2L\cos^2 r_{,}}{\Omega} + \frac{LE}{\Omega} \qquad (\alpha)$$

$$\cos\phi.\cos.i - H\cos\phi'\cos i = \frac{\cos\phi_{,}\cos r}{\Omega}G. \qquad (\beta)$$

Поступая также съ группой уравненій (4), (5), (6), находимъ:

$$\sin\phi.\sin i + H\sin\phi'.\sin i + K\cos i_{,} = G\sin\phi_{,}\sin r +$$

$$+ L\cos r_{,} \qquad (\gamma)$$

$$\cos\phi + H\cos\phi' = G\cos\phi_{,} \qquad (\delta)$$

Если умножимъ уравненія (1), (2) (3) на

$$A'',\ B'',\ C'',$$

[1] Авторъ нашелъ возможность приложить ее къ кристаллическимъ срединамъ.

гдѣ A'', B'', C'' суть косинусы направленія слѣда плоскости паденія на плоскости раздѣла и сложимъ, то получимъ:

$$\sin\phi(\sin^2 i - \cos^2 i) + H\sin\phi'(\sin^2 i - \cos^2 i) + \frac{2K\cos i_1 \sin i_1}{\Omega} =$$

$$= \frac{\sin^2 r - \cos^2 r}{\omega_1} G\sin\phi_1 + \frac{2L\sin r_1 \cos r_1}{\Omega_1}$$

причемъ пользовались равенствами:

$$SAA'' = \sin i,\ SA''m = \sin i,\ SA''m'' = \sin i_1,\ SA''m_1 = \sin r$$

$$SA''m_{11} = \sin r_1,\ SA_{11}A'' = o,\ SA_1A'' = o,\ SA'A'' = -\sin\phi.\cos i,$$

$$SA''m' = \sin\phi' \cos i,\ SA''m'_1 = -\sin\phi_1 \sin i \cos r.$$

При помощи уравненія (γ) предъидущее уравненіе превращается въ слѣдующее:

$$(\sin\phi + H\sin\phi')\frac{\cos^2 i}{\sin i} - K\cos i_1 = G\sin\phi_1 \frac{\cos^2 r}{\sin r} - L\cos r_1. \quad (\varepsilon)$$

Подобнымъ образомъ уравненія (4), (5), (6) даютъ:

$$(\sin\phi - H\sin\phi')\cos i - K\sin i_1 = G\sin\phi_1 \cos r - L\sin r_1. \quad (\lambda)$$

При помощи этого уравненія можно изъ уравненія (α) получить слѣдующее:

$$\frac{K}{\sin i_1} = \frac{L}{\sin r_1}. \quad (\mu)$$

При помощи же этого уравненія равенство (α) даетъ:

$$(\sin\phi - H\sin\phi')\cos i + K\frac{\cos^2 i}{\sin i} = G\sin\phi_1 \cos r + L\frac{\cos^2 r}{\sin r_1}[1]. \quad (\nu)$$

Такимъ образомъ имѣемъ систему шести уравненій съ шестью неизвѣстными:

---

[1] Ср. *Briot* въ Journal de Liouville. T, XII (1867), p. 191, гдѣ получена наша система уравненій на основаніи принципа Коши.

$$H,\ G,\ K,\ L,\ \phi',\ \phi_1.$$

Эти уравненія первой степени относительно H, G, K, L и относительно синусовъ и косинусовъ ϕ' и ϕ_1 слѣдовательно имѣемъ *одно рѣшеніе* предложеннаго вопроса[1].

Разсматривая эту систему, видимъ, что уравненія (δ) и (β), которыя даютъ, ясно, напряженности лучей отраженныхъ и преломленныхъ, поляризованныхъ въ первомъ азимутѣ, не заключаютъ K или L, т. е. лучей съ продольными колебаніями,— результатъ, который можно было предвидѣть à priori.

Далѣе, уравненія (γ), (ε), (λ) и (μ) даютъ напряженности лучей, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ, и они зависятъ отъ лучей съ продольными колебаніями, что тоже можно было предвидѣть à priori.

6. Рѣшимъ теперь систему уравненій (β) — (μ). Опредѣлимъ сначала амплитуды отраженныхъ и преломленныхъ лучей, поляризованныхъ въ первомъ азимутѣ, т. е. рѣшимъ сначала уравненія (δ) и (β) предъидущаго параграфа[2].

Примемъ въ нихъ за неизвѣстныя $H\cos\phi'$ и $G\cos\phi_{,}$.

Находимъ, введя вмѣсто $\omega_{,}$ его значеніе изъ уравненія (II) § 4.

$$H\cos\phi' = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}.\cos\phi, \tag{1}$$

$$G\cos\phi_{,} = \frac{2\sin r.\cos i}{\sin(i+r)}.\cos\phi, \tag{2}$$

Первое изъ этихъ уравненій показываетъ, пользуясь замѣчаніемъ § 5 о разности фазъ, что отраженный лучъ различается въ фазѣ отъ падающаго на π, т. е. можетъ теряться при отраженіи

[1] Въ этихъ уравненіяхъ измѣненія фазъ должно относить къ амплитудамъ.

[2] Замѣтимъ, что эти уравненія такого-же вида, какъ и у Френеля.

$$\pi : \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\lambda}{2}$$

половина волны — результатъ извѣстный Френелю.

Такимъ образомъ колебанія въ отраженномъ и преломленномъ лучахъ будутъ, называя ихъ h_1 и g_1 —

$$h_1 = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} . J\cos\phi . \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(t - x\sin i + z\cos i + \frac{\lambda}{2}\right) \quad (1')$$

$$g_1 = \frac{2\sin r.\cos i}{\sin(i+r)} . J\cos\phi . \sin\frac{2\pi}{\lambda_1}\left(\omega_{,} t - x\sin r - z\cos r\right) \quad (2')$$

Изслѣдованіемъ формулъ (1) и (2) заниматься не буду, ибо оно очень просто.

Зная амплитуды изъ (1) и (2), знаемъ и напряженности, ибо послѣднія пропорціональны квадратамъ первыхъ.

7. Опредѣлимъ теперь амплитуды колебаній въ лучахъ, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ; для чего рѣшимъ уравненія (γ), (ε), (λ) и (μ) § 5.

Положимъ для краткости письма:

$$H\sin\phi' = h\sin\phi; \qquad K = k\sin\phi;$$
$$G\sin\phi_{,} = g\sin\phi; \qquad L = l\sin\phi;$$

тогда сказанныя уравненія превратятся въ слѣдующія:

$$1 - h - \frac{\sin i_{,}}{\cos i}k = \frac{\cos r}{\cos i}g - \frac{\sin r_{,}}{\cos i}l \quad (1)$$

$$1 + h + \frac{\cos i_{,}}{\sin i}k = \frac{\sin r}{\sin i}g + \frac{\cos r_{,}}{\sin i}l \quad (2)$$

$$1 + h - \frac{\cos i_{,}\sin i}{\cos^2 i}h = \frac{\cos^2 r\sin i}{\sin r\cos i}g - \frac{\cos r_{,}\sin i}{\cos^2 i}l \quad (3)$$

$$\frac{k}{\sin i_{,}} = \frac{l}{\sin r_{,}} . \quad (4)$$

Складывая (3) и (1), по приведеніи находимъ:

$$-\sin(i+i_{,}).k + \sin(i+r_{,}).l = \frac{\cos r.\sin(i+r)}{\sin r}.g - 2\cos^2 i. \quad (m)$$

Складывая же (2) и (1), находимъ:

$$\sin(i-r)-h.\sin(i+r)+$$

$$+\cos(i+i_{,}).k-\cos(i+r_{,})\,l=\sin(i+r_{,}).g-2\sin i.\cos i. \quad \text{(n)}$$

Опредѣляя изъ уравненій (m) и (n) количества k и l, находимъ:

$$\sin(r_{,}-i_{,}).k=\frac{\sin(i+r)}{\sin r}\cos(i-r+r_{,})g-2\cos i.\cos r_{,}$$

$$\sin(r_{,}-i_{,})l=\frac{\sin(i+r)}{\sin r}\cos(i-r+i_{,})g-2\cos i.\cos i_{,}$$

отсюда вслѣдствіе равенства:

$$k.\sin r_{,}=l.\sin i_{,}$$

находимъ:

$$\frac{\sin(i+r)}{\sin r}g\left\{\sin r_{,}\cos(i-r+r_{,})-\sin i_{,}\cos(i-r+i_{,})\right\}=$$

$$2\cos i(\sin r\cos r_{,}-\sin i_{,}\cos i_{,}),$$

но

$$\sin r_{,}.\cos(i-r+r_{,})-\sin i_{,}.\cos(i-r+i_{,})=\cos(i-r_{,})-$$

$$(\sin r_{,}.\cos r_{,}-\sin i_{,}\cos i_{,})-\sin(i-r)(\sin^2 r_{,}-\sin^2 i_{,})=$$

$$\sin(i_{,}-r_{,})[\sin(i-r).\sin(i_{,}+r_{,})-\cos(i-r).\cos(i_{,}-r_{,})],$$

ибо

$$\sin r_{,}\cos r_{,}-\sin i_{,}\cos i_{,}=-\sin(i_{,}-r_{,}).\cos(i_{,}+r_{,}) \quad (\alpha)$$

$$\sin^2 r_{,}-\sin^2 i_{,}=-\sin(i_{,}-r_{,}).\sin(i_{,}+r_{,}); \quad (\beta)$$

слѣдовательно:

$$g=\frac{2\sin r.\cos i}{\sin(i+r)\sin(i-r)[\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})]}. \quad (\Gamma')$$

Для опредѣленія h проще поступать слѣдующимъ образомъ: исключимъ g изъ уравненій (1) и (2), потомъ изъ уравненій (1) и (3); тогда найдемъ слѣдующія два уравненія:

$$\sin(i-r)+h\sin(i+r)+k.\cos(r-i_{,})=l\cos(r-r_{,}) \quad \text{(p)}$$

$$\sin(i-r)-h.\sin(i+r)+\frac{\sin i}{\cos i}k.\sin(r-i_{\prime})=$$

$$=\frac{\sin i}{\cos i}l\sin(r-r_{\prime}). \qquad (q)$$

Исключая k изъ равенствъ (p) и (q), при помощи уравненія (4) находимъ, пользуясь соотношеніями (α) и (β):

$$\sin(i-r)+h\sin(i+r)=-\frac{\sin(i_{\prime}-r_{\prime}).\cos(i_{\prime}+r_{\prime}-r)}{\sin r_{\prime}}l, \qquad (\nu)$$

$$\sin(i-r)-h\sin(i+r)=\frac{\sin(i_{\prime}-r_{\prime})\sin(i_{\prime}+r_{\prime}-r).\sin i}{\sin r_{\prime}\cos i}l. \qquad (\varsigma)$$

Исключая дѣленіемъ количество l, находимъ:

$$\frac{\sin(i-r)+h\sin(i+r)}{\sin(i-r)-h\sin(i+r)}=-\frac{\cos i\cos(i_{\prime}+r_{\prime}-i)}{\sin i\sin(i_{\prime}+r_{\prime}-i)}.$$

Отсюда при помощи соотношеній (α) и (β) получимъ:

$$h.\sin(i+r).\sin(i-r).\cos(i_{\prime}+r_{\prime})\{\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})+\operatorname{ctg}(i-r)\}=$$

$$=-\cos(i_{\prime}+r_{\prime})\sin(i-r_{\prime}).\sin(i+r)\{\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})+\operatorname{ctg}(i+r)\}$$

и окончательно:

$$h=\frac{\operatorname{ctg}(i+r)+\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})}{\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})}. \qquad (II')$$

Возстановляя значенія h и g въ (I′) и (II′), имѣемъ:

$$H\sin\phi'=\frac{\operatorname{ctg}(i+r)+\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})}{\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})}\sin\phi \qquad (I)$$

$$G\sin\phi_{\prime}=\frac{2\sin r.\cos i.\sin\phi.}{\sin(i+r)\sin(i-r)[\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{\prime}+r_{\prime})]}. \qquad (II)$$

Количества K и L опредѣлять не будемъ, такъ-какъ они не нужны намъ въ разсматриваемомъ вопросѣ, хотя для ихъ опредѣленія все необходимое заключается въ предъидущихъ формулахъ.

Формулы (I) и (II) даютъ амплитуды отраженныхъ и преломленныхъ лучей, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ.

(7 bis) Изъ системы уравненій (1, 2, 3, 4) можно получать еще другую, очень удобную для опредѣленія h и g.

Подставимъ значеніе l изъ (4) въ (1), (2) и (3); по приведеніи получимъ:

$$(1-h)\cos i - \frac{kp.\sin(i_{,}-r_{,})}{\sin i_{,}} = g\cos r \tag{a}$$

$$(1+h)\sin i - \frac{kq.\sin(i_{,}-r_{,})}{\sin i_{,}} = g\sin r \tag{b}$$

$$(1+h)\frac{\cos^2 i}{\sin i} + \frac{kq\sin(i_{,}-r_{,})}{\sin i_{,}} = g\frac{\cos^2 r}{\sin r}, \tag{c}$$

гдѣ

$$p=\sin(i_{,}+r_{,}),\quad q=\cos(i_{,}+r_{,}).$$

Опредѣлимъ изъ (a):

$$\frac{k.\sin(i_{,}-r_{,})}{\sin i} = \frac{(1-h).\cos i}{p} - g\frac{\cos r}{p},$$

подставляемъ въ (b) и (c), полагая $\frac{p}{q}=\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})=\operatorname{tg}\gamma$,

находимъ:

$$\cos(i-\gamma)-h\cos(i+\gamma)=g.\cos(r-\gamma) \tag{d}$$

$$\Big[-\sin(i-\gamma)+h\sin(i+\gamma)\Big].\frac{\cos i}{\sin i} = -g.\sin(r-\gamma)\frac{\cos r}{\sin r}. \tag{e}$$

Умножая теперь (d) на $\frac{\cos i}{\sin i}$ и складывая съ (e), по сокращеніи на $\cos\gamma$, находимъ:

$$1+h=g\frac{\sin i}{\sin r}. \tag{f}$$

Такимъ образомъ имѣемъ два уравненія:

1) $\sin\phi + H\sin\phi' = G\sin\phi_{,}.\frac{\sin i}{\sin r}$

2) $\sin\phi.\cos(i-\gamma)-H\sin\phi'.\cos(i+\gamma)=G\sin\phi_{,}.\cos(r-\gamma)$ да еще два[1] уравненія § 5, изъ которыхъ только одно (2) заключаетъ количество γ.

Рѣшеніе уравненій (1) и (2) настоящаго § легко. Умножимъ (1) на $\cos(i+\gamma)$ и сложимъ со (2), найдемъ:

$$G\sin\phi_{,}=\frac{2\cos i\sin r\sin\phi\cos\gamma}{[\sin i.\cos(i+\gamma)+\sin r.\cos(r-\gamma)]}$$

или раздѣляя на $\cos\gamma$:

$$G\sin\phi_{,}=\frac{2\cos i.\sin r.\sin\phi}{\sin(i+r).\sin(i-r)[\operatorname{cotg}(i-r)-\operatorname{tg}\gamma]}.$$

Подставляя въ (1)

$$H.\sin\phi'=\frac{[\operatorname{cotg}(i+r)+\operatorname{tg}\gamma]\sin\phi}{\operatorname{cotg}(i+r)-\operatorname{tg}\gamma}.$$

8. Лучи съ продольными колебаніями, входящія въ формулы (I) и (II), можно при помощи нѣкоторыхъ предположеній исключить.

При помощи соотношеній § 4 имѣемъ:

$$\sin i_{,}=\Omega.\sin i,\qquad \cos i_{,}=-\sqrt{1-\Omega^2\sin^2 i},$$
$$\sin r_{,}=\Omega_{,}.\sin i,\qquad \cos r_{,}=\sqrt{1-\Omega_{,}^2\sin^2 i}.$$

Найдемъ далѣе:

$$\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})=C_{,}\sqrt{-1}, \tag{1}$$

гдѣ

$$C_{,}=\eta.\sin i\,*$$

$$\eta=\frac{\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega^2}}-\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega_{,}^2}}}{\sin^2 i+\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega^2}}\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega_{,}^3}}}$$

---

[1] Именно (β) и (δ).

* η есть коэффиціентъ эллиптичности Коши, названный такъ Жаменомъ.

Полагая Ω и $\Omega_{,}$ безконечно-большими[1], видимъ, что

$$\eta = 0.$$

Количеству η можно дать иной видъ. Именно, не дѣлая относительно Ω и $\Omega_{,}$ предъидущаго предположенія и зная, что

$$\Omega = \sqrt{\frac{E+2}{\rho}}\ ,\ \Omega_{,} = \sqrt{\frac{E+2}{\rho_{,}}},$$

гдѣ ϱ и $\varrho_{,}$ — плотности эфира въ обѣихъ срединахъ на границѣ, имѣемъ:

$$\eta = \frac{\sqrt{E+2}\left\{\sqrt{(E+2)\sin^2 i-\rho}-\sqrt{(E+2)\sin^2 i-\rho_{,}}\right\}}{\sin i\left\{\sqrt{E+2}+\sqrt{(E+2)\sin^2 i-\rho}\sqrt{(E+2)\sin^2 i-\rho'}\right.}\ . \qquad (6)$$

Если предположимъ, что плотности ϱ и $\varrho_{,}$ крайне мало отличны одна отъ другой[2], то количество η будетъ очень малое и имъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно пренебречь.

Можно сдѣлать другое предположеніе о лучахъ съ продольными колебаніями; допустимъ, что они поглощаются 2-ою средой, тогда, какъ это видно изъ формы колебаній:

$$\sin i_{,} = \alpha\sqrt{-1}\ ,\ \ \sin r_{,} = \beta\sqrt{-1}.$$

При помощи этихъ положеній

$$\operatorname{tg}(i_{,}-r_{,}) \text{ принимаетъ видъ } C\,.\sqrt{-1}\ ,$$

аналогичный формулѣ (1).

9. Подставляя значеніе $\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})$ конца предъидущаго параграфа въ формулы (I′) и (II′) § 7, имѣемъ:

$$h = \frac{\operatorname{ctg}(i+r)+C\sqrt{-1}}{\operatorname{ctg}(i-r)-C\sqrt{-1}} \qquad (1)$$

$$g = \frac{2\sin r\,.\,\cos i}{\sin(i+r)\,.\,\sin(i-r)[\operatorname{ctg}(i-r)-C\sqrt{-1}]} \qquad (2)$$

---

[1] Это предположеніе принадлежитъ Коши.

[2] Ясно, что это предположеніе весьма вѣроятно только для нѣкоторыхъ срединъ, но не для всѣхъ.

Для толкованія этихъ формулъ воспользуемся теоремой, доказанной еще Фрэнелемъ. Теорема эта состоитъ въ слѣдующемъ.

Если колебанія частицы выражаются формулой вида

$$F + F_{,}\sqrt{-1},$$

гдѣ F и $F_{,}$ суть дѣйствительныя количества, то это колебаніе можно разсматривать, какъ составленное изъ двухъ другихъ, перпендикулярныхъ одно другому; величина одного F, а другаго $F_{,}$, такъ что искомое колебаніе, какъ равнодѣйствующее, будетъ равно

$$\sqrt{F^2 + F_{,}^2}$$

и разность фазъ обоихъ колебаній, называя ее Δ, будетъ опредѣляться формулой:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{F_{,}}{F}.$$

Примѣняя эту теорему[1] къ выраженіямъ h и g, находимъ, что амплитуда отраженнаго луча будетъ, называя ее h':

$$h' = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2(i+r)+C^2}{\operatorname{ctg}^2(i-r)+C^2}} \quad (3), \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{C[\operatorname{ctg}(i+r)+\operatorname{ctg}(i+r)]}{\operatorname{ctg}(i+r)\operatorname{ctg}(i-r)-C^2}.$$

Но $\operatorname{tg}\Delta$ можно преобразовать. Дѣйствительно, написавъ его въ видѣ:

$$\operatorname{tg}\Delta = -\frac{\dfrac{\operatorname{ctg}(i-r)+\operatorname{ctg}(i+r)}{C}}{1-\dfrac{\operatorname{ctg}(i+r).\operatorname{ctg}(i+r)}{C^2}}$$

и положивъ, что всегда возможно:

---

1 Здѣсь амплитуда имѣетъ видъ: $\dfrac{A+B\sqrt{-1}}{A_{,}+B_{,}\sqrt{-1}}$, но это все равно, какъ не трудно убѣдиться: $\dfrac{AA_{,}+BB_{,}}{A_{,}^2+B_{,}^2}+\dfrac{BA_{,}-AB}{A_{,}^2+B_{,}^2}\sqrt{-1}=F+F_{,}\sqrt{-1}.$

$$-\frac{\operatorname{ctg}(i-r)}{C}=\operatorname{ctg}u,\ -\frac{\operatorname{ctg}(i+r)}{C}=\operatorname{ctg}v,$$

имѣемъ

$$\operatorname{tg}\Delta=\operatorname{tg}(u+v),$$

т. е.

$$\Delta=\pi+u+v \tag{4}$$

или

$$\Delta=u+v^{*}. \tag{4'}$$

Подобнымъ образомъ для преломленнаго луча имѣемъ

$$g'=\frac{2\sin r\,.\cos i}{\sin(i+r)\,.\sin(i-r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2(i-r)+C^2}} \tag{5}$$

и

$$\operatorname{tg}\Delta'=C\,.\operatorname{tg}(i-r). \tag{6}$$

Такимъ образомъ отраженный и преломленный лучи поляризованы эллиптически.

Полагая теперь количество C очень малымъ, что для нѣкоторыхъ срединъ справедливо изъ (3), (4), (5) и (6),

$$h'=\frac{\operatorname{ctg}(i+r)}{\operatorname{ctg}(i-r)}=\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}\,,\qquad \Delta=\pi$$

$$g'=\frac{2\sin r\,.\cos i}{\sin(i+r)\sin(i-r)}\,,\qquad \Delta'=0$$

Такимъ образомъ заключаемъ, что и *при отраженіи свѣта, поляризованнаго во второмъ азимутѣ, можетъ теряться половина волны* (см. § 6).

Возстановляя значеніе h' и g', имѣемъ слѣдовательно:

$$H\sin\phi'=\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}\,.\sin\phi \tag{I}$$

---

* При $\Delta=u+v$ не теряется половина волны.

$$G \sin \phi_{,} = \frac{2 \sin r \,.\, \cos i}{\sin(i+r) \sin(i-r)} \,.\, \sin \phi. \quad \text{(II)}$$

Эти формулы найдены Фрэнелемъ.

Формулы же для колебаній въ отраженномъ и преломленномъ лучахъ, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ будутъ:

$$h_2 = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} J \,.\, \sin \phi \,.\, \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(t - x \sin i + z \cos i + n\frac{\lambda}{2}\right)^* \quad \text{(I)}$$

$$g_2 = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \sin(i-r)} J \,.\, \sin \phi \,.\, \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(\omega, t - x \sin r - z \cos r\right) \quad \text{(II)}$$

10. Опредѣлимъ теперь азимуты плоскостей поляризаціи лучей, отраженныхъ и преломленныхъ.—Раздѣляя соотвѣтственно формулы (I) и (II) предъидущаго параграфа на формулы (1) и (2) § 6, имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)} \operatorname{tg} \phi \quad \text{(I)}$$

$$\operatorname{tg} \phi_{,} = \frac{1}{\cos(i-r)} \,.\, \operatorname{tg} \phi \quad \text{(II)}$$

Эти формулы были найдены Д. Брьюстеромъ въ 1815 году опытнымъ путемъ.

11. Формула (I) § 9 показываетъ, что если

$$\text{(a)} \quad . \; . \; . \; . \quad i + r = \frac{\pi}{2},$$

то свѣтъ, поляризованный во второмъ азимутѣ, не отражается, если углы паденія и преломленія удовлетворяютъ соотношенію (a). Изъ него и уравненія (II) § 6 находимъ:

$$\operatorname{tg} r = \frac{1}{\omega},$$

—законъ, найденный Брьюстеромъ.

---

* n равно 0 или 1-цѣ.

III.

12. Перейдемъ теперь къ срединамъ непрозрачнымъ, или поглощающимъ свѣтовыя колебанія.

Чтобы можно было примѣнить найденныя формулы къ срединамъ, поглощающимъ свѣтъ (непрозрачнымъ), стоитъ только выразить математически тотъ фактъ, что свѣтовыя колебанія въ такихъ срединахъ, проникая въ глубь среды, ослабляются, т. е. амплитуды колебаній уменьшаются болѣе или менѣе быстро; это погашеніе свѣта выражается, какъ показываютъ общія уравненія распространенія свѣтовыхъ колебаній, тѣмъ, что амплитуда колебаній не есть постоянная величина, а величина вида

$$ae^{-p\delta},$$

гдѣ a и p постоянныя, δ есть глубина, на которую проникаетъ свѣтъ, e — основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ и кромѣ того p — положительное количество.

Чтобы перейдти отъ формулы колебаній вида

$$A \sin(mt - q),$$

гдѣ A и m — постоянныя, q — линейная функція координатъ колеблющейся частицы эфира, къ виду:

$$ae^{-p\delta} . \sin\left(m't - q'\right) \qquad \text{(I)}$$

стоитъ только положить

$$q = \alpha\sqrt{-1} + \beta,$$

гдѣ α и β — линейныя функціи координатъ[1].

---

[1] При этомъ надо помнить, что если имѣемъ два частныхъ интеграла линейнаго уравненія, то и сумма ихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на нѣкоторыя постоянныя, будетъ интеграломъ уравненія.

Видъ колебаній (I) и есть тотъ, который поглощается срединой въ большей или меньшей степени.

13. Полагаемъ теперь въ формулахъ (1) и (2) § 6, согласно соображеніямъ, развитымъ въ предъидущихъ параграфахъ,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = k.\left(\cos\varepsilon + \sqrt{-1}\,.\sin\varepsilon\right)$$

$$\sin r = \frac{\sin i}{k}\left(\cos\varepsilon - \sqrt{-1}\,.\sin\varepsilon\right),$$

причемъ по § 4 k и ε — постоянны; также:

$$\cos r = \frac{U.(\sin u + \sqrt{-1}\,.\sin u)}{k(\cos\varepsilon + \sqrt{-1}\,.\sin\varepsilon)} = \frac{U}{k}\left[\cos(u-\varepsilon) + \sqrt{-1}\,.\sin(u-\varepsilon)\right]$$

и U, u суть количества перемѣнныя; причемъ вслѣдствіе равенства

$$\sin^2 r + \cos^2 r = 1,$$

имѣемъ соотношенія

$$\left.\begin{aligned} U^2\cos 2u &= k^2\cos 2\varepsilon - \sin^2 i \\ U^2\sin 2u &= k^2\sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Находимъ сначала для отраженныхъ лучей:

$$h' = \frac{\cos i - U\cos u - U\sin u\sqrt{-1}}{\cos i + U\cos u + U\sin u\sqrt{-1}}.$$

Толкуя эту формулу по способу § 9, имѣемъ для квадрата амплитуды отраженнаго луча (называя эту амплитуду $h_{,}$)

$$h_{,}^2 = \frac{U^2 + \cos^2 i - 2U\cos u.\cos i}{U^2 + \cos^2 i + 2U\cos u.\cos i}.$$

Полагая здѣсь

$$\frac{2U\cos u\,.\cos i}{U^2 + \cos^2 i} = \operatorname{ctg}\psi, \qquad (a)$$

имѣемъ

$$h_{,}^{2} = \operatorname{tg}\left(\psi_{,} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(I)}$$

и для разности фазъ, называя эту послѣднюю буквою $\Delta_{,}$ имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_{,} = \frac{2U\sin u \,.\, \cos i}{U^2 - \cos^2 i} \,. \qquad \text{(b)}$$

Но если положимъ:

$$\frac{\cos i}{U} = \operatorname{tg}\omega_{,} \qquad \text{(c)}$$

то равенства (a) и (b) превращаются въ слѣдующія:

$$\operatorname{ctg}\psi_{,} = \cos u \,.\, \sin 2\omega_{,} \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{tg}\Delta' = \sin u \,.\, \operatorname{tg} 2\omega_{,} \qquad \text{(III)}$$

формулы (I), (II) и (III) даны Коши для металловъ. Такимъ образомъ лучъ, отраженный въ первомъ азимутѣ, есть лучъ эллиптически-поляризованный (въ частныхъ случаяхъ онъ можетъ обращаться въ поляризованный по кругу или по прямой).

14. Лучи, отраженные во второмъ азимутѣ, даютъ:

$$h'' = \frac{(\sin i \cos i - \sin r \,.\, \cos r) + C(\cos^2 r - \cos^2 i)\sqrt{-1}}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r) - C(\cos^2 r - \cos^2 i)\sqrt{-1}}$$

по § 9, форм. 1.

Подставляя сюда значенія $\sin r$ и $\cos r$ изъ предъидущаго параграфа и полагая

$$\left.\begin{aligned} k^2 . \sin i . \cos i + Ck^2 \sin^2 i &= E^2 . \cos i \\ U\sin i . \cos(2\varepsilon - u) + C\sin^2 i . \cos 2\varepsilon &= R\cos(2\varepsilon - P) \\ U\sin i . \sin(2\varepsilon - u) + C\sin^2 i . \sin 2\varepsilon &= R\sin(2\varepsilon - P) \end{aligned}\right\} \text{(m)}$$

находимъ:

$$h'' = \frac{E^2\cos^2 i - R\cos(2\varepsilon - P.) + \sqrt{-1}.\, R\sin(2\varepsilon - P.)}{E^2\cos i + R\cos(2\varepsilon - P.) - \sqrt{-1}.\, R\sin(2\varepsilon - P.)}$$

Отсюда при помощи соображеній § 9 имѣемъ для опредѣленія амплитуды колебаній въ лучахъ, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ, равенство

$$h^2{}_2 = \frac{E^4\cos^2 i + R^2 - 2E^2 R\cos i.\cos(2\varepsilon - P)}{E^4\cos^2 i + R^2 + 2E^2 R\cos i.\cos(2\varepsilon - P)};$$

но полагая:

$$\frac{2E^2 R\cos i.\cos(2\varepsilon - P)}{E^4\cos^4 i + R^2} = \operatorname{ctg}\psi_2 \qquad \text{(a)}$$

имѣемъ по преобразованіи:

$$h^2{}_2 = \operatorname{tg}\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(I)}$$

Для разности фазъ, называя эту послѣднюю Δ_2, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \frac{2RE^2\cos i\sin(2\varepsilon - P)}{E^4\cos^4 i - R^2}.$$

Если положимъ:

$$\frac{R}{E^2\cos i} = \operatorname{tg}\omega_2 \qquad \text{(c)}$$

тогда формулы (a) и (b) обратятся въ слѣдующія:

$$\operatorname{ctg}\psi_2 = \cos(2\varepsilon - P).\sin 2\omega_2 \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \sin(2\varepsilon - P)\operatorname{tg} 2\omega_2 \qquad \text{(III)}$$

Формулы (I), (II) и (III) имѣютъ такой-же видъ, какъ и формулы Коши, но—болѣе общія, чѣмъ у него; онѣ обращаются тождественно въ формулы Коши, если положимъ, что весьма возможно въ нѣкоторыхъ случаяхъ,

$$C = 0 \qquad \text{(n)}$$

тогда формулы (m) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= k^2\sin i \\ R^2 &= U^2\sin^2 i, \qquad P = u \end{aligned}\right\} \quad \text{(p)}$$

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{U}{k^2\cos i}. \qquad \text{(c bis)}$$

Формула (I) сохранитъ тотъ-же видъ, только въ ней будетъ:

$$\operatorname{ctg}\psi_2 = \cos(2\varepsilon - u) . \sin 2\omega_2 \qquad \text{(II bis)}$$

Для $\operatorname{tg}\Delta_2$ будемъ имѣть формулу:

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \sin(2\varepsilon - u) . \operatorname{tg} 2\omega_2 \qquad \text{(III bis)}$$

Эти формулы уже суть формулы Коши[1]; онѣ были подвергнуты опытной повѣркѣ[2]; формулы же (I), (II) и (III) получены здѣсь, кажется, первый разъ.

Такимъ образомъ и здѣсь лучъ является поляризованнымъ эллиптически (въ частныхъ же случаяхъ по кругу или по прямой).

15. Прежде, чѣмъ перейдти къ преломленнымъ лучамъ, опредѣлимъ азимутъ плоскости поляризаціи отраженныхъ лучей и разность ихъ фазъ и примѣнимъ полученныя формулы къ одному важному частному случаю, представляющему возможность опредѣлить путемъ опыта постоянныя количества, входящія въ предидущія формулы.

Назовемъ азимутъ плоскости поляризаціи Φ, тогда

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{h_2}{h_1}$$

или

$$\operatorname{tg}^2\Phi = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Подставляя сюда значенія h^2_2 и h^2_1 изъ двухъ предъидущихъ §§, находимъ:

$$\operatorname{tg}^2\Phi = \frac{\operatorname{tg}\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

---

[1] C. R. T. VIII, p.p. 559—561.

[2] Для металловъ. См. Ann. de Ch. et Ph. 3 série, t. 19. pp. 295—342.

Для удобнаго приложенія къ частнымъ случаямъ этой формулы, ее полезно преобразовать. Опредѣлимъ $\cos 2\Phi$. Имѣемъ сначала

$$\cos 2\Phi = 2\cos^2\Phi - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\Phi} - 1$$

или

$$\cos 2\Phi = \frac{\operatorname{ctg}\psi_1 - \operatorname{ctg}\psi_2}{\operatorname{ctg}\psi_1 . \operatorname{ctg}\psi_2 - 1}.$$

Подставляя сюда значенія $\operatorname{ctg}\psi_1$ и $\operatorname{ctg}\psi_2$ изъ формулъ (a) § 13 и (a) § 14 при предположеніяхъ (p), находимъ

$$\cos 2\Phi = \frac{2U\cos i.\cos u(U^2+k^4\cos^2 i) - 2U\cos i.\cos u(U^2+\cos^2 i)}{4U^2\cos^2 i.\cos^2 u(U^2+\sin^2 i) - (U^2+\cos^2 i)(U^2+k^4\cos^2 i)}$$

Развертывая въ числителѣ скобки, вынося $2\,U\cos i.\cos u$ общимъ множителемъ, а въ выраженіе, остающееся въ скобкахъ, подставляя вмѣсто U^4 его значеніе, изъ равенства (I) § 13 находимъ для числителя $\cos 2\Phi$ слѣдующее выраженіе:

$$-2U\cos u.\cos i.\sin^2 i\,(k^4 - 2k^2.\cos^2\varepsilon + 1).$$

Знаменатель получится подобнымъ же образомъ (внося значеніе U^4 и $U^2\cos 2u$), именно онъ будетъ:

$$-(\sin^4 i + U^2\cos^2 i)(k^4 - 2k^2\cos^2\varepsilon + 1);$$

слѣдовательно:

$$\cos 2\Phi = \frac{2U\cos i.\sin^2 i.\cos u.}{U^2\cos^2 i + \sin^4 i}.$$

Но полагая здѣсь

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin^2 i}{U\cos i} \qquad \text{(I)}$$

выраженіе для $\cos 2\Phi$ значительно упрощается и превращается въ слѣдующее:

$$\cos 2\Phi = \cos u \sin 2\omega \qquad \text{(II)}$$

Опредѣлимъ теперь разность фазъ лучей h_1 и h_2. Назовемъ эту разность Δ, тогда

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$$

и такъ-какъ Δ_1 и Δ_2 даются посредствомъ тангенсовъ ихъ, то опредѣлимъ $\operatorname{tg}\Delta$. Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\operatorname{tg}\Delta_1 - \operatorname{tg}\Delta_2}{1 + \operatorname{tg}\Delta_1 . \operatorname{tg}\Delta_2}$$

или, подставляя сюда значенія $\operatorname{tg}\Delta_1$ и $\operatorname{tg}\Delta_2$ изъ (b) §§ 13 и 14 въ предположеніи (p) § 14, получаемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2U\cos i . \sin u . [(U^2 - \cos^2 i).(U^2 - \sin^2 i) - (k^4\cos^2 i - U^2)]}{(U^2 - \cos^2 i)(k^4\cos^2 i - U^2) + 4U^2\sin^2 u . \cos^2 i\,(U^2 - \sin^2 i)}.$$

Развертывая скобки и поступая такъ-же, какъ и при вычисленіи $\cos 2\Phi$, находимъ

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sin^2 i\,(k^4 - 2k^2\cos 2\varepsilon + 1)}{U^2\cos^2 i\,(1 - \operatorname{tg}^2\omega)\,(k^4 - 2k^2\cos 2\varepsilon + 1)}\,^*,$$

или окончательно:

$$\operatorname{tg}\Delta = \sin u . \operatorname{tg} 2\omega. \qquad \text{(III)}$$

16. Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующее. Колебанія въ отраженномъ лучѣ состоятъ изъ двухъ; первое есть:

$$u = h\cos\Phi . \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \Delta_1\right),$$

второе:

$$w = h . \sin\Phi . \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \Delta_2\right).$$

Исключая отсюда t, получимъ уравненіе траекторіи частицы эфира въ слѣдующемъ видѣ:

---

* Трехчленъ можетъ уничтожиться только при k^2 мнимомъ, что не соотвѣтствуетъ дѣйствительности.

$$\frac{u^2}{h^2 \cos^2 \Phi} + \frac{w^2}{h^2 \sin^2 \Phi} - \frac{2uw}{h^2 \sin \Phi . \cos \Phi} \cos \Delta = \sin^2 \Delta$$

Это есть уравненіе эллипсиса, отнесеннаго къ центру; оно будетъ отнесено къ осямъ, если

$$\Delta = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Этотъ случай играетъ большую роль на практикѣ, а потому разсмотримъ его [1].

Если $\Delta = \frac{\pi}{2}$, тогда, называя уголъ паденія луча i_0 и другія перемѣнныя количества обозначая указателемъ ($_0$), имѣемъ:

$$\sin u_0 . \operatorname{tg} 2\omega_0 = \infty$$

т. е.

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4}. \qquad \text{(b)}$$

Далѣе изъ формулы (I) предъидущаго § имѣемъ:

$$U_0 = \sin i_0 . \operatorname{tg} i_0 \qquad \text{(c)}$$

Формула (II) даетъ:

$$u_0 = 2\Phi_0 \qquad \text{(d)}$$

Такимъ образомъ видимъ, что, зная изъ опыта i_0, Φ_0, можемъ опредѣлить k и ε по формуламъ (I) § 13.

Разсмотрѣнный случай есть случай главнаго паденія [2].

Вычисленіе k и ε можно совершить по слѣдующимъ формуламъ:

1) Если $u_0 < \frac{\pi}{4_1}$ то, вычисливъ сначала вспомогательный уголъ μ по формулѣ: $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} i_0 . \sqrt{\cos 2u_0}$,

---

[1] Это есть случай главнаго паденія луча.

[2] Всѣ выводы §§ 13, 14, 15 и 16 опытомъ провѣрены Жаменомъ. См. An. de ch. et de ph. 3-me série T. XIX p. 296 — 342 для срединъ металлическихъ.

имѣемъ:

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \sin^2\mu . \operatorname{tg} 2u_0,$$

$$k^2 \sin 2\varepsilon = \sin^2 i_0 . \operatorname{tg}^2\mu . \operatorname{tg}^2 u_0.$$

2) Если $u_0 > \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} i_0 \sqrt{\cos(\pi - 2u_0)}$;

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{\sin^2\mu . \operatorname{tg}(\pi - 2u_0)}{\cos 2\mu},$$

$$k^2 . \sin 2\varepsilon = \sin^2 i_0 . \operatorname{tg}^2\mu . \operatorname{tg}(\pi - 2u_0).$$

17. Опредѣлимъ теперь амплитуды преломленныхъ лучей.

Положимъ сначала, что рѣчь идетъ о лучѣ, поляризованномъ въ 1-мъ азимутѣ, тогда при помощи формулъ §§ 6, 9 и 13 находимъ:

$$g' = \frac{2\cos i(\cos\varepsilon - \sqrt{-1}.\sin\varepsilon)}{\cos i . \cos\varepsilon + U\cos(u-\varepsilon) + \sqrt{-1}(U\sin(u-\varepsilon) - \cos i.\sin\varepsilon)},$$

отсюда

$$g'^2_1 = \frac{4\cos^2 i}{\cos^2 i + U^2 + 2U\cos i.\cos u}. \qquad (1)$$

Эта формула даетъ амплитуду колебаній въ лучахъ, поляризованныхъ въ 1-мъ азимутѣ. Для разности хода получимъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_1 = \frac{-U\sin u}{\cos i + U\cos u}. \qquad (2)$$

Здѣсь, слѣдовательно, опережаетъ второе колебаніе. — Полагая въ (1)

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \sqrt{\frac{\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right)}} \qquad (a)$$

причемъ

$$\operatorname{tg}\Phi = \cos u \sin 2\omega_1 \qquad (b)$$

т. е.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi_1$$

по формулѣ (II) § 13 и тогда

$$(\alpha_1) \ldots . \operatorname{tg} \tau_1 = \sqrt{\frac{\sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right)}},$$

или еще $(\alpha_1) \ldots . \cos 2\tau_1 = \cos u \sin 2\omega_1$,

тогда получимъ:

$$g_1^{\,2} = \frac{2U \sin^2 \omega_1}{\cos^2 \tau_1} \qquad \text{(I)}$$

§ 13 даетъ:

$$\operatorname{ctg} r . \sin i = U \cos u + U \sin u \sqrt{-1};$$

называя же дѣйствительный уголъ преломленія r_0, можно эту формулу представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\operatorname{ctg} r_0 . \sin i + q\sqrt{-1} = U \cos u + U \sin u \sqrt{-1},$$

откуда

$$U \cos u = \sin i . \operatorname{ctg} r_0. \qquad (\alpha)$$

$$U \sin u = q^{*}. \qquad (\beta)$$

При помощи этихъ соотношеній можно придать формуламъ (I) и (2) видъ формулъ Кеттелера [1]; именно, подставляя въ нихъ (α) и (β), находимъ:

$$g_1^{\,2} = \frac{4 \cos^2 i . \sin^2 r_0}{\sin^2 (i + r_0) + q^2 \sin^2 r_0} \qquad \text{(1 bis)}$$

---

* Количество q есть коеффицентъ поглощенія.

[1] Wiedemann's Annalen. Bd. I. S. 206.

и

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = -\frac{q.\sin r_0}{\sin(i+r_0)}. \qquad (2 \text{ bis})$$

Такимъ образомъ преломленный лучъ есть эллиптически поляризованный [1].

18. Вычислимъ амплитуду преломленнаго луча, поляризованнаго во второмъ азимутѣ. Имѣемъ по §§ 9 и 13 въ предположеніи

$$C=0,$$

$$g'' = \frac{4k^2 \cos^2 i}{k^2 \cos i + U\cos(2\varepsilon - u) - U\sin(2\varepsilon - u).\sqrt{-1}},$$

слѣдовательно

$$g^2{}_2 = \frac{4k^2 \cos^2 i}{k^4 \cos^2 i + U^2 + 2Uk^2 \cos i . \cos(2\varepsilon - u)}. \qquad (1)$$

Полагая же

$$\operatorname{tg} \tau_2 = \sqrt{\frac{\cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right)}}, \qquad (a)$$

гдѣ

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \cos(2\varepsilon - u).\sin 2\omega_2 \qquad (b)$$

или по § 14

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \psi_2$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tg} \tau_2 = \sqrt{\frac{\sin\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right)}}, \qquad (a')$$

---

[1] Мнѣ неизвѣстно, былъ ли подобный результатъ повѣряемъ опытомъ.

или еще

$$\cos 2\tau_2 = \cos(2\varepsilon - u) \sin 2\omega_2 \qquad \text{(a'')}$$

тогда

$$g^2_2 = \frac{2\cos^2\omega_2}{k^2\cos^2\tau_2}. \qquad \text{(I)}$$

Для разности хода получаемъ:

$$\operatorname{tg} \Delta_2 = \frac{U\sin(\varepsilon - u) - k^2\cos i \,.\, \sin\varepsilon}{U\sin(\varepsilon - u) + k^2\cos i \,.\, \sin\varepsilon}. \qquad \text{(II)}$$

Чтобы привести формулы (I) и (II) къ виду Кеттелера, надо положить

$$U\cos u = p,\ \ U\sin u = q,\ \ k.\cos\varepsilon = a,\ \ k\sin\varepsilon = b.$$

Такимъ образомъ получаемъ эллиптически поляризованный лучъ.

19. Если C не нуль, то вопросъ предъидущаго § разрѣшается слѣдующимъ образомъ.— Для вычисленія g'' полагаемъ сначала:

$$U\cos u + CU^2\sin i \,.\, \sin 2u = Q^2\cos P$$

$$U\sin u - CU^2\sin i \,.\, \cos 2u + C\cos^2 i \,.\, \sin i = Q^2\sin P;$$

отсюда находимъ

$$U\cos(2\varepsilon - u) + CU^2\sin i \,.\, \sin 2(u - \varepsilon) +$$
$$+ C\cos^2 i \,.\, \sin i \,.\, \sin 2\varepsilon = Q^2\cos(2\varepsilon - P)$$

$$U\sin(2\varepsilon - u) + CU^2\sin i \,.\, \cos 2(u - \varepsilon) -$$
$$- C\cos^2 i \,.\, \sin i \,.\, \cos 2\varepsilon = Q^2\sin(2\varepsilon - P).$$

При помощи этихъ соотношеній находимъ:

$$g'' = \frac{2k.\cos i(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\sqrt{-1})}{k^2\cos i + Q^2\cos(2\varepsilon - P) - Q^2\sin(2\varepsilon - P)\sqrt{-1}},$$

слѣдовательно

$$g^2_2 = \frac{4k^2 \cos^2 i}{k^4 \cos^2 i + Q^4 + 2k^2 Q^2 \cos i . \cos(2\varepsilon - P)}. \qquad (1)$$

Но если положимъ:

$$\operatorname{tg} \omega'_2 = \frac{Q^2}{k^2 . \cos i}, \qquad (\alpha)$$

тогда послѣ простого преобразованія получимъ:

$$g^2_2 = \frac{2 \cos^2 \omega'_2}{k^2 \cos^2 \tau'_2}. \qquad (a)$$

Для вычисленія τ'_2 можно дать формулу, аналогичную той, которая получена для τ_2.

Дѣйствительно, положимъ:

$$\sin 2\omega_2 . \cos(2\varepsilon - P) = \operatorname{tg} \varphi'_2 \qquad (b)$$

Вычисляя

$$1 - \operatorname{tg} \varphi'_2 \text{ и } 1 + \operatorname{tg} \varphi'_2$$

найдемъ по раздѣленіи результатовъ:

$$\operatorname{tg} \tau'_2 = \sqrt{\frac{\cos\left(\varphi'_2 + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi'_2 - \frac{\pi}{4}\right)}} \qquad (c)$$

— формула аналогичная (a') предъидущаго параграфа.

Если сдѣлаемъ $C = 0$, то сейчасъ найденныя формулы обратятся въ формулы предъидущаго параграфа.

20. Разберемъ теперь случай, когда свѣтъ идетъ изъ поглощающей среды въ непоглощающую.

Пусть i будетъ уголъ паденія, r—преломленія; тогда можно положить, согласно § 13:

$$\sin i = \frac{\sin r}{k} (\cos \varepsilon - \sqrt{-1} . \sin \varepsilon). \qquad (\alpha)$$

$$\cos i = \frac{U}{k}\Big[\cos(\varepsilon - u) - \sqrt{-1}\sin(\varepsilon - u)\Big] \qquad (\beta),$$

причемъ k, ε постоянныя количества, а U и u перемѣнныя.

Изъ написанныхъ соотношеній находимъ:

$$\left.\begin{aligned} U^2\cos 2u &= k^2\cos 2\varepsilon - \sin^2 r \\ U^2\sin 2u &= k^2\sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

ибо

$$\sin^2 i + \cos^2 i = 1.$$

Дѣйствительный показатель преломленія опредѣлимъ слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе (β), раздѣленное на (α) даетъ:

$$\mathrm{ctg}\, i.\sin r = U\cos u + \sqrt{-1}.\,U\sin u,$$

или:

$$\mathrm{ctg}\, i_0.\sin r + q.\sqrt{-1}. = U\cos u + \sqrt{-1}.\,U\sin u,$$

гдѣ i_0 — дѣйствительный уголъ паденія. Отсюда:

$$\mathrm{ctg}\, i_0 = \frac{U\cos u}{\sin r}. \qquad (\gamma)$$

Опредѣливъ изъ этой формулы i_0, найдемъ показатель преломленія, равный отношенію $\dfrac{\sin i_0}{\sin r}$.

21. Замѣтивъ соотношенія предъидущаго §, получаемъ амплитуды отраженныхъ и преломленныхъ лучей въ обоихъ азимутахъ совершенно тѣмъ-же путемъ, какимъ онѣ были получены въ §§ 13, 14, 17, 18 и 19.

Именно для лучей, поляризованныхъ въ первомъ азимутѣ, имѣемъ формулы:

$$h_1^2 = \mathrm{tg}\left(f_1 - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\,\Delta_1 = \sin u.\,\mathrm{tg}\, 2w_1 \qquad (2)$$

при чемъ

$$\mathrm{tg}\,w_1 = \frac{\cos r}{U} \tag{3}$$

и

$$\mathrm{ctg}\,f_1 = \cos u .\ \sin 2w_1 \tag{4}$$

Можно вычислить h_1 иначе. Положимъ:

$$\cos 2t_1 = \cos u .\ \sin 2w_1 \tag{5}$$

тогда

$$h_1^{\,2} = \mathrm{tg}^2 t_1 \tag{6}$$

Далѣе:

$$g_1^{\,2} = \frac{2\cos^2 w_1}{\cos^2 t_1} \tag{7}$$

и

$$\mathrm{tg}\,\delta_1 = \frac{\cos r .\ \sin u}{U + \cos r .\ \cos u}\,. \tag{8}$$

Для лучей, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ, имѣемъ:

$$h_2 = \mathrm{tg}\left(f_2 - \frac{\pi}{4}\right), \tag{10}$$

$$\mathrm{tg}\Delta_2 = \sin(2\varepsilon - u) .\ \mathrm{tg}\,2w_2 \tag{11}$$

при чемъ:

$$\mathrm{tg}\,w_2 = \frac{U}{k^2 \cos r}, \tag{12}$$

$$\mathrm{ctg}\,f_2 = \cos(2\varepsilon - u) .\ \sin 2w_2 . \tag{13}$$

Для h_2 можно имѣть еще формулу:

$$h_2^{\,2} = \mathrm{tg}^2 t_2 , \tag{14}$$

гдѣ

$$\cos 2t_2 = \cos(2\varepsilon - u)\sin 2w_2 . \tag{15}$$

Далѣе:

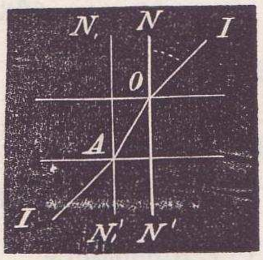
$$g_2^{\,2} = \frac{2k^2 \sin^2 w_2}{\cos^2 t_2} \tag{16}$$

и

$$\mathrm{tg}\,\delta_2 = \frac{U\sin\varepsilon - k^2\cos r \sin(\varepsilon - u)}{U\cos\varepsilon + k^2 \cos r \cos(\varepsilon - u)} \tag{17}$$

Замѣтимъ, что при выводѣ послѣднихъ формулъ предполагалось $C=0$.

22. Приложимъ найденныя формулы къ рѣшенію слѣдующаго вопроса. Свѣтъ проходитъ чрезъ поглощающую его средину (на примѣръ тонкій листокъ металла), которая помѣщена въ непоглощающей (напр. въ воздухѣ). Опредѣлить амплитуду и фазу луча, вышедшаго изъ поглощающей средины.



Пусть уголъ паденія NOJ есть i, амплитуды преломляющаго луча OA, поляризованнаго въ томъ или другомъ изъ главныхъ азимутовъ, будутъ соотвѣтственно g_1 и g_2; амплитуды вышедшаго луча AJ^1 — $g_1{}^1$ и $g_2{}^1$, принимая западающій лучъ OA; тогда, если G_1 и G_2 будутъ амплитуды вышедшаго луча, соотвѣтствующаго падающему JO (амплитуда котораго принимается за 1-цу), имѣемъ:

$$G_1 = g_1 . g_1{}^1 \text{ и } G_2 = g_2 . g_2{}^1.$$

Подставляя значенія g_1, g_2 изъ §§ 17 и 18, а значенія $g_1{}^1$ и $g_2{}^1$ изъ § 21, находимъ по упрощеніи:

$$G_1 = \frac{\sin 2\omega_1}{\cos^2 \tau_1}, \qquad (1)$$

$$G_2 = \frac{\sin 2\omega_2}{\cos^2 \tau_2}. \qquad (2)$$

Для разности фазъ находимъ:

$$D_1 = \delta_1 + \delta_1{}' \quad \text{и} \quad D_2 = \delta_2 + \delta'_2, \text{ гдѣ}$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = -\frac{U \sin u}{\cos i + U \cos u}, \qquad \operatorname{tg} \delta_1{}^1 = \frac{\cos r . \sin u}{U + \cos r . \cos u},$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{U \sin(\varepsilon - u) - k^2 \cos i . \sin \varepsilon}{U \cos(\varepsilon - u) - k^2 \cos i . \cos \varepsilon},$$

$$\operatorname{tg} \delta_2{}^1 = \frac{U \sin \varepsilon - k^2 \cos r . \sin(\varepsilon - u)}{U \cos \varepsilon - k^2 \cos r . \cos(\varepsilon - u)}.$$

Замѣтимъ еще одну формулу, которою ниже воспользуемся. Раздѣляя (2) формулу настоящаго параграфа на (1), имѣемъ:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\sin 2\omega_2 \cos^2 \tau_1}{\sin 2\omega_1 \cos^2 \tau_2}. \qquad (a)$$

IV.

23. Такъ-какъ всѣ тѣла болѣе (непрозрачныя) или менѣе (прозрачныя) поглощаютъ падающій на нихъ свѣтъ, то формулы §§ 13 — 22 показываютъ, что отраженіемъ и преломленіемъ свѣтъ вообще поляризуется эллиптически во всѣхъ изотропныхъ тѣлахъ; но если уголъ ε, а слѣдовательно и u очень малъ или нуль, то лучъ поляризуется прямолинейно.

И такъ, *каждая средина должна характеризоваться двумя коеффиціентами* ε и k (§ 13).

Если $\varepsilon = 0$, то формулы §§ 13—22 переходятъ въ формулы Фрэнеля, которыя справедливы только для нѣкоторыхъ срединъ[1]. *Средины, считаемыя прозрачными, характеризуются очень малымъ* ε (а слѣдовательно и u), *а непрозрачныя (металлы* напр.) *большимъ* ε (или u). Для повѣрки сдѣланнаго сейчасъ заключенія, я обращусь къ наблюденіямъ Жамена, произведеннымъ имъ надъ цѣлымъ рядомъ твердыхъ и жидкихъ тѣлъ. Жаменъ производилъ свои наблюденія съ цѣлью повѣрить формулы Коши для прозрачныхъ срединъ (§ 9), но не для срединъ, поглощающихъ свѣтъ (§§ 13—22). Его наблюденія содержатъ данныя и для нашего случая. Именно: для опредѣленія k и ε необходимъ *главный случай паденія*; при этомъ полезно замѣтить, что коеффиціентъ ε Жамена есть нашъ η (§ 8) и онъ намъ не нуженъ. Наблюденія Жамена даютъ i_0 (уголъ полной поляризаціи) и Φ_0 (§ 16).

---

[1] Жаменъ нашелъ только два тѣла подобнаго рода: квасцы и менилитъ. Ann. de ch. et de ph. 3 s. T. 29, pp. 263—304.

Разсматривая i_0 и $\varPhi_0$ таблицъ Жамена[1], можно видѣть, что нѣкоторыя изъ нихъ даны неточно; именно, онѣ соотвѣтствуютъ разности хода обоихъ отраженныхъ лучей, равной не $^3/_2$ длины волны, а величинѣ нѣсколько меньшей. Все это нѣсколько вліяетъ на результатъ, но если опредѣлить ε и $\varPhi_0$ простымъ интерполированіемъ, то получатся болѣе точныя числа, мало, впрочемъ, отличающіяся отъ предъидущихъ.

Вотъ таблица k и ε для нѣкоторыхъ срединъ[2].

Названіе тѣла.	k	ε	i_0	$\varPhi_0$
Алмазъ. . . .	2,41353	2°20′0″.	67°30′,	1°22′
Обманка прозрачная	2,36487	4°21′31″.	67°6′,	2°34′
Плавиковый шпатъ	1,44134	0°51′19″.	55°15′,	0°38′
Флинтгласъ (Guinant.). . . .	1,71307	1°42″4′.	59°44′,	1°8′24″
Стекло (пок. прел. 1,487) . . .	1,48712	0°32′33″.	56°5′,	0°23′38″[3]
Гіалитъ . . .	1,4207	0°43′26″.	54°52′,	0°25′47″
Огненный опалъ .	1,62235	2°20′1″.	58°22′,	1°36′35″
Вода	1,3229	0°20′19″.	53°7′,	0°16′
Лавандовая эссенція	1,4619	0°9′33″.	55°37′40″,	0°7′
Растворъ полуторахлористаго желѣза.	1,3723	0°48′20″.	53°55′,	1°14′
Реальгаръ прозрачный . . .	2,427	11°54′.	67°45′,	6°55′

---

[1] Ann. de Ch. et de Ph. 3-me série. T. 29.

[2] Для вычисленія служили формулы (c), (d) § 16 и (1) § 13.

[3] Болѣе точныя числа суть: $i_0 = 56°4'31''$; $\phi_0 = 0°23'24''$.

Вычисляя съ этими коэффиціентами нѣкоторыя наблюденія Жамена, я нашелъ, что *наблюденія согласуются лучше съ предлагаемыми формулами* (§ 15), чѣмъ съ формулами Коши (§ 9).

Вотъ для примѣра таблица:

Названіе тѣлъ.	Углы паденія.	Наблюденіе Ф.	Фор. К.	Предл. фор.	Н.—К.	Н.—П.
Алмазъ . . .	75°	13°30′	13°17′	13°31′	+13′	—1′
	74°	12°13′	11°23′	11°38′	+50′	+35′
	69°	2°57′	2°18′	2°52′	+39′	+5′
	62°	8°18′	8°54′	8°38′	—36′	—20′
Прозрачная обманка. . . .	65°	4°36′	4°8′	4°13′	+28′	+23′
	64°	5°21′	5°27′	5°32′	—6′	—11′
Плавиковый шпатъ . . .	57°30′	3°50′	3°35′	3°37′	+15′	+13′
	54°15′	1°38′	1°39′	1°41′	—1′	—3′
Флинтъ (Guinant)	60°30′	2°3′	1°31′	1°39′	+32′	+24′
	58°	2°45′	2°50′	2°53′	—5′	—8′
Стекло[1] пок. прел. 1,487. .	60°	6°5′	5°29′	6°9′	+36′	—4′
	58°	3°2′	3°50′	3°2′	—48′	∓0′
	54°	3°9′	3°17′	3°17′	—8′	—8′
			Ариѳм. среднее ошибокъ		+9′	+3′

Для гіалита, огненнаго опала и реальгара вычисленія дали тоже подобные результаты, причемъ для трехъ названныхъ тѣлъ вычислялся $\operatorname{tg}\Phi$, но не уголъ Φ.

---

1 Для стекла взяты были болѣе точныя значенія i_0 и Φ_0. См. предъидущую таблицу.

Какъ примѣръ приведу два случая для огненнаго опала. Для $i = 57°30'$ и для $i = 60°$ вычисленія дали въ 1-мъ случаѣ $\operatorname{tg} \Phi = 0{,}0383$ и во 2-мъ случаѣ $\operatorname{tg} \Phi = 0{,}0729$, а наблюденія: 0,0362 и 0,0738. Кромѣ приведенныхъ случаевъ я вычислялъ и другіе.

Для повѣрки возможности примѣненія предложенныхъ формулъ къ жидкостямъ, я вычислилъ показателей преломленія ихъ по формулѣ (α) § 17, которая даетъ дѣйствительный уголъ преломленія r_0, а затѣмъ показатель преломленія $= \dfrac{\sin i}{\sin r_0}$. Вычисленія дали числа тождественныя съ тѣми, которыя приводитъ Жаменъ[1]. Вотъ примѣры:

	Вода.	Лавандовая эссенція.	Растворъ полуторахлористаго желѣза.	Стекло и вода.
Наблюденіе . .	1,333	1,462	1,372	1,091
Вычисленіе . .	1,332	1,462	1,372	1,091.

То-же даютъ и разности фазъ; совпаденіе съ наблюденіями такое-же, какъ и въ случаѣ азимутовъ; при этомъ только надо замѣтить, что у Жамена главный случай соотвѣтствуетъ разности фазъ, равной $\dfrac{3\lambda}{2}$; а у меня $\dfrac{\lambda}{2}$, слѣдовательно разности фазъ, вычисленныя по предлагаемымъ мною формуламъ, обратятся въ жаменовскія, если ихъ вычесть изъ 2, такъ-какъ $\dfrac{3\lambda}{2} = 2 \cdot \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{2}$ и $\dfrac{\lambda}{2}$ принята у Жамена за единицу линейной мѣры.

Приложимъ еще формулы § 22 къ нѣкоторымъ наблюденіямъ Квинке.

Наблюденіе надъ золотомъ дало Квинке:

$$i_0 = 70°48', \quad \Phi_0 = 42°19'^{*}.$$

[1] Annales de Ch. et de Ph. 3-ième série. T. 31, pp. 165—187.

* Pogg. Ann. Bd. CXIX. S. 383.

Съ этими данными находимъ:

$$k = 2{,}5456, \qquad \varepsilon = 83^\circ 54'.$$

Вычислимъ одно изъ наблюденій, осуществившихъ формулу (а) § 22; возьмемъ изъ ряда данныхъ Квинке одно, соотвѣтствующее $i = 10^\circ$. Имѣемъ

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{G_2}{G} = 45^\circ 41'.$$

Квинке даетъ: $\beta = 45^\circ 11'$.

Протоколъ засѣданія 29-го сентября.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. К. Погорѣлко, И. К. Шейдтъ, Н. М. Флавицкій, И. Д. Штукаревъ, А. П. Грузинцевъ, М. С. Косенко, Г. В. Левицкій.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Предсѣдатель сообщилъ объ отказѣ профессора А. П. Шимкова принять на себя званіе товарища предсѣдателя. Получившій при избраніи въ засѣданіи 8-го сентября большинство голосовъ, послѣ проф. Шимкова, профессоръ М. Ѳ. Ковальскій принялъ званіе товарища предсѣдателя.

Избраны въ члены общества:

А. А. Клюшниковъ (предлагалъ В. Г. Имшенецкій) и Н. А. Чернай (предлагалъ М. Ѳ. Ковальскій).

М. Ѳ. Ковальскій сдѣлалъ нѣсколько замѣчаній по поводу учебника Ариѳметики Малинина и Буренина.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ содержаніе отзыва проф. Hoüel'я объ изданныхъ проф. Ващенко-Захарченко «Началахъ Эвклида».

М. Ѳ. Ковальскій сообщилъ замѣтку объ 11 постулатѣ Эвклида.

Для покрытія издержекъ по изданію «Сообщеній» Общества и разсылки этихъ Сообщеній различнымъ ученымъ обществамъ предсѣдателемъ предложена добровольная подписка.

Приложеніе.

Начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями. Ординарнаго профессора Императорскаго университета Св. Владиміра *М. Е. Ващенко-Захарченко*. Кіевъ. 1880.

Извлеченіе изъ рецензіи проф. математики въ Бордо *J. Hoüel*'я (Bulletin des sciences Mathématiques et Astronomiques. T. IV. Mars. 1880).

Въ изданіяхъ знаменитой книги «Началъ» не было недостатка; выписанное выше — по меньшей мѣрѣ 461-ое со времени изобрѣтенія книгопечатанія. Но, не смотря на постоянно возраставшее ихъ число, не доставало изданія, редактированнаго съ точки зрѣнія послѣднихъ открытій, сдѣланныхъ въ текущемъ полувѣкѣ, относительно природы принциповъ элементарной геометріи.

Теперь мы можемъ съ удовольствіемъ сообщить, что этотъ недостатокъ восполненъ замѣчательнымъ изданіемъ, котораго названіе приведено выше. Благодаря замѣчаніямъ и дополненіямъ, которыми ученый издатель обогатилъ свой трудъ, трактатъ Евклида можетъ теперь служить текстомъ въ элементарномъ преподаваніи и въ то-же время руководить геометровъ, желающихъ познакомиться съ изысканіями самаго высокаго порядка, къ которымъ привело въ послѣдніе годы глубокое изученіе началъ науки о пространствѣ.

Сочиненію кіевскаго профессора предшествуетъ интересное введеніе, гдѣ упомянуты усилія, сдѣланныя въ послѣднее время многими извѣстными геометрами, привлечь снова вниманіе авторовъ и читателей къ безсмертному трактату Евклида, употребленіе котораго въ преподаваніи было оставлено повсюду, исключая Англіи. Но если изученіе геометріи должно имѣть главною цѣлью развитіе логическихъ способностей, то ни что не можетъ быть полезнѣе глубокаго знакомства съ этимъ мастерскимъ произведеніемъ (chef-d'oeuvre) науки древнихъ, котораго новѣйшіе авторы еще не могли заставить забыть, которое въ теченіе XX вѣковъ все еще остается самымъ совершеннымъ образцемъ строгихъ сужденій. Въ наше время наука расширилась вокругъ области элементовъ Евклида; изъ его принциповъ полученъ безконечный рядъ слѣдствій; самые принципы подвергнуты строгому изслѣдованію; но эти удивительные успѣхи не затронули содержанія сущности ученія александрійскаго геометра; всѣ улучшенія въ немъ сводятся къ немногимъ упрощеніямъ или исправленіямъ недосмотровъ въ подробностяхъ, которыхъ большая часть могла произойдти отъ невѣжества переписчиковъ или неловкаго усердія комментаторовъ.

Но слѣдуетъ ли изъ этого, что книга Евклида въ своей архаической формѣ есть послѣднее слово геометрической науки и что должно подражать примѣру англичанъ, еще недавно изучавшихъ ее слово въ слово, какъ-будто священный текстъ? Мы далеко не думаемъ этого; по нашему твердому убѣжденію, гораздо выгоднѣе, при изученіи всякой науки, замѣнять синтетическій и аподиктическій способъ древнихъ способомъ аналитическимъ, болѣе соотвѣтствующимъ современному уму, — способомъ, утверждающимъ истину только тогда, когда она доказана, пріучающимъ умъ отдавать себѣ отчетъ во всемъ. Но тѣмъ не менѣе остается справедливымъ, что для того, кто стремится къ глубокому познанію геометріи, чтеніе Евклида есть одно изъ самыхъ полезныхъ упражненій. Одна изъ причинъ, отвращавшихъ начинающихъ отъ этого изученія, была пространная и запутанная форма изложенія древнихъ, являвшаяся по необходимости, при недостаткѣ тѣхъ ясныхъ и сжатыхъ означеній, употребленію которыхъ математика обязана большею частью безчисленныхъ и поразительныхъ успѣховъ въ два послѣдніе вѣка. Большинство переводчиковъ Евклида считали себя обязанными сохранять древнюю форму изложенія, смотря на свой трудъ съ точки зрѣнія археологической и литературной, а потому и не удивительно, что этотъ древній геометръ, переводимый лишь на половину, почти всюду былъ оставленъ и замѣненъ его наслѣдниками, выражавшимися современнымъ и легко понятнымъ языкомъ.

Однако существуетъ нѣсколько изданій «элементовъ», гдѣ удобства современнаго читателя приняты во вниманіе. Мы можемъ цитировать изданіе Барроу (Barrow) 1655 г. въ Англіи, изд. Лоренца 1781 г. въ Германіи, не говоря о безчисленныхъ классныхъ изданіяхъ въ Великобританіи, въ которыхъ, въ послѣдніе годы, современныя означенія все болѣе и болѣе вытѣсняютъ буквальную передачу.

Г. профессоръ Ващенко-Захарченко въ своей продолжительной практикѣ преподаванія и экзаменовъ замѣтилъ въ большей части учебниковъ геометріи важныя и многочисленныя недостатки, которыхъ генеалогію можно было прослѣдить восходя не до самаго Евклида, а до какого-нибудь изъ его посредственныхъ комментаторовъ, бывшихъ не въ состояніи понять произведенія учителя, исказившихъ и понизившихъ его до уровня своего пониманія.

Г. Ващенко-Захарченко справедливо полагалъ, что прежде попытокъ *сдѣлать лучше Евклида*, замѣчаемыхъ у многихъ авторовъ, нужно бы стараться научиться *дѣлать такъ-же хорошо*, какъ онъ, проникнувшись духомъ строгости, господствующимъ въ его «элементахъ», къ которому приблизиться могли только немногіе изъ современныхъ научныхъ писателей. Для этой цѣли г. В.-З. предпринялъ значительный трудъ изданія *геометрической части элементовъ*, переложенныхъ на современный математическій языкъ, съ прибавленіями и объяснительными замѣчаніями, сопоставляющими древняго геометра лицемъ къ лицу съ современною наукой и показывающими, на-сколько его XX-вѣковая доктрина ближе къ заключеніямъ великихъ современныхъ математиковъ, чѣмъ ученіе, заключающееся въ значительномъ числѣ руководствъ, изданныхъ въ послѣднія 50 лѣтъ.

Въ замѣчательномъ введеніи, которое ученый профессоръ помѣстилъ во главѣ своего труда, онъ основательно разобралъ смыслъ и назначеніе *геометрическихъ гипотезъ* Евклида. Онѣ приводятся къ числу 4-хъ, за исключеніемъ основныхъ истинъ, прилагающихся ко всякаго рода величинамъ и которыя присоединялись, даже въ лучшихъ изданіяхъ, къ геометрическимъ гипотезамъ подъ названіемъ *аксіомъ* или общихъ понятій (notions communes). Г. Захарченко основательно принялъ классификацію Барроу, Роберта Симсона и Лоренца....

Четыре геометрическія гипотезы явно или неявно заключаются въ аксіомахъ, обозначенныхъ по классификаціи автора нумерами 8, 10, 12 и 11, гдѣ порядокъ двухъ послѣднихъ перемѣщенъ нами намѣренно.

Аксіома 8 предполагаетъ неопредѣлимую идею *неизмѣняемости* фигуръ, при ихъ перенесеніи въ плоскости или въ пространствѣ. Допустивъ это свойство фигуръ, можно опредѣлить ихъ *равенство* возможностью совпаденія ихъ другъ съ другомъ, или (по аксіомѣ 1-й) каждой изъ фигуръ съ третьею фигурой. Такимъ образомъ аксіома 8 неявно заключаетъ въ себѣ *первую гипотезу*, существенно необходимую для геометріи, гипотезу неизмѣняемости фигуръ.

*

Аксіома 10 въ дѣйствительности есть теорема, проистекающая непосредственно изъ *второй гипотезы*, состоящей въ допущеніи существованія поверхности, наложимой на самое себя во всѣхъ ея частяхъ — какъ прямо, такъ и обратною стороной (плоскость) или только прямо (сфера).

Аксіома 12 выясняетъ довольно смутное евклидово опредѣленіе прямой линіи (опредѣленіе 4). Для этого допущено, *какъ третья гипотеза*, существованіе линіи, наложимой на самое себя во всѣхъ ея частяхъ, когда ее перемѣщаютъ, увлекая вмѣстѣ съ частью поверхности наложимой на самое себя (свойство принадлежащее не только прямой, но также кругу и винтовой линіи), или заставляя вращаться эту поверхность около двухъ точекъ разсматриваемой линіи (свойство, исключительно принадлежащее прямой линіи).

Этихъ трехъ гипотезъ достаточно для доказательства 28 первыхъ предложеній 1-й книги Евклида, относящихся безразлично къ фигурамъ плоскимъ, или начерченнымъ на одной и той-же сферѣ [1]. Евклидъ, конечно, не безъ намѣренія такимъ образомъ сгруппировалъ эти предложенія, помѣстивъ ихъ прежде тѣхъ, которыя не могли быть доказаны безъ помощи новаго принципа или *четвертой гипотезы*, выражаемой аксіомою 11-ю, вообще извѣстной подъ несвойственнымъ ей названіемъ *постулята* Евклида.

Эта аксіома съ давнихъ поръ была предметомъ многихъ изслѣдованій. Ея видимая аналогія съ выраженіемъ нѣкоторыхъ теоремъ, выводимыхъ изъ трехъ предыдущихъ гипотезъ, увлекла многихъ геометровъ къ отысканію ея доказательства, основаннаго на тѣхъ-же принципахъ. Но всѣ ихъ усилія до сихъ поръ

---

[1] Это раньше показалъ самъ г. *Hoüel* въ своемъ «Essai critique sur les principes fondamenteaux de la Géométrie élémentaire *ou* Commentaire sur le XXXII premières propositions des Eléments d'Euclide. Paris. 1867.

В. И.

были безуспѣшны, и въ настоящее время достовѣрно извѣстно, что они никогда не могутъ быть увѣнчаны успѣхомъ[1].

Тѣмъ не менѣе справедливо, что попытки такихъ математиковъ, какъ *Лежандръ*, уменьшить одною число геометрическихъ гипотезъ, по крайней мѣрѣ могущественно содѣйствовали разъясненію вопроса и имѣли важный результатъ, съ точностью показавъ, какія предложенія плоской геометріи независимы отъ аксіомы о параллельныхъ.

Изложивъ прекрасныя изслѣдованія Лежандра о различныхъ выраженіяхъ, которыми можно замѣнить аксіому 11-ю, г. Захарченко приступаетъ къ геометріи не-евклидовой, преимущественно слѣдуя пути, начертанному *Лобачевскимъ*, и принимая въ соображеніе болѣе новые труды *Бельтрами*. Это существенное résumé вопроса, составляющаго необходимое дополненіе всякаго трактата по элементарной геометріи, изложено на 60 страницахъ и будетъ читаться съ интересомъ и пользой.

Мы вполнѣ одобряемъ автора за то, что изъ этого résumé онъ сдѣлалъ главу, совершенно независимую отъ прочихъ частей книги; ибо чтеніе этой деликатной теоріи предполагаетъ умъ, уже достаточно изощренный на геометрическихъ выводахъ и привыкшій къ умозаключеніямъ помимо непосредственнаго содѣйствія чувствъ.

Далѣе г. Hoüel передаетъ содержаніе по книгамъ *Началъ Евклида*, изданныхъ проф. В.-З., слѣдуя обзору ихъ, помѣщенному въ придисловіи этого изданія, который мы опустимъ и прямо перейдемъ къ заключенію рецензіи.

---

[1] Такая достовѣрность, проистекающая изъ глубокихъ изслѣдованій этого труднаго предмета, произведенныхъ въ послѣднемъ полувѣкѣ, не препятствуетъ появленію новичковъ-геометровъ, истощающихъ свои усилія на разысканіи рѣшенія, не поддавшагося величайшимъ геніямъ и невозможность котораго доказана не менѣе геніальными геометрами. Въ послѣдніе годы эта геометрическая болѣзнь приняла размѣры настоящей эпидеміи (*Авт.*).

Г. Захарченко обогатилъ свой трудъ драгоцѣннымъ дополненіемъ, состоящимъ изъ трехъ библіографическихъ указателей, изъ которыхъ въ первомъ онъ даетъ списокъ 460 изданій Евклида, напечатанныхъ почти на всѣхъ литературныхъ языкахъ со времени изобрѣтенія книгопечатанія. Г. Гуель съ своей стороны дополняетъ этотъ списокъ 5-ю нумерами, въ немъ не заключающимися.

Далѣе слѣдуетъ списокъ въ алфавитномъ порядкѣ авторовъ важнѣйшихъ произведеній по не-евклидовой геометріи, появившихся до 1880 г. Г. Гуель предлагаетъ дополнить этотъ списокъ двумя слѣдующими сочиненіями:

De Tilly, Sur les principes de la Géométrie et de la Mécanique. Bordeaux et Bruxelles. 1879.

Wagner, Lehrbuch der Geometrie, nach Gründsätzen Bolay's. Hamburg. 1874.

Въ третьемъ указателѣ приведены названія главныхъ сочиненій, которыми пользовался авторъ.

Приведемъ заключительныя слова рецензіи:

По этой замѣткѣ, гдѣ мы должны были опустить многія интересныя подробности, читатель можетъ однако судить о важности этого новаго изданія самаго древняго изъ трактатовъ по геометріи.

Ученый кіевскій профессоръ въ своемъ превосходномъ переводѣ и добавленіяхъ, вполнѣ гармонирующихъ съ текстомъ, даетъ классическое произведеніе, самое новое и полное изъ всѣхъ, какія мы имѣемъ по элементарной геометріи. Пока славянскіе языки въ нашихъ (французскихъ) школахъ еще не получили мѣста, соотвѣтствующаго научной роли націй на нихъ говорящихъ, мы усердно рекомендуемъ переводъ этой прекрасной книги на языкъ, болѣе распространенный у насъ.

В. И.

Протоколъ засѣданія 27 октября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, А. А. Клюшниковъ, Н. М. Флавицкій, С. А. Раевскій, П. М. Рудневъ и Г. В. Левицкій.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

По открытіи засѣданія секретаремъ было прочитано письмо г. ректора кіевскаго университета, въ которомъ сообщается о согласіи совѣта университета обмѣниваться изданіями съ математическимъ обществомъ.

К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе «О фокусахъ алгебраическихъ кривыхъ».

Протоколъ засѣданія 28 ноября.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, Д. М. Деларю, А. А. Клюшниковъ, М. С. Косенко, С. А. Раевскій, И. К. Щейдтъ и И. Д. Штукаревъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

По открытіи засѣданія доложено письмо г. ректора московскаго университета о согласіи совѣта университета высылать «Ученыя записки» въ обмѣнъ на «Сообщенія» общества.

Доложено о поступившихъ въ библіотеку общества книгахъ.

К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе «О геометрическомъ опредѣленіи проективнаго соотвѣтствія», по поводу замѣтки Ф. Клейна въ Mathematische Annalen.

Протоколъ засѣданія 12 декабря.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, П. М. Рудневъ, А. А. Клюшниковъ, А. К. Погорѣлко, Г. В. Левицкій, И. К. Шейдтъ и М. С. Косенко.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

По открытіи засѣданія доложены письма гг. директора московской астрономической обсерваторіи и секретаря московскаго общества испытателей природы о согласіи на обмѣнъ изданій.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ замѣтку: «Обобщеніе опредѣленій функцій съ дѣйствительныхъ на комплексныя значенія перемѣнныхъ».

Г. В. Левицкій сообщилъ замѣтку: «О простѣйшемъ выводѣ формулъ параллакса по координатамъ свѣтилъ».

I.

ОБЪ ИЗЛОЖЕНІИ НАЧАЛЪ

ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ геометріи, изучающей свойства пространства и мыслимыхъ въ немъ формъ независимо отъ понятій о величинѣ и измѣреніи, встрѣчается одно предложеніе, по справедливости называемое нѣкоторыми учеными *основнымъ* [1]. Предложеніе это выражаетъ, что такъ называемое проективное соотвѣтствіе между двумя формами первой степени (напр. между двумя рядами точекъ на прямыхъ) устанавливается вполнѣ, когда даны три пары соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ формъ.

Нѣтъ надобности объяснять подробно, почему этому предложенію придается такое важное значеніе. Достаточно сказать, что, только руководясь этимъ предложеніемъ, можно при посредствѣ проективнаго соотвѣтствія перейдти отъ разсмотрѣнія элементарныхъ формъ къ разсмотрѣнію и изученію формъ первой степени болѣе сложныхъ, каковы кривыя линіи. Это понятно для всякаго, кто знакомъ напр. съ синтетическою теоріею коничес-

[1] *Th. Reye*, «Die Geometrie der Lage». 2-te Aufl. Hannover, 1877, p. 45—49.—*G. Darboux*, «Sur le théorème fondamental de la géometrie projective». Math. Annalen, T. XVII, 1880, p. 55.

скихъ сѣченій[1]. Гораздо важнѣе по нашему мнѣнію сдѣлать что нибудь, чтобы внести достаточную ясность и опредѣленность въ имѣющіеся или возможные способы доказательства этого предложенія, которые до сего времени представляютъ слабый пунктъ въ существующихъ изложеніяхъ началъ проективной геометріи.

На этотъ пунктъ обращено было въ послѣднее время вниманіе нѣкоторыхъ геометровъ. Такъ, Феликсъ Клейнъ, одинъ изъ нынѣшнихъ издателей журнала Mathematische Annalen, трактуетъ объ этомъ вопросѣ въ нѣсколькихъ своихъ статьяхъ, помѣщенныхъ въ этомъ журналѣ. Первая изъ нихъ, напечатанная еще въ 1873 году, касается вопроса случайнымъ образомъ и, такъ сказать, мимоходомъ[2]. Тѣмъ не менѣе она содержитъ вполнѣ опредѣленное относительно этого вопроса заключеніе. Вслѣдъ за-тѣмъ на вопросъ было обращено вниманіе другихъ геометровъ, гг. Кантора, Лурота и Цейтена, которые выразили свои мнѣнія въ письмахъ къ г. Клейну и тѣмъ вызвали новую замѣтку послѣдняго, напечатанную въ 1874 году[3]. Къ этой-же замѣткѣ присоединена и часть разсужденій, извлеченныхъ изъ переписки, подъ названіемъ Лурото-Цейтеновскаго доказательства. Наконецъ въ послѣднее время, въ первой тетради выходящаго нынѣ 17 тома Mathematische Annalen появилась новая замѣтка г. Клейна, служащая собственно введеніемъ къ болѣе подробной статьѣ французскаго геометра г. Дарбу, носящей названіе: «Sur le théorème fondamental de la géométrie projective»[4]. Въ этой послѣдней замѣткѣ г. Клейнъ категорически заявляетъ, что ошибался въ преж-

---

[1] *J. Steiner*, «Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch». 2 Aufl., Leipzig, 1876.

[2] *F. Klein*, «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie». Math. Ann. T. VI, 1873, p. 132 и сл.

[3] *F. Klein*, «Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie». Math. Ann. T. VII, 1874, p. 531—537.

[4] *F. Klein*, «Ueber die geometrische Definition der Projetivität auf den Grundgebilden erster Stufe». Math. Ann. T. XVII, 1880, p. 52—54.

нихъ своихъ воззрѣніяхъ, и указываетъ, какъ на причину своего заблужденія, на то, что имъ былъ упущенъ изъ виду точный смыслъ слова опредѣленіе. Заявленіе это г. Клейнъ считаетъ въ настоящее время тѣмъ болѣе необходимымъ, что ошибочное его мнѣніе вошло уже, по его словамъ, въ нѣкоторыя новѣйшія геометрическія сочиненія и чрезъ то угрожаетъ сдѣлаться обще-распространеннымъ.

Намъ извѣстно только одно сочиненіе, на которое въ нѣкоторой мѣрѣ повліяло прежнее воззрѣніе г. Клейна, хотя, можетъ быть, не столь вреднымъ образомъ, какъ того опасается самъ г. Клейнъ. Сочиненіе это — «Geometrie der Lage» страсбургскаго профессора Теодора Рейе. Это весьма распространенный курсъ лекцій по чистой или синтетической геометріи, выдержавшій въ сравнительно непродолжительное время два изданія. Въ первомъ изъ нихъ *основное предложеніе*, о которомъ мы теперь ведемъ рѣчь, доказывается, строго придерживаясь изложенія Штаудта въ его классическомъ сочиненіи, посящемъ то-же заглавіе[1]. Во второмъ же это доказательство замѣнено другимъ, которое г. Рейе заимствовалъ изъ сочиненія г. Томе: «Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage» (*J. Thomae*. Halle, 1873). Въ предисловіи ко второму изданію г. Рейе говоритъ, что сдѣлалъ это измѣненіе во вниманіе къ совершенно справедливымъ возраженіямъ г. Клейна противъ доказательства Штаудта.

Въ виду того, что теперь г. Клейнъ совершенно отказывается отъ своего прежняго мнѣнія, можно было бы ожидать, что въ третьемъ изданіи своей книги г. Рейе снова долженъ будетъ возвратиться къ доказательству Штаудта. Но на самомъ дѣлѣ въ этомъ, кажется, не представится надобности, потому что, какъ увидимъ ниже, доказательство г. Томе отличается отъ до-

---

[1] *G. v. Staudt*, «Geometrie der Lage». Nürnberg, 1847.

казательства Штаудта лишь болѣе подробнымъ и обстоятельнымъ изложеніемъ и оба одинаково вѣрны. Напротивъ, скорѣе можно думать, что послѣдняя замѣтка г. Клейна не есть послѣднее слово, сказанное въ разъясненіе той неясности, которая покрываетъ пока вопросъ. Причина этой неясности лежитъ, вѣроятно, въ трудности и деликатности самаго предмета, а вмѣстѣ съ тѣмъ и въ трудности установить опредѣленную точку зрѣнія на предметъ, по чему-либо болѣе предпочтительную чѣмъ другія.

Что возможны нѣсколько такихъ точекъ зрѣнія, объ этомъ свидѣтельствуетъ большее или меньшее различіе въ воззрѣніяхъ, проводимыхъ въ основныхъ сочиненіяхъ, положившихъ начало систематическому изложенію новой геометріи, каковы произведенія Штейнера, Шаля и Штаудта, а также и въ сочиненіяхъ ихъ строгихъ послѣдователей. Но именно вслѣдствіе этого намъ кажется, что существенно важно выяснить, не существуетъ ли, при всемъ различіи этихъ точекъ зрѣнія, какихъ-либо опредѣленныхъ между ними соотношеній; главное же — разъяснить дѣло на-столько, чтобы было видно, что справедливо и что нѣтъ съ каждой точки зрѣнія въ-отдѣльности.

Мы не задаемъ себѣ задачи представить такое разъясненіе, но попробуемъ сдѣлать краткій обзоръ интересующаго насъ вопроса, на-сколько тому даютъ поводъ упомянутыя статьи г. Клейна. Черезъ это, можетъ быть, обнаружатся опредѣленнѣе тѣ причины, на которыхъ различіе воззрѣній основывается.

§ 2.

Какъ видно изъ указаннаго выше содержанія основного предложенія проективной геометріи, доказательство его должно обусловливаться тѣмъ опредѣленіемъ, съ которымъ проективное соотвѣтствіе вводится въ изученіе.

Вообще соотношенія, такъ-же какъ и предметы, могутъ имѣть разнообразныя свойства, но только тѣ изъ этихъ свойствъ, которыми разсматриваемое соотношеніе характеризуется вполнѣ, т. е. такъ, что всѣ остальныя свойства выводятся какъ ихъ логическія слѣдствія, могутъ быть принимаемы за опредѣленія этихъ соотношеній при ихъ изученіи. Въ большинствѣ случаевъ такихъ характерныхъ свойствъ бываетъ нѣсколько, и это какъ разъ имѣетъ мѣсто для проективнаго соотвѣтствія. Послѣднее допускаетъ, слѣдовательно, нѣсколько опредѣленій.

Прежде чѣмъ указать, въ чемъ состоятъ эти опредѣленія и какое между ними различіе или связь, замѣтимъ, что въ геометріи уже давно различаютъ два рода свойствъ или соотношеній: свойства *метрическія* или количественныя и свойства относительно положенія или *дескриптивныя*[1].

Возникновеніе аналитической геометріи и дальнѣйшее развитіе и обобщеніе ея основныхъ положеній, имѣющихъ такъ или иначе своею точкою опоры понятіе о величинѣ, дало наукѣ превосходное средство для изученія свойствъ перваго рода и внесло въ это изученіе строгую послѣдовательность и систематичность. Вмѣстѣ съ тѣмъ новѣйшіе методы аналитической геометріи являются достаточно сильными не только для доказательства, но и для раскрытія свойствъ второго рода. Вслѣдствіе этого можно было бы признать за великимъ изобрѣтеніемъ Декарта всеобъемлющее по отношенію къ геометрическому ученію значеніе. Но этому признанію должно, намъ кажется, противопоставить то требованіе, которое самымъ необходимымъ образомъ должно соблюдаться въ каждой умозрительной наукѣ. Это требованіе доводитъ все изучаемое до возможно большей простоты. Безъ выполненія этого требованія наука перестанетъ имѣть для человѣческаго ума неувядающую прелесть и свѣжесть и угрожаетъ

[1] Объ этомъ разграниченіи см. напр. у Шаля и Понселе: *M. Chasles*, «Aperçu historique» etc.—2-e edit. 1875. p. 22—23. *J. V. Poncelet*, «Applications d'Analyse et de Géométrie». Paris, 1864. T. II, p. 298—299.

сдѣлаться достояніемъ по преимуществу библіотечныхъ полокъ [1].

Простота въ наукѣ можетъ быть двоякаго рода. Во-первыхъ, та, которая обусловливается употребленіемъ пріемовъ намъ привычныхъ или въ насъ вкоренившихся; будутъ ли эти пріемы спеціальнаго научнаго характера или даже усвоенные нами въ самой обычной повседневной умственной дѣятельности. Это, такъ сказать, простота практическая. Противоположность ей должна составлять простота теоретическая или собственно научная, т. е. та, которая достигается устраненіемъ какъ въ самомъ предметѣ, который мы изучаемъ, такъ и въ тѣхъ путяхъ, по которымъ мы къ нему подходимъ, всего того, что не связано съ нимъ самымъ интимнымъ образомъ и не обусловливается тѣми цѣлями, которыя мы преслѣдуемъ. Короче сказать, это — простота, достигаемая путемъ отвлеченія.

Извѣстно, что математическія науки пользуются репутаціею трудныхъ и въ то-же время простыхъ, и послѣднее свойство, обусловливаемое ихъ отвлеченностью, безъ-сомнѣнія понимается всѣми именно въ смыслѣ простоты теоретической. Требованіе этой-то простоты и должно стоять въ наукѣ на первомъ планѣ. Но какъ-скоро мы вмѣняемъ въ необходимое придерживаться этого требованія, то приходимъ къ заключенію, что изученіе дескриптивныхъ свойствъ должно быть поставлено внѣ зависимости отъ методовъ аналитической геометріи, такъ-какъ послѣдняя не существуетъ безъ понятія о величинѣ и количественныхъ соотношеній, а дескриптивныя свойства съ этими понятіями ничего общаго не имѣютъ. Возникаетъ такимъ образомъ потребность въ сгруппированіи истинъ, относящихся къ дескриптивнымъ свой-

[1] Лапласъ говоритъ: Préférez les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles». См. *Chasles*, «Aperçu historique» etc. p. 234.

ствамъ въ особое цѣлое и въ разработкѣ особыхъ методовъ для раскрытія и изслѣдованія этихъ истинъ.

Стремленіе удовлетворить этой потребности беретъ свое начало еще отъ Дезарга и Паскаля, если не ранѣе. Начертательная геометрія Монжа представляетъ блестящій примѣръ рѣшительнаго успѣха такого стремленія. Позднѣе Понселе, Шаль и Штейнеръ обогатили науку изслѣдованіями, содѣйствовавшими въ значительной степени установленію общихъ чисто геометрическихъ пріемовъ, замѣняющихъ пріемы аналитической геометріи, и дали примѣры строго-научнаго и систематическаго ихъ примѣненія. Наконецъ Штаудтъ изложилъ въ наиболѣе принципіальной формѣ ученіе о дескриптивныхъ свойствахъ, строго исключивъ въ своихъ пріемахъ понятіе о величинѣ и измѣреніи. Книга Штаудта «Geometrie der Lage» по справедливости считается тѣмъ-же самымъ по отношенію къ ученію о дескриптивныхъ свойствахъ, чѣмъ элементы Эвклида являются по отношенію къ геометріи вообще.

Въ настоящее время *геометрія положенія* не только имѣетъ несомнѣнное право на существованіе какъ наука, но и все дальнѣйшее развитіе этого ученія должно основываться на началахъ систематически сгруппированныхъ Штаудтомъ. Сама начертательная геометрія, преслѣдуя болѣе практическія цѣли (какъ *art du trait)*, исходитъ изъ началъ, покоящихся на болѣе отвлеченныхъ основаніяхъ геометріи положенія.

§ 3.

Чтобы окончательно подготовить почву для разсмотрѣнія различныхъ опредѣленій проективнаго соотвѣтствія, которое въ геометріи положенія играетъ первенствующую роль, укажемъ на основанія этого ученія.

Точка, прямая линія и плоскость принимаются за элементы, подлежащіе изученію геометріи положенія. Всякая совокупность этихъ элементовъ есть геометрическая форма. Свойства формъ и соотношенія между ними должны быть, очевидно, слѣдствіями свойствъ и взаимныхъ соотношеній, характеризующихъ элементы.

Каждый элементъ въ-отдѣльности обладаетъ свойствомъ или способностью занимать то или другое положеніе въ пространствѣ. Только различіемъ положенія различаются элементы одного и того-же рода.

Между различными положеніями элементовъ разныхъ родовъ, разсматриваемыхъ совмѣстно, существуетъ особое, въ которомъ они являются *взаимно совмѣщенными*. Таково положеніе точки и прямой, когда первая лежитъ на второй и, слѣдовательно, вторая проходитъ чрезъ первую.

Положеніе каждаго элемента опредѣляется *вполнѣ и единственнымъ образомъ* положеніемъ нѣсколькихъ элементовъ съ нимъ совмѣщенныхъ. Такъ, прямая опредѣляется двумя совмѣщенными съ ней точками, плоскость тремя точками, точка тремя плоскостями и т. д.

Та взаимность, которая существуетъ, или можетъ существовать при нѣкоторыхъ условіяхъ, между разнородными элементами по отношенію къ ихъ опредѣляемости однихъ чрезъ другія посредствомъ совмѣщенія, есть коренная причина общаго *закона двойственности* или взаимности, господствующаго надъ всею областью геометріи положенія.

Понятіе о совмѣщеніи разнородныхъ элементовъ служитъ кромѣ того основаніемъ для опредѣленія простѣйшихъ или основныхъ геометрическихъ формъ, за каковыя принимаютъ совокупности всѣхъ элементовъ одного или двухъ родовъ совмѣщенныхъ съ однимъ элементомъ инаго рода. Таковы такъ называемыя формы первой степени, о которыхъ намъ только и придется говорить ниже. Именно: 1) *рядъ точекъ*, т. е. совокупность точекъ, лежащихъ на одной прямой; 2) *пучекъ прямыхъ*, т. е. совокупность прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну точку и лежащихъ въ одной плоскости, и 3) *пучекъ плоскостей*, т. е. совокупность плоскостей, проходящихъ чрезъ одну прямую.

§ 4.

Каждый элементъ мы можемъ представлять въ своемъ воображеніи или имѣющимъ опредѣленное положеніе въ пространствѣ, или измѣняющимъ это положеніе, т. е. перемѣщающимся.

Въ механикѣ перемѣщеніе или движеніе разсматривается въ зависимости отъ времени. Но, очевидно, мы можемъ отвлечься, если не отъ самаго существованія этой зависимости, то во всякомъ случаѣ отъ представленія какой-либо ея формы. Перемѣщеніе въ такомъ отвлеченномъ видѣ есть несомнѣнно одно изъ основныхъ понятій геометріи, и оно на-столько просто и естественно, что почти во всѣхъ систематическихъ трактатахъ по геометріи входитъ или въ самую формулировку вопросовъ и предложеній, или въ разсужденія, служащія для доказательства и разъясненій[1].

Отвлекаясь отъ зависимости перемѣщенія отъ времени, мы едва-ли можемъ и, во всякомъ случаѣ, не имѣемъ никакой надобности отвлекаться отъ такихъ свойствъ перемѣщенія какъ *непрерывность*, которая сама по себѣ также не обусловливается формою этой зависимости. Если какой-либо элементъ, напр. точка, перемѣщается изъ положенія A въ положеніе B, то непремѣнно въ пространствѣ долженъ существовать путь, по которому это перемѣщеніе совершилось или можетъ совершиться;

---

[1] Вотъ что говоритъ объ этомъ извѣстный французскій геометръ *J. Houel*, «L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du *mouvement géométrique*, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue... Il est avantageux d'introduire cette idée du mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage.... (см. «Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire». Paris. 1867, p. 60).

и каковы бы ни были прочіе признаки этого пути, долженъ существовать тотъ признакъ или та особенность, что положенія на немъ элемента, промежуточныя относительно A и B, представляютъ такъ-называемую непрерывную послѣдовательность. Иначе намъ пришлось бы допустить, что элементъ можетъ при перемѣщеніи уничтожаться или, другими словами, выходить изъ пространства и снова появляться въ немъ.

Какъ-скоро мы допускаемъ въ геометріи непрерывное перемѣщеніе элемента изъ положенія A въ положеніе B, то мы не можемъ отрицать возможности и обратнаго перемѣщенія изъ B въ A, имѣющаго всѣ тѣ-же признаки и отличающагося отъ перваго перемѣщенія только тѣмъ, что промежуточныя положенія смѣняются въ немъ въ обратной послѣдовательности. Такимъ образомъ ставится на видъ понятіе о двухъ противоположныхъ направленіяхъ непрерывнаго перемѣщенія.

Все, что сейчасъ сказано, служитъ не для того, чтобы дать опредѣленія такимъ понятіямъ какъ *перемѣщеніе*, его *непрерывность* и два различныя *направленія*, а лишь какъ разъясненіе, что эти понятія имѣютъ свое естественное мѣсто въ геометріи и, будучи въ ней употребляемы или какъ предметъ, или какъ средство изученія, должны быть предварительно по крайней-мѣрѣ указаны съ точностью и опредѣленностью. Относительно же опредѣленій нужно по этому случаю припомнить, что они имѣютъ вообще цѣлью лишь установленіе одинаковости пониманія у людей, обсуждающихъ одинъ и тотъ-же предметъ, и нужны лишь для болѣе или менѣе сложныхъ и искусственныхъ комбинацій. Вещи же на-столько простыя и естественныя, что одно наименованіе ихъ возбуждаетъ во всѣхъ одинаковое представленіе, въ опредѣленіяхъ не нуждаются [1].

---

[1] Не слѣдуетъ, однако, злоупотреблять этимъ правиломъ. Въ строго научномъ изложеніи число понятій, допускаемыхъ безъ опредѣленія, должно быть доведено до возможнаго minimum'а, и только тѣ изъ такихъ понятій могутъ

§ 5.

Въ числѣ геометрическихъ формъ, состоящихъ изъ совокупностей элементовъ одного рода, очевидно, могутъ быть такія, элементы которыхъ могутъ быть разсматриваемы какъ послѣдовательныя положенія одного и того-же непрерывно перемѣщающагося элемента. Формы эти въ отличіе отъ другихъ, необладающихъ тѣмъ-же свойствомъ, можно называть *непрерывными*. Къ числу такихъ принадлежатъ и названныя выше основныя формы первой степени.

Непрерывность формъ первой степени (наприм. линій), разсматриваемая съ такой точки зрѣнія, не имѣетъ ничего общаго съ понятіемъ о величинѣ и измѣреніи и, слѣдовательно, нѣтъ никакого основанія устранять ее при разсмотрѣніи этихъ формъ въ геометріи положенія.

Аналитическая геометрія, ставя въ свое основаніе опредѣленіе положенія посредствомъ величинъ, тѣмъ самымъ и непрерывность геометрическихъ формъ (напр. ряда точекъ на прямой), ставитъ въ зависимость отъ непрерывности, приписываемой ряду чиселъ. Послѣдняя можетъ быть понимаема не иначе, какъ въ смыслѣ безпредѣльной возможности заполнять числами промежутки въ какомъ бы ни было разсѣянномъ числовомъ ряду (напр. въ натуральномъ рядѣ цѣлыхъ чиселъ).

Такое пониманіе непрерывности можно перенести и на всякую геометрическую форму первой степени. При этомъ самое заполненіе формы, исходя изъ разсѣяннаго ряда элементовъ, возможно и безъ понятія о величинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ одного только понятія о совмѣщеніи разнородныхъ элементовъ и ихъ опредѣляемости одни чрезъ другія выясняется, какъ извѣстно, возможность по даннымъ тремъ элементамъ фор-

---

быть допускаемы вновь, которыя, по своей разнородности съ прежними, никакимъ образомъ чрезъ нихъ опредѣлены быть не могутъ.

мы первой степени находить построеніемъ (полнаго четыреугольника) въ промежуткѣ между каждыми двумя изъ нихъ еще одинъ элементъ, составляющій съ данными такъ-называемую *гармоническую группу.* Принимая вновь построенные элементы за данные и повторяя неопредѣленное число разъ такое построеніе *четвертаго гармоническаго* элемента, можно, слѣдовательно, безпредѣльно заполнять промежутокъ между двумя какими бы ни было изъ нихъ.

Такимъ образомъ получается рядъ элементовъ непрерывный въ такомъ-же смыслѣ какъ и рядъ чиселъ. Но для признанія, что этотъ рядъ, получаемый такимъ безпредѣльнымъ заполненіемъ, есть совершенно тотъ-же какъ и описываемый непрерывнымъ движеніемъ (что въ немъ не будетъ недоставать ни одного элемента, имѣющагося въ послѣднемъ), нѣтъ никакихъ геометрическихъ основаній.

Въ дифференціальномъ исчисленіи и раціональной механикѣ, по-видимому, признается тождество этихъ рядовъ, но на самомъ дѣлѣ это дѣлается только условно. Дѣйствительно, рядъ точекъ считается въ дифференціальномъ исчисленіи непрерывнымъ, когда разстояніе между послѣдовательными точками есть величина скольугодномалая. Это есть понятіе, устанавливаемое искусственно и условно (vérité de définition), тогда какъ понятіе о непрерывности при движеніи внушается намъ непосредственнымъ ощущеніемъ (vérité de sentiment). Первое имѣетъ мѣсто лишь постольку, по-скольку оно не противорѣчитъ второму, и дается въ такой формѣ лишь для того, чтобы быть пригоднымъ для цѣлей вычисленія. Второе же совершенно независимо отъ перваго.

§ 6.

Одно только понятіе о совмѣщеніи разнородныхъ элементовъ позволяетъ при разсмотрѣніи двухъ разнородныхъ формъ первой степени усматривать между ними опредѣленную зависимость, состоящую въ томъ, что каждому элементу одной формы соотвѣтствуетъ совмѣщенный съ нимъ элементъ другой, и обратно. Такъ, напр., если двѣ разсматриваемыя формы первой степени суть рядъ точекъ на прямой L и пучекъ прямыхъ O, лежащихъ съ этимъ рядомъ въ одной плоскости, то каждой точкѣ ряда L будетъ соотвѣтствовать лучъ пучка O, проходящій чрезъ эту точку, и каждому лучу пучка O будетъ соотвѣтствовать точка ряда L, на немъ лежащая. (Предполагается, конечно, что центръ пучка O и основаніе ряда L не совмѣщены между собою).

Опредѣленіе по элементамъ какой-нибудь изъ основныхъ формъ первой степени совмѣщенныхъ съ ними элементовъ другой такой же формы (но разнородной съ первою) г. Кремона называетъ *элементарною геометрическою операціей*[1]. Такъ, если мы имѣемъ рядъ точекъ на прямой L и точку O внѣ этого ряда, то опредѣленіе прямыхъ, проходящихъ чрезъ O и чрезъ различныя точки ряда L, будетъ элементарная геометрическая операція, производимая надъ рядомъ и называемая проектированіемъ этого ряда. Если имѣемъ пучекъ прямыхъ O, лежащихъ въ одной плоскости, и прямую L, не принадлежащую къ числу его лучей, но лежащую въ той-же плоскости, то опредѣленіе точекъ прямой L, лежащихъ на различныхъ лучахъ пучка O, будетъ элементарная геометрическая операція, производимая надъ пучкомъ и называемая сѣченіемъ этого пучка и т. п.

Изъ сказаннаго видимъ, что указанною сейчасъ зависимостью между двумя разнородными формами связаны всякія двѣ формы, изъ которыхъ одна получается какъ результатъ какой-либо элементарной геометрической операціи надъ другою. Надъ такимъ результатомъ можно произвести вновь элементарную геометрическую операцію, за-тѣмъ надъ результатомъ этой по-

[1] *L. Cremona*, «Elementi di Geometria projettiva». Roma, 1873, p. 1—2.

слѣдней и т. д. Такимъ образомъ получается рядъ геометрическихъ формъ первой степени, изъ которыхъ каждая промежуточная связана указанною зависимостью съ предыдущею и послѣдующею, а чрезъ то первая форма со всѣми остальными до послѣдней включительно.

Устанавливаемая такимъ образомъ посредствомъ ряда элементарныхъ операцій зависимость можетъ имѣть мѣсто и между формами одного и того-же рода и даже совпадающими. Такъ, наприм., можно установить такимъ путемъ зависимость между точками одной и той-же прямой, предполагая, слѣдовательно, что на этой прямой мы имѣемъ два ряда, такъ-что каждая ея точка можетъ быть разсматриваема какъ принадлежащая или одному или другому изъ нихъ.

Зависимость, получаемая такимъ чисто геометрическимъ путемъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленный характеръ или есть зависимость достаточно опредѣленная для того, чтобы быть предметомъ изученія. Другими словами, указанное геометрическое происхожденіе этой зависимости можно принять въ геометріи положенія за ея опредѣленіе, что и дѣлаютъ въ своихъ курсахъ гг. Томе и Кремона[1].

По причинѣ, конечно, одного изъ видовъ геометрическихъ операцій (проектированіе), дающихъ происхожденіе этой зависимости, она и носитъ названіе **проективнаго соотвѣтствія**.

§ 7.

Соотвѣтствіе это обладаетъ слѣдующими тремя свойствами, которыя весьма легко обнаруживаются изъ указаннаго его геометрическаго происхожденія и сами суть чисто геометрическія.

1. Каждому элементу одной изъ формъ соотвѣтствуетъ единственный элементъ другой (однозначность соотвѣтствія).

---

[1] См. *J. Thomae*, «Ebene geom. Gebilde» etc. p. 11, n⁰ 44. — *L. Cremona* «Elementi di Geometria projettiva». p. 20—21, n⁰ 34.

2. Непрерывно перемѣщающемуся элементу одной формы соотвѣтствуетъ въ другой также непрерывно перемѣщающійся элементъ (непрерывность соотвѣтствія).

3. Всякимъ четыремъ элементамъ, составляющимъ гармоническую группу въ одной формѣ, соотвѣтствуетъ также гармоническая группа элементовъ въ другой (гармоничность соотвѣтствія).

Эти свойства не зависятъ ни отъ числа геометрическихъ операцій, употребляемыхъ для установленія соотвѣтствія, ни отъ рода ихъ. Изъ нихъ первыя два обнаруживаются, такъ сказать, непосредственно. Послѣднее же легко доказывается при помощи такъ называемаго полнаго четыреугольника (или четырехсторонника), изъ котораго и получается геометрическое понятіе о гармонической группѣ, и такъ называемой теоремы о гомологическихъ треугольникахъ, которая въ свою очередь легко доказывается на основаніи только понятія о совмѣщеніи элементовъ[1].

Намъ кажется, что приведенныя три свойства можно считать основными свойствами проективнаго соотвѣтствія, такъ-какъ, пользуясь только ими одними, можно вывести всѣ остальныя геометрическія свойства этой зависимости; напр., изъ двухъ первыхъ свойствъ слѣдуетъ, что если вообразимъ, что элементъ одной формы движется, не измѣняя направленія, то и соотвѣтствующій элементъ другой формы долженъ двигаться такимъ-же образомъ. Отсюда заключаемъ, что если соотвѣтственныя формы суть однородныя и совмѣщенныя (напр. два ряда точекъ на одной прямой), то возможны два случая: 1) когда элементы обѣихъ формъ перемѣщаются въ одномъ и томъ-же направленіи, и 2) когда они перемѣщаются въ противоположныхъ направленіяхъ. Штейнеръ называетъ въ первомъ случаѣ формы согласно

[1] *J. V. Poncelet*, «Traité des propriétés projectives des figures». 2-e éd. T. I. 1865, p. 85—86, n⁰ 168. — См. ниже § 14.

направленными (gleichlaufende), а во второмъ противоположно направленными (ungleichlaufende) [1]. Извѣстно, что въ рукахъ этого искуснаго геометра различеніе этихъ двухъ случаевъ и подробное ихъ разсмотрѣніе является весьма плодовитымъ геометрическимъ пріемомъ.

Кромѣ указанныхъ свойствъ проективнаго соотвѣтствія существуютъ еще такія, которыя также имѣютъ значеніе основныхъ свойствъ, но должны быть исключены изъ области геометріи положенія, такъ-какъ представляютъ зависимости метрическія (основанныя на измѣреніи). Таково равенство такъ называемыхъ **сложныхъ** или **ангармоническихъ отношеній** каждой произвольно взятой группы четырехъ элементовъ одной формы и четырехъ соотвѣтственныхъ элементовъ другой.

Шаль принимаетъ это свойство за опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія, которое онъ называетъ **гомографическимъ** [2].

Штейнеръ и затѣмъ Кремона хотя и не возводятъ это свойство въ опредѣленіе, но тѣмъ не менѣе находятъ необходимымъ подробно его разсматривать, и основываютъ на немъ доказательство основного предложенія проективной геометріи, т. е. опредѣляемости проективнаго соотвѣтствія посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ.

Нужно думать, что Штейнеръ не нашелъ возможности доказать это предложеніе чисто геометрически, такъ-какъ сложное отношеніе не находитъ во всемъ дальнѣйшемъ развитіи его ученія никакого болѣе или менѣе важнаго примѣненія къ выводу метрическихъ свойствъ, какъ это имѣетъ мѣсто у Шаля, а служитъ не болѣе какъ символомъ для обозначенія проективной зависимости.

---

[1] *J. Steiner*, «Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch.». 2-e Aufl., 1876, p. 39, § 14.

[2] *M. Chasles*, «Traité de Géométrie supérieure». 2-e éd., Paris, 1880, p. 64, nº 103.

§ 8.

Штаудту принадлежитъ первое и, можно сказать, единственное имѣющееся до сихъ поръ геометрическое доказательство основного предложенія. Но прежде, чѣмъ дать это доказательство, онъ счелъ нужнымъ принять за опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія третье изъ указанныхъ нами основныхъ свойствъ его.

«Двѣ формы первой степени, говоритъ онъ, называются проективными, когда онѣ связаны такимъ соотвѣтствіемъ, что всякой гармонической группѣ одной формы соотвѣтствуетъ гармоническая же группа въ другой»[1].

Это-то опредѣленіе, которое г. Рейе повторяетъ буквально въ обоихъ изданіяхъ своей названной выше книги, г. Клейнъ находитъ недостаточнымъ и, намъ кажется, имѣетъ для этого основаніе. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы опредѣленіе Штаудта было достаточно, то изъ него одного должны бы были получаться всѣ остальныя свойства проективнаго соотвѣтствія, а въ томъ числѣ и основное предложеніе объ опредѣляемости этого соотвѣтствія посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ. Но если мы имѣемъ, напр., два ряда точекъ, при чемъ даны три пары соотвѣтственныхъ точекъ, то на основаніи опредѣленія Штаудта можно заключить о соотвѣтствіи только тѣхъ точекъ обоихъ рядовъ, которыя какъ въ томъ, такъ и въ другомъ рядѣ могутъ быть получаемы какъ четвертыя гармоническія къ тремъ даннымъ или къ какимъ-либо уже опредѣленнымъ этимъ способомъ точкамъ. Всѣ эти точки г. Клейнъ называетъ *раціональными*, и мы видѣли, что не существуетъ никакихъ геометрическихъ основаній признать совокупность всѣхъ такихъ точекъ тождественною съ непрерывнымъ рядомъ положеній перемѣщающейся по прямой точки. Аналитическія соображенія по-

---

[1] *Staudt*, «Geometrie der Lage», p. 49, § 9.

казываютъ, напротивъ, что должны существовать на прямыхъ *нераціональныя* точки, т. е. такія, которыя послѣдовательными построеніями четвертыхъ гармоническихъ, исходя изъ трехъ данныхъ, получены быть не могутъ, сколько бы разъ и въ какой бы послѣдовательности эти построенія ни повторялись.

Объ этихъ-то точкахъ на основаніи одного только опредѣленія Штаудта и нельзя сдѣлать никакого заключенія, т. е. нельзя сказать, что тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ устанавливается соотвѣтствіе и между нераціональными относительно ихъ точками. Слѣдовательно, исходя изъ опредѣленія Штаудта, нельзя доказать основного предложенія во всей его общности.

§ 9.

Г. Клейнъ полагаетъ, что недостаточность опредѣленія Штаудта можетъ быть восполнена введеніемъ въ геометрію понятія о предѣлахъ, при чемъ каждая нераціональная точка должна быть разсматриваема какъ предѣлъ, къ которому стремится послѣдовательность раціональныхъ точекъ, получаемыхъ опредѣленнымъ періодически повторяющимся построеніемъ, и хотя при конечномъ числѣ повтореній этого построенія предѣльная точка получена быть не можетъ, тѣмъ не менѣе она должна считаться опредѣленною и извѣстною, какъ скоро будетъ таковымъ законъ повторяемости построенія.

Такое дополненіе, заимствованное прямо изъ отвлеченнаго анализа, едва-ли можетъ быть допущено въ геометріи положенія и притомъ безъ доказательства, какъ того требуетъ г. Клейнъ. Для того, чтобы быть аксіоматическимъ, оно слишкомъ искусственно и сложно. Да и самое раздѣленіе точекъ на раціональныя и нераціональныя не имѣетъ достаточно основаній въ однихъ лишь геометрическихъ соображеніяхъ.

Поэтому естественно, что геометры, обсуждавшіе тотъ-же вопросъ (Луротъ, Цейтенъ и Дарбу), старались обойтись безъ этого дополненія. Но въ-замѣнъ того они вводятъ въ свои разсужденія, не дѣлая явнаго на то указанія, другое дополнительное допущеніе, которое также молча дѣлаетъ и Штаудтъ, но котораго г. Клейнъ въ первоначальныхъ своихъ воззрѣніяхъ систематически избѣгаетъ. Это допущеніе есть не что иное, какъ признаніе второго изъ указанныхъ выше основныхъ свойствъ проективнаго соотвѣтствія, т. е. его непрерывности.

По-видимому, Штаудтъ считалъ это свойство на-столько необходимымъ и естественнымъ, что не нашелъ нужнымъ даже упоминать о немъ, а между-тѣмъ именно это-то умалчиваніе и подало поводъ считать недостаточнымъ данное имъ доказательство основного предложенія [1].

§ 10.

Что доказательство Штаудта при допущеніи непрерывности проективнаго соотвѣтствія становится совершенно строгимъ, можно видѣть изъ слѣдуюшихъ соображеній.

Извѣстно, что опредѣляемость проективнаго соотвѣтствія посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ есть прямое и необходимое слѣдствіе слѣдующаго предложенія, имѣющаго болѣе частный характеръ.

Если два ряда точекъ, связанные проективнымъ соотвѣтствіемъ, находятся на одной прямой и имѣютъ три точки двойныя, т. е. такія, которыя суть сами себѣ соотвѣтствующія, то и всѣ остальныя точки прямой должны быть также двойныя.

Положимъ, что A есть двойная точка, и вообразимъ, что точка одного ряда движется непрерывно по прямой, начиная отъ

---

[1] Говоря объ этомъ предложеніи въ письмѣ къ г. Клейну, г. Darboux замѣчаетъ: C'est de ce théorème que v. Staudt donne, dans sa *Geometrie der Lage*, une démonstration que tout le monde avec vous s'accorde à regarder comme incomplète.—Mathematische Annalen. T. XVII, p. 53.

A. Соотвѣтствующая ей точка другого ряда будетъ двигаться также непрерывно, начиная отъ *A*. При этомъ возможны, очевидно, только два случая; 1) когда обѣ соотвѣтственныя точки, выйдя изъ положенія *A*, будутъ двигаться, не расходясь, т. е. оставаясь совпавшими, до нѣкоторой точки *B*; такъ что всѣ точки отрѣзка *AB* будутъ двойныя, и 2) когда обѣ соотвѣтственныя точки, въ какихъ бы направленіяхъ онѣ ни двигались, раздѣлятся, выйдя изъ *A*, и сойдутся вновь въ нѣкоторой точкѣ *B*; такъ-что внутри отрѣзка *AB* не будетъ ни одной двойной точки. Точки *A* и *B* будутъ въ послѣднемъ случаѣ двѣ послѣдовательныя двойныя точки.

Такъ-какъ при движеніи точки отъ *A* до *B* внутри этого отрѣзка точка, дѣлящая съ нею этотъ отрѣзокъ гармонически, принимаетъ послѣдовательно всѣ возможныя положенія внѣ его, то заключаемъ, что въ первомъ изъ названныхъ случаевъ всѣ точки прямой будутъ двойныя, а во второмъ кромѣ точекъ *A* и *B* не будетъ существовать двойныхъ точекъ ни внутри, ни внѣ отрѣзка *AB*; слѣдовательно при существованіи трехъ различныхъ двойныхъ точекъ можетъ имѣть мѣсто только первый случай, что и требовалось доказать.

Разсужденія эти представляютъ не что иное какъ воспроизведеніе доказательства Штаудта съ тою только разницей, что въ нашемъ изложеніи указано, какимъ образомъ возможность только двухъ случаевъ проистекаетъ изъ непрерывности перемѣщенія обѣихъ соотвѣтственныхъ точекъ, а въ изложеніи Штаудта эта непрерывность подразумѣвается. Что это дѣйствительно такъ, слѣдуетъ изъ того, что Штаудтъ называетъ во второмъ случаѣ двойныя точки *A* и *B* *послѣдовательными;* признаніе же ихъ таковыми можетъ имѣть мѣсто не иначе какъ при допущеніи возможности прослѣдить оба ряда отъ *A* до *B* непрерывно[1].

[1] *Staudt*, «Geometrie der Lage» p. 50, n. 106.

То-же самое различіе съ доказательствомъ Штаудта представляетъ и доказательство г. Томе, которое, какъ замѣчено выше, г. Рейе предпочитаетъ во второмъ изданіи своей геометріи положенія. Только у г. Томе слѣдствія, проистекающія изъ разсмотрѣнія соотвѣтственныхъ точекъ въ состояніи непрерывнаго перемѣщенія, обсуждаются еще съ большею подробностью, чѣмъ это сдѣлано нами[1].

Изъ сказаннаго можемъ заключить, что основное предложеніе геометріи положенія есть необходимое слѣдствіе двухъ послѣднихъ основныхъ свойствъ проективнаго соотвѣтствія, и допущеніе несправедливости этого предложенія должно быть въ противорѣчіи по крайней мѣрѣ съ однимъ изъ нихъ. Такъ-какъ сверхъ того оба эти свойства между собою нисколько независимы, то и понятно, что упущеніе изъ вида одного изъ нихъ не можетъ не отозваться вреднымъ образомъ на строгости вывода самаго слѣдствія.

§ 11.

Чтобы объяснить, какимъ образомъ могло произойти, что г. Клейнъ, находя сперва необходимымъ восполнить недостаточность опредѣленія Штаудта особымъ дополненіемъ аксіоматическаго характера, впослѣдствіи пришелъ къ заключенію о возможности замѣнить это дополненіе разсужденіями гг. Лурота, Цейтена и Дарбу, которыя такого характера не имѣютъ, позволимъ себѣ выразить слѣдующія соображенія.

Первоначально г. Клейнъ, какъ мы замѣтили выше, совершенно отвлекался въ своихъ сужденіяхъ отъ непрерывности проективнаго соотвѣтствія, и потому понятно, что неполнота въ опредѣленіи Штаудта не могла быть имъ незамѣчена. Но, придерживаясь того направленія, которое дается пріемами аналитической геометріи, онъ тѣмъ самымъ создалъ кругъ идей, въ

[1] J. *Thomae*, «Ebene geometrische Gebilde» etc. p. 12, n⁰ 48.

которомъ самый вопросъ о проективномъ соотвѣтствіи становился уже на второй планъ. На первомъ же планѣ являлся вопросъ о разъясненіи соотношенія между раціональными и нераціональными точками съ точки зрѣнія геометріи положенія.

Оставаясь въ этомъ кругѣ идей, гг. Луротъ и Цейтенъ доказали, принимая во вниманіе непрерывность зависимости между двумя перемѣщающимися точками одной и той-же гармонической группы, что между всякими двумя точками прямой можетъ быть взята раціональная точка, *или, другими словами, что* посредствомъ построенія ряда четвертыхъ гармоническихъ, исходя изъ трехъ данныхъ точекъ, можно получить точку внутри всякаго произвольно взятаго отрѣзка. Отсюда, однако, доказательство основного предложенія еще не получается *непосредственно.* Остается сдѣлать одинъ шагъ, который, хотя и не совсѣмъ вѣрно, дѣлаетъ г. Дарбу, прибѣгая при этомъ также къ геометрической непрерывности[1].

Какъ ни трудно вообще указать тѣ данныя, изъ которыхъ слагается направленіе идей каждаго мыслителя, но въ настоящемъ *случаѣ, намъ кажется,* можно предполагать съ большою вѣроятностью, что перемѣна мнѣнія г. Клейна на основаніи разсужденій гг. Лурота, Цейтена и Дарбу произошла только по*тому,* что эти *разсужденія основываются* на понятіи о непрерывности соотвѣтствія, котораго недоставало въ прежнихъ сужденіяхъ г. Клейна. Признавая правильность этихъ дополнительныхъ соображеній, г. Клейнъ съ тѣмъ вмѣстѣ вноситъ въ свои сужденія то, отъ чего отвлекался прежде. Если-бы онъ съ са-

[1] Неточность въ разсужденіяхъ г. Дарбу заключается въ томъ, что онъ совершенно произвольно принимаетъ двѣ соотвѣтственныя точки x и x', изъ которыхъ x принадлежитъ первому ряду, а x' второму, за соотвѣтственныя и въ обратномъ смыслѣ, т. е. полагая, что x' есть точка перваго ряда, а x второго (См. «Mathem. Annalen», T. XVII, p. 59). Посредствомъ незначительнаго измѣненія доказательства неточность эта можетъ быть устранена.

маго начала принялъ во вниманіе неизбѣжность понятія о геометрической непрерывности, то всѣ остальныя дополненія оказались бы излишними, такъ-какъ относительно строгости доказательства Штаудта не могло бы и возникнуть сомнѣнія.

Во второй своей статьѣ г. Клейнъ хотя и признаетъ, что то, чего недостаетъ въ опредѣленіи Штаудта, есть, собственно говоря, констатированіе непрерывности проективнаго соотвѣтствія, но придаетъ этому свойству слѣдующую весьма искусственную формулировку. *Четыремъ элементамъ, расположеннымъ въ одной формѣ въ опредѣленномъ порядкѣ, должны соотвѣтствовать въ другой формѣ четыре элемента, расположенные въ такомъ-же порядкѣ*[1]. Очевидно, что это есть только слѣдствіе того понятія о непрерывности, которое внушается намъ при разсмотрѣніи соотвѣтствующихъ элементовъ въ состояніи движенія, и при томъ слѣдствіе не на-столько полное, чтобы могло совершенно замѣнять это понятіе. Вмѣстѣ съ тѣмъ оно не достаточно просто и наглядно, чтобы быть принятымъ за аксіому.

§ 12.

Было замѣчено выше, что гг. Томе и Кремона принимаютъ за опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія самое геометрическое происхожденіе этой зависимости, т. е. называютъ проективною ту зависимость, которая устанавливается между двумя формами первой степени посредствомъ ряда элементарныхъ геометрическихъ операцій. Намъ кажется, что такая точка зрѣнія есть наиболѣе правильная. Въ самомъ дѣлѣ, прямой смыслъ слова «опредѣленіе» вовсе не требуетъ, чтобы оно давалось всегда посредствомъ фразъ и притомъ въ болѣе или менѣе закругленной формѣ. Въ отвлеченномъ анализѣ мѣсто фразъ могутъ заступать символы, въ геометріи — построенія. Вообще самое необхо-

[1] См. «Mathemat. Annalen». T. VII, p. 537.

димое и важное въ опредѣленіи—это, чтобы въ немъ указывалось точно и ясно, какимъ образомъ новое понятіе получается какъ комбинація понятій уже принятыхъ.

Опредѣленіе гг. Томе и Кремона этому требованію удовлетворяетъ вполнѣ. Сверхъ того оно имѣетъ преимущество въ смыслѣ естественности и наглядности и изъ него самымъ простымъ образомъ обнаруживаются три основныя свойства проективнаго соотвѣтствія и усматривается независимость этихъ свойствъ отъ рода и числа элементарныхъ операцій, посредствомъ которыхъ соотвѣтствіе устанавливается. Лишь позднѣе, когда изъ двухъ послѣднихъ основныхъ свойствъ выводится способомъ Штаудта основное предложеніе проективной геометріи и чрезъ то обнаруживается, что изъ нихъ однихъ могутъ быть выводимы всѣ остальныя свойства проективнаго соотвѣтствія,— является возможность и на совокупность этихъ двухъ свойствъ смотрѣть такъ-же, какъ на опредѣленіе этой зависимости, ибо одно и то-же понятіе можетъ, какъ мы замѣчали выше, имѣть нѣсколько опредѣленій.

Намъ кажется, что именно уклоненіе Штаудта отъ этого естественнаго пути, котораго онъ строго держался въ своей книгѣ до 9 параграфа, и породило то недоразумѣніе, которое служитъ предметомъ настоящаго разъясненія.

§ 13.

Изъ всего сказаннаго видимъ, на-сколько важно при изложеніи началъ проективной или чистой геометріи, чтобы каждое понятіе было указано въ своемъ мѣстѣ и каждое опредѣленіе давалось въ извѣстной, обусловливаемой послѣдовательнымъ развитіемъ идей, формѣ. Даже самыя простыя и естественныя понятія не должны быть проходимы молчаніемъ, ибо уже то одно, что такія понятія не всегда возможно устранить, требуетъ, чтобы къ проявленію ихъ въ нашихъ разсужденіяхъ мы относились самымъ внимательнымъ образомъ.

Въ общихъ чертахъ вотъ та послѣдовательность, которой по нашему мнѣнію было бы полезно держаться при изложеніи началъ проективной геометріи.

Прежде всего слѣдуетъ указать съ возможною точностью и опредѣленностью на тѣ основныя понятія, которыя допускаются безъ опредѣленія. Таковы суть: 1) геометрическіе элементы; 2) ихъ совмѣщеніе и взаимная опредѣляемость; 3) перемѣщеніе элементовъ и его непрерывность.

Затѣмъ даются опредѣленія: 1) основныхъ формъ; 2) гармоническихъ группъ; 3) элементарныхъ геометрическихъ операцій.

Всѣ эти понятія представляютъ уже достаточный матеріалъ, съ которымъ можно приступить къ изученію проективнаго соотвѣтствія. Послѣднее должно быть опредѣляемо сперва посредствомъ элементарныхъ геометрическихъ операцій, и на основаніи этого опредѣленія выводятся три основныя свойства этой зависимости.

Выводъ основного предложенія объ опредѣляемости проективнаго соотвѣтствія тремя парами соотвѣтственныхъ элементовъ долженъ окончательно подготовить почву для изученія этой зависимости, для чего должна быть также обнаружена возможность нѣсколькихъ ея опредѣленій.

Все дальнѣйшее изложеніе посвящается раскрытію и сопоставленію свойствъ проективной зависимости и обусловливается, конечно, тѣми требованіями, какія могутъ быть поставлены въ отношеніи къ объему излагаемаго предмета.

§ 14.

Все сказанное выше даетъ намъ поводъ сдѣлать одно замѣчаніе о видимомъ сходствѣ и въ то-же время существенномъ различіи двухъ предложеній, изъ которыхъ каждое играетъ въ геометріи положенія чрезвычайно важную роль. Первое изъ этихъ предложеній есть упомянутая выше теорема о гомологическихъ треугольникахъ. Она дается обыкновенно въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

1) *Если два треугольника расположены на плоскости такъ, что три прямыя, соединяющія по-парно ихъ вершины, сходятся въ одной точкѣ, то три точки, въ которыхъ пересѣкаются соотвѣтственно ихъ стороны, лежатъ на одной прямой.*

2) *Если два треугольника расположены на плоскости такъ, что три точки, въ которыхъ пересѣкаются по-парно ихъ стороны, лежатъ на одной прямой, то три прямыя, соединяющія соотвѣтственно ихъ вершины, сходятся въ одной точкѣ.*

Въ обоихъ этихъ видахъ предложеніе относится къ одной и той-же фигурѣ, составленной изъ десяти прямыхъ и десяти точекъ. Эти прямыя суть шесть сторонъ треугольниковъ, три прямыя, соединяющія ихъ вершины, и одна прямая, проходящая чрезъ точки пересѣченія сторонъ. Точки же суть пересѣченія этихъ прямыхъ по три и сами лежатъ по три на каждой прямой. Самое свойство фигуры, о которомъ идетъ рѣчь въ предложеніи, состоитъ собственно въ существованіи однообразія въ расположеніи элементовъ фигуры по отношенію другъ къ другу, однообразія, выражающагося въ томъ, что каждый элементъ одного рода находится въ совмѣщеніи съ тремя элементами другого рода.

Справедливость этого предложенія обнаруживается проще всего изъ того, что на фигуру, къ которой оно относится, можно смотрѣть какъ на проекцію на плоскости подобной же пространственной фигуры, состоящей изъ десяти прямыхъ, въ которыхъ пять произвольно взятыхъ плоскостей пересѣкаются между собою сочетаясь всѣми способами по двѣ, и десяти точекъ, въ которыхъ эти плоскости пересѣкаются, сочетаясь по три. Для этой-же пространственной фигуры названное выше свойство обнаруживается само собою, какъ необходимое слѣдствіе однихъ только понятій о совмѣщеніи геометрическихъ элементовъ и ихъ взаимной опредѣляемости.

Итакъ, теорема о гомологическихъ треугольникахъ, которую можно также назвать теоремою о десяти точкахъ и десяти прямыхъ, доказывается на основаніи самыхъ первичныхъ понятій геометріи, не прибѣгая даже къ понятію о перемѣщеніи и его непрерывности.

Обратимся теперь къ другому интересующему насъ предложенію. Оно есть частный случай извѣстной теоремы Паскаля и состоитъ въ слѣдующемъ:

Если вершины шестиугольника расположены на двухъ прямыхъ, при чемъ ни одна изъ сторонъ не совпадаетъ съ этими прямыми, то три точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ шестиугольника лежатъ на одной прямой.

Предложеніе взаимное съ этимъ, которое есть частный видъ извѣстной теоремы Бріаншона, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если стороны шестиугольника проходятъ по три чрезъ двѣ точки, при чемъ ни одна изъ вершинъ не совпадаетъ съ этими точками, то три прямыя, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника, проходятъ чрезъ одну точку.

Въ обоихъ этихъ предложеніяхъ рѣчь идетъ объ одной и той-же фигурѣ и объ одномъ и томъ-же ея свойствѣ. Фигура эта состоитъ изъ девяти прямыхъ и девяти точекъ. Въ первой теоремѣ прямыя суть стороны шестиугольника, двѣ прямыя, на которыхъ лежатъ вершины, и прямая, соединяющая точки пересѣченія сторонъ; а точки суть вершины шестиугольника и тѣ три точки, въ которыхъ пересѣкаются противоположныя стороны. Во второй же теоремѣ прямыя суть стороны шестиугольника и три прямыя, соединяющія противоположныя вершины, а точки суть вершины шестиугольника, двѣ точки, въ которыхъ сходятся стороны, и точка, чрезъ которую проходятъ прямымъ, соединяющія вершины. Что касается самаго свойства этой фигуры, выражаемаго обѣими этими теоремами, то оно тоже самое какъ и въ предыдущемъ предложеніи о десяти прямыхъ и десяти точкахъ.

Сходство обоихъ предложеній поразительно, такъ-какъ все различіе между ними состоитъ только въ числѣ элементовъ, составляющихъ разсматриваемыя въ нихъ фигуры. Послѣднее предложеніе можетъ быть названо также теоремою о девяти точкахъ и девяти прямыхъ.

Мы не будемъ приводить доказательства этой теоремы и замѣтимъ только, что она всегда выводится весьма легко какъ слѣдствіе основного предложенія проективной геометріи и притомъ слѣдствіе на-столько полное, что, исходя изъ него и ведя разсужденія въ обратномъ порядкѣ, можно получить снова основное предложеніе.

Судя по сходству обоихъ разсмотрѣнныхъ предложеній, можно было бы ожидать, что и средства для ихъ доказательства должны быть одинаковы. На самомъ же дѣлѣ этого нѣтъ, такъ-какъ не существуетъ еще строго геометрическаго доказательства второго предложенія (о девяти), которое подобно доказательству перваго (о десяти) не основывалось бы на понятіи о перемѣщеніи и его непрерывности; и намъ кажется, что отъ самой мысли отыскать такое доказательство слѣдуетъ отказаться. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы было найдено такое доказательство, то съ тѣмъ вмѣстѣ и само основное предложеніе было бы доказано, не прибѣгая къ понятію о перемѣщеніи. Слѣдовательно, второе изъ указанныхъ нами основныхъ свойствъ проективной зависимости не было бы существеннымъ дополненіемъ къ третьему, а это значитъ, что опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія, данное Штаудтомъ, могло бы быть понимаемо въ буквальномъ смыслѣ и безъ всякаго дополненія. Все это не согласно, однако, съ тѣмъ, что мы видѣли въ предыдущемъ (см. § 8).

II.

Карлъ Георгъ Христіанъ фонъ Штаудтъ.

Штаудтъ родился 24-го января 1798 года въ Рейхштадтѣ, бывшемъ нѣкогда вольнымъ городомъ. Его отецъ происходилъ отъ старинной аристократической фамиліи и занималъ видное мѣсто въ городскомъ управленіи. Получивъ первоначальное образованіе въ своемъ родномъ городѣ, юный Штаудтъ поступилъ въ 1814 году въ гимназію въ Ансбахѣ, гдѣ окончилъ курсъ особенно успѣшно и былъ отличенъ почетною медалью. Еще въ гимназіи онъ почувствовалъ особенное влеченіе къ математикѣ, но окончательная склонность къ занятіямъ ею проявилась въ немъ, въ его пребываніе въ Геттингенѣ, подъ вліяніемъ Гаусса. Онъ былъ лично знакомъ съ послѣднимъ и не только получалъ поддержку и возбужденіе въ его преподаваніи, но и былъ неоднократно поощряемъ одобреніями и похвалою знаменитаго математика. Разсказываютъ, что когда однажды Штаудтъ передалъ Гауссу свое рѣшеніе одного предложеннаго имъ вопроса, то послѣдній вручилъ ему также свою замѣтку и выразилъ надежду, что они оба останутся довольными другъ другомъ. Сдавъ блестящимъ образомъ испытаніе на доктора въ Мюнхенѣ, Штаудтъ поступилъ въ 1822 году преподавателемъ гимназіи въ Вюрцбургѣ. Въ 1827 онъ перешелъ на такую-же должность въ Нюрнбергъ, а въ 1835 получилъ мѣсто ординарнаго профессора математики въ Эрлангенѣ, гдѣ и оставался, не покидая научнаго и преподавательскаго поприща до конца своей жизни.

Представляя высокій примѣръ вѣрности своему призванію и строгости нрава, онъ погружался здѣсь всѣмъ своимъ духомъ въ научныя изслѣдованія и раздѣлялъ свое вниманіе только между наукою и учащимися. Онъ овладѣвалъ всегда вполнѣ предметомъ своего преподаванія, отличался ясностью изложенія и пріобрѣталъ чрезъ то значительный кругъ слушателей. Немногіе, впрочемъ, изъ его учениковъ могли слѣдовать за нимъ на ту высоту, на которую стремился онъ поставить науку. Его въ высшей степени отвлеченные и строго научные пріемы требовали усилій воображенія, для развитія котораго необходимы энергія и постоянство. Правда, Штаудтъ умѣлъ придать своимъ лекціямъ особенную прелесть тѣмъ, что не упускалъ случая указывать но соприкосновеніе отвлеченныхъ результатовъ его науки съ тѣми или другими вопросами практической жизни; но онъ зналъ очень хорошо, что тѣ изъ его слушателей, которые видятъ въ этой иллюстраціи главную для себя точку опоры, не пойдутъ за нимъ въ глубину науки.

Штаудтъ умеръ 1-го іюня 1867 года въ Эрлангенѣ, едва только окончивъ пересмотръ послѣдняго корректурнаго листа одного изъ своихъ изслѣдованій. За нѣсколько дней предъ тѣмъ академія наукъ въ Мюнхенѣ избрала его своимъ членомъ; но, прежде чѣмъ этотъ выборъ получилъ утвержденіе, новаго академика уже не было въ живыхъ.

Работы Штаудта относятся къ двумъ отраслямъ отвлеченнаго знанія: теоріи чиселъ и геометріи. Первое его изслѣдованіе, его докторская диссертація, посвящено было вопросу о Бернулліевыхъ числахъ. Но наиболѣе любимымъ его поприщемъ было поприще геометрическое, на которомъ онъ навсегда пріобрѣлъ для своего имени почтенную извѣстность. Первоначально Штаудтъ занимался аналитической геометріей и въ нѣсколькихъ небольшихъ статьяхъ показалъ, съ какимъ тонкимъ пониманіемъ дѣла онъ успѣлъ овладѣть этимъ предметомъ. Позднѣе онъ сосредоточилъ свои силы исключительно на разработкѣ новой или синтетической геометріи, стремясь расширить ея область и облечь ее въ строгую систему. Этотъ примѣръ и примѣръ другого знаменитаго геометра, Понселе, который также начиналъ съ геометріи аналитической, показываетъ весьма убѣдительно, что синтетическая геометрія не есть плодъ стремленій людей, смотрящихъ на вещи односторонне. Напротивъ, мы можемъ заключить отсюда, что творцы новыхъ геометрическихъ методовъ и направленій, зная очень хорошо всю силу и глубину аналитическихъ пріемовъ, сознавали въ то-же время и искусственность этихъ пріемовъ, вносящихъ въ изученіе вещей то, что не составляетъ существенной принадлежности ихъ геометрическихъ свойствъ.

Въ 1847 году Штаудтъ издалъ небольшое, но строго научное и систематическое изложеніе новаго геометрическаго ученія подъ названіемъ «Geometrie der Lage». Это произведеніе по всей справедливости называется классическимъ. Цѣль его, какъ говорится въ предисловіи — «сдѣлать геометрію положенія самостоятельною наукой, не пользующеюся совершенно понятіемъ о величинѣ». Нельзя отрицать, что цѣль эта достигнута вполнѣ и притомъ со всею научною строгостью, но сжатость и нѣкоторая сухость изложенія была, вѣроятно, причиною того, что идеи Штаудта долго не получали надлежащей оцѣнки. Книга Штаудта, говоритъ г. Рейе, написана, очевидно, не для начинающихъ и отличается многими особенностями, весьма затрудняющими ея изученіе. Таковы необыкновенная сжатость выраженій и краткость изложенія, доходящая почти до недомолвокъ. Въ ней говорится только самое необходимое, рѣдко встрѣчаются пояснительныя слова и предоставляется самому читателю подыскивать болѣе простые и понятные примѣры для поясненія предложеній, приводимыхъ во всей ихъ общности. Но, не смотря на то, что эти качества дѣлаютъ кругъ читателей книги весьма ограниченнымъ, она служитъ и всегда останется основнымъ мастерскимъ произведеніемъ въ своей области, къ которому какъ къ первоначальному источнику всегда будутъ прибѣгать за справками и за провѣркою основныхъ идей геометріи положенія, подобно тому какъ къ элементамъ Эвклида — при изученіи геометріи древнихъ.

Не слѣдуетъ умалчивать и о тѣхъ возраженіяхъ, которыя дѣлаются противъ геометріи положенія Штаудта. Нападаютъ не на форму изложенія, а на самую сущность основныхъ ея цѣлей, на ригоризмъ въ устраненіи понятія о величинѣ и стремленіе сгруппировать истины въ опредѣленную систему. «Классическое, по своей простотѣ и строгости метода, произведеніе Штаудта, говоритъ г. Ганкель, есть попытка втиснуть природу, представляющуюся намъ въ безконечномъ многообразіи съ естественными путями, простирающимися безпредѣльно во всѣхъ направленіяхъ, въ ограниченныя рамки абстрактнаго схематизма и искусственной системы»[1].

Возраженіе это, привлекательное по своему либерализму, съ которымъ г. Ганкель беретъ подъ свою защиту природу отъ насилій скромнаго нѣмецкаго ученаго, становится еще болѣе соблазнительнымъ для многихъ въ силу слѣдующихъ за нимъ и какъ бы подтверждающихъ его строкъ, въ которыхъ порицается педантизмъ нѣмецкихъ ученыхъ и указывается на преимущество французовъ, которые въ своихъ научныхъ изслѣдованіяхъ почерпаютъ методы тамъ, гдѣ они естественно представляются. Намъ кажется однако, что здѣсь есть нѣкоторое смѣшеніе понятій. Г. Ганкель смѣшиваетъ созерцаніе природы глазами художника съ тѣмъ анализомъ, которому долженъ подвергать ее ученый. Правда, что природа безконечна въ многообразіи своихъ проявленій и нигдѣ въ ней нельзя указать никакихъ естественныхъ

[1] См. *H. Hankel*, «Die Elemente der projectivischen Geometrie». Leipzig. 1875, p. 29.

границъ. Но справедливо и то, что только путемъ отвлеченій, т. е. искусственныхъ отдѣленій однихъ изъ проявленій природы отъ другихъ мы можемъ познавать ее. Чтобы не только созерцать и ощущать природу, но и изучать ея законы, мы должны мысленно раздѣлять свойства вещей, не стѣсняясь тѣмъ, что на самомъ дѣлѣ эти свойства въ-отдѣльности не встрѣчаются; и дѣлать это раздѣленіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ свойствъ простѣйшихъ или элементарныхъ, которыя, хотя и не будутъ естественными элементами природы, но, какъ понятныя для всѣхъ безъ какого бы то ни было разъясненія, дальнѣйшему анализу подвергаемы быть не могутъ. Такимъ путемъ всегда шли и будутъ идти мыслители всѣхъ національностей безъ различія. Что же касается существованія нѣкоторыхъ особенностей въ складѣ идей каждой національности, то значеніе ихъ вовсе не такъ велико, чтобы могло уменьшить цѣнность и важность рѣшительнаго шага, сдѣланнаго къ познанію природы въ указанномъ сей часъ смыслѣ.

Справедливую оцѣнку идеи Штаудта получили лишь тогда, когда Кульманъ, профессоръ политехническаго института въ Цюрихѣ, издалъ свое сочиненіе «Графическая статика», въ которомъ эти идеи находятъ широкое приложеніе къ практическимъ построеніямъ инженернаго искусства. Явилась потребность въ систематическомъ преподаваніи геометріи положенія и, не задолго до смерти Штаудта, Теодоръ Рейе издалъ курсъ лекцій, въ которомъ это ученіе излагается въ расширенной и болѣе доступной для учащихся формѣ. Въ настоящее время имя Штаудта упоминается почти въ каждомъ учебникѣ новой геометріи и созданная имъ наука преподается въ томъ или другомъ видѣ и объемѣ во многихъ университетахъ и высшихъ школахъ, разсадникахъ теоретическихъ и практическихъ знаній.

Книга Штаудта «Geometrie der Lage», будучи наиболѣе замѣчательнымъ изъ его произведеній, не есть однако единственная по этому предмету. Издавъ ее, онъ продолжалъ дальнѣйшее развитіе и усовершенствованіе своихъ воззрѣній и пріемовъ и постепенно печаталъ эти работы подъ названіемъ «Beiträge zur Geometrie der Lage» (Nürnberg. 1856—60). Послѣднія содержатъ между прочимъ остроумныя попытки нагляднаго представленія мнимыхъ рѣшеній геометрическихъ задачъ.

За нѣсколько дней до смерти Штаудтъ написалъ и сдалъ въ печать двѣ работы, изъ которыхъ одна относится къ теоріи чиселъ и помѣщена въ журналѣ Crelle (T. LXVII, 1867), а другая посвящена вопросу геометрическому и носитъ заглавіе «Von den reellen und imaginären Halbmessern der Curven und Flächen zweiter Ordnung». Такимъ образомъ предъ самою смертью мысль его занята была тѣми двумя отдѣлами математики, которымъ онъ служилъ во всю свою жизнь.

III.

ЗАМѢТКА

О ФУНКЦІЯХЪ КОМПЛЕКСНАГО ПЕРЕМѢННАГО.

Элементарныя трансцендентныя функціи

$$e^z\,,\ \mathrm{Sin}\,z\,,\ \mathrm{Cos}\,z\,,\ \mathrm{Sh}\,z\,,\ \mathrm{Ch}\,z$$

вводятся въ анализъ сначала съ опредѣленіями, предполагающими только дѣйствительныя значенія z. Поэтому когда представленіе объ измѣняемости z расширяется, такъ-что допускаются и комплексныя значенія $z = x + yi$, съ дѣйствительными x, y и $i = \sqrt{-1}$; то и первоначальныя опредѣленія упомянутыхъ функцій должны быть обобщены. Такъ-какъ всѣ эти функціи разлагаются въ безконечные ряды, сходящіеся не только для всѣхъ дѣйствительныхъ, но и для всѣхъ комплексныхъ значеній z; то суммы этихъ рядовъ, въ послѣднемъ случаѣ, и принимаются, обыкновенно, за обобщенныя опредѣленія соотвѣтствующихъ имъ функцій. Такой пріемъ хотя и вполнѣ строгій, однако не единственный и притомъ едвали самый простой. Употребленіе безконечныхъ рядовъ дѣлаетъ его довольно сложнымъ даже при доказательствѣ такого простого равенства, какъ

$$e^z\,.\,e^{z'} = e^{z+z'}$$

для комплексныхъ z и z'; такъ-какъ при этомъ необходимо основываться на перемноженіи двухъ безконечныхъ рядовъ. Кромѣ того не видно тѣсной связи этого пріема съ первыми основаніями теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго.

Приведенныя соображенія и подали поводъ къ составленію этой краткой замѣтки, гдѣ рѣшеніе указаннаго выше вопроса выводится изъ извѣстныхъ простѣйшихъ общихъ свойствъ функцій комплекснаго перемѣннаго безъ всякой помощи безконечныхъ рядовъ.

Сначала разсмотримъ въ общемъ видѣ рѣшеніе этого вопроса, и потомъ — на нѣсколькихъ частныхъ примѣрахъ.

Предположимъ, что двѣ функціи

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y)$$

двухъ дѣйствительныхъ перемѣнныхъ x и y удовлетворяютъ условіямъ

$$u' = v_{,} \text{ и } u_{,} = -v', \tag{a}$$

гдѣ для краткости частныя производныя въ отношеніи x и y означены соотвѣтственно удареніями вверху и внизу. Изъ условія (a) получаются многія слѣдствія, изъ которыхъ замѣтимъ слѣдующія:

1. $u'v_{,} - u_{,}v' = u'^2 + u_{,}^2 = v'^2 + v_{,}^2 = \Delta > 0$;
2. $u'v' + u_{,}v_{,} = 0$;
3. $u'' + u_{,,} = 0$ и $v'' + v_{,,} = 0$.
4. Разсматривая въ уравненіяхъ $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ x и y какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ u и v и дифференцируя эти уравненія послѣдовательно въ отношеніи u и v, находимъ:

$$1 = u'x' + u_{,}y', \quad 0 = u'x_{,} + u_{,}y_{,},$$
$$0 = v'x' + v_{,}y', \quad 1 = v'x_{,} + v_{,}y_{,},$$

гдѣ также для краткости частныя производныя отъ x и y въ отношеніи u и v означены соотвѣтственно удареніями вверху и внизу.

Отсюда выводимъ

$$x' = \frac{v_{,}}{\Delta},\ x_{,} = -\frac{u_{,}}{\Delta},\ y' = -\frac{v'}{\Delta},\ y_{,} = \frac{u'}{\Delta};$$

слѣдовательно, принимая во вниманіе условія (а), имѣемъ

$$x' = y_{,} \text{ и } x_{,} = -y',$$

т. е. функціи x и y отъ u и v подчинены тѣмъ-же условіямъ, какъ функціи u и v отъ x и y и, вслѣдствіе этого, то, что доказано для послѣднихъ, вѣрно и для первыхъ.

5. Если изъ двухъ функцій u и v одна, напр. u, дана, какъ рѣшеніе уравненія

$$u'' + u_{,,} = 0;$$

тогда другую v легко получить посредствомъ вычисленія квадратуры. Для этого имѣемъ

$$dv = v'dx + v_{,}dy.$$

или, на основаніи условій (а),

$$dv = -u_{,}dx + u'dy.$$

Повѣряя условіе интегрируемости второй части, $(-u_{,})_{,} = (u')'$, находимъ $u'' + u_{,,} = 0$, т. е. что оно выполнено. Слѣдовательно v можно получить посредствомъ вычисленія двучленной квадратуры

$$v = \int(-u_{,}dx + u'dy).$$

Но легко убѣдиться, что для полученія полнаго выраженія v достаточно вычислить только тотъ или другой членъ этой формулы. Въ самомъ дѣлѣ, напр., полагая

$$v = -\int u_{,}dx + \Phi(y),$$

гдѣ $\Phi(y)$ неизвѣстная функція отъ y, и дифференцируя въ отношеніи y, находимъ

$$v_, = -\int u_{,,}dx + \Phi'(y) = \int u''dx + \Phi'(y) = u' + \Phi'(y)$$

откуда, на основаніи условій (а), имѣемъ

$$\Phi'(y) = v_, - u' = 0.$$

Слѣдовательно Φ есть произвольное постоянное, подразумѣвая которое, какъ слѣдствіе неопредѣленнаго интегрированія, имѣемъ

$$v = -\int u_, dx$$

и точно такъ-же получимъ

$$v = \int u'dy, \quad u = \int v_, dx = -\int v'dy.$$

6. Далѣе, полагая

$$w = u + vi \text{ и } z = x + yi$$

и подставляя въ первое уравненіе выведенное изъ второго значенія $x = z - yi$, находимъ

$$\bar{w} = u(z - yi, y) + v(z - yi, y)i,$$

гдѣ $\bar{w}$ условно означаетъ то, во что обращается w вслѣдствіе предыдущей подстановки.

Разсматривая $\bar{w}$ какъ функцію y и z и дифференцируя ее въ отношеніи y, находимъ:

$$\bar{w}_, = w_, + w'\frac{dx}{dy} = w_, - w'i = u_, + v_, i - (u' + v'i)i,$$

откуда, на основаніи условій (а), имѣемъ

$$\bar{w}_, = u_, + v' + (v_, - u')i = 0.$$

Слѣд. $\bar{w}$ не будетъ содержать явно y и сдѣлается функціей одного z. Для опредѣленія вида этой функціи безъ помощи предыдущей подстановки, достаточно замѣтить, что при $y = 0$

$$\bar{w} = u(z, 0) + iv(z, 0),$$

а

$$w_{y=0} = u(x, 0) + iv(x, 0).$$

Слѣдовательно выраженіе w въ z получится, если въ данномъ выраженіи

$$w = u + vi$$

сдѣлаемъ $y = 0$ и вмѣсто x поставимъ z. Подобныя же заключенія имѣютъ мѣсто относительно обратной функціи, которой z выражается посредствомъ w.

7. Наконецъ замѣтимъ еще, что, вслѣдствіе условій (a),

$$w' = u' + v'i,\quad w_{,} = u_{,} + v_{,}i = -v' + u'i = iw';$$

слѣдовательно

$$dw = w'dx + w_{,}dy = w'(dx + idy) = w'dz$$

или

$$\frac{dw}{dz} = w' = \frac{1}{i}\, w_{,}.$$

Въ изложенномъ выше и заключается общій пріемъ рѣшенія разсматриваемой задачи, для большаго уясненія котораго разберемъ далѣе нѣсколько примѣровъ его приложенія.

Для этого найдемъ рѣшеніе уравненія

$$u'' + u_{,,} = 0$$

вида

$$u = X.Y,$$

предполагая X функціей одного x, а Y — функціей одного y. Подстановку такого выраженія u въ предыдущее уравненіе можно привести къ виду

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}.$$

Означивъ черезъ α дѣйствительное постоянное и приравнивая $\pm\alpha^2$ каждую часть послѣдняго уравненія, получимъ:

$$\frac{d^2X}{dx^2} \mp \alpha^2 X = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} \pm \alpha^2 Y = 0,$$

обыкновенныя линейныя уравненія, изъ которыхъ, при верхнихъ знакахъ, находимъ

$$X = ae^{\alpha x} + a'e^{-\alpha x} \text{ и } Y = b \operatorname{Cos} \alpha y + b' \operatorname{Sin} \alpha y$$

съ произвольными постоянными a, a', b, b', α. Слѣдовательно

$$u = (ue^{\alpha x} + a'e^{-\alpha x})(b \operatorname{Cos} \alpha y + b' \operatorname{Sin} \alpha y).$$

Разсматривая теперь u какъ дѣйствительную часть функціи w комплекснаго перемѣннаго $z = x + yi$, найдемъ коэффиціентъ v при i мнимой ея части по формулѣ

$$v = \int \frac{du}{dx} dy = \alpha \int (ae^{\alpha x} - a'e^{-\alpha x})(b \operatorname{Cos} \alpha y + b' \operatorname{Sin} \alpha y)\, dy$$

$$= (ae^{\alpha x} - a'e^{-\alpha x})(b \operatorname{Sin} \alpha y - b' \operatorname{Cos} \alpha y);$$

слѣдовательно

$$w = (ae^{\alpha x} + a'e^{-\alpha x})(b \operatorname{Cos} \alpha y + b' \operatorname{Sin} \alpha y)$$
$$+ (ae^{\alpha x} - a'e^{-\alpha x})(b \operatorname{Sin} \alpha y - b' \operatorname{Cos} \alpha y).i$$

есть функція $z = x + yi$.

Для опредѣленія вида этой функціи, слѣдуя общему способу, дѣлаемъ $y = 0$, что доставитъ

$$w_{y=0} = a(b - b'i)\, e^{\alpha x} + a'(b + b'i)\, e^{-\alpha x},$$

и, подставивъ $z = x + yi$ вмѣсто x, получимъ

$$w = a(b - b'i)\, e^{\alpha z} + a'(b + b'i)\, e^{-\alpha z}.$$

Располагая значеніями произвольныхъ постоянныхъ α, a, a', b, b', можно выбрать эти значенія такимъ образомъ, что $w_{y=0}$ последовательно будетъ равно e^x, $\operatorname{Ch} x$, $\operatorname{Sh} x$ и вмѣстѣ съ тѣмъ получатся выраженія e^z, $\operatorname{Ch} z$ $\operatorname{Sh} z$.

Такимъ образомъ, во 1-хъ, для $\alpha = 1$, $b = \dfrac{1}{a}$, $a' = 0$, $b' = 0$, имѣемъ

$$w_{y=0} = e^x$$

и $$w = e^x(\operatorname{Cos} y + i \operatorname{Sin} y) = e^z;$$

во 2-хъ, для $\alpha = 1$, $a = a'$, $b = \frac{1}{2}$, $b' = 0$, имѣемъ

$$w_{y=0} = \operatorname{Ch} x \text{ и } w = \operatorname{Ch} x \operatorname{Cos} y + i \operatorname{Sh} x \operatorname{Sin} y = \operatorname{Ch} z;$$

въ 3-хъ, для $\alpha = 1$, $a = -a'$, $b = \frac{1}{2}$; $b' = 0$, получимъ:

$$w_{y=0} = \operatorname{Sh} x \text{ и } w = \operatorname{Sh} x \operatorname{Cos} y + i \operatorname{Sh} x \operatorname{Sin} y = \operatorname{Sh} z.$$

Такимъ образомъ мы пришли совершенно логическимъ путемъ, къ опредѣленію аналитическихъ значеній функцій e^z, $\operatorname{Ch} z$, $\operatorname{Sh} z$, при $z = x + yi$, выраженныхъ *конечнымъ образомъ*, посредствомъ другихъ элементовъ, аналитическое значеніе которыхъ вполнѣ извѣстно.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ:

1) Что функціи e^z, $\operatorname{Ch} z$, $\operatorname{Sh} z$ не измѣняютъ своихъ значеній, когда y получаетъ приращеніе $\pm 2\pi n$, если n цѣлое число и π отношеніе окружности къ діаметру, а этому приращенію соотвѣтствуетъ измѣненіе z на $\pm 2\pi n i$.

Слѣд. эти функціи также не измѣняютъ своихъ значеній при измѣненіи x на $\pm 2\pi n i$, которымъ соотвѣтствуютъ точно такія-же измѣненія z.

2) По общей формулѣ $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$, находимъ:

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \frac{d \operatorname{Ch} z}{dz} = \operatorname{Sh} z, \quad \frac{d \operatorname{Sh} z}{dz} = \operatorname{Ch} z.$$

3) Полагая $z = x + yi$ и $z_1 = x_1 + y_1 i$, найдемъ

$$\begin{aligned} e^z . e^{z_1} &= e^x . e^{x_1} (\operatorname{Cos} y + i \operatorname{Sin} y)(\operatorname{Cos} y_1 + i \operatorname{Sin} y_1) \\ &= e^{x+x_1} [\operatorname{Cos}(y + y_1) + i \operatorname{Sin}(y + y_1)] = e^{z+z_1}. \end{aligned}$$

4) Пользуясь значеніями $2\,\mathrm{Ch}\,x = e^x + e^{-x}$ и $2\,\mathrm{Sh}\,x = e^x - e^{-x}$, находимъ:

$$2\,\mathrm{Ch}\,z = e^x\,(\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sin}\,y) + e^{-x}\,(\mathrm{Cos}\,y - i\,\mathrm{Sin}\,y) = e^z + e^{-z},$$

$$2\,\mathrm{Sh}\,z = e^x\,(\mathrm{Cos}\,y + i\,\mathrm{Sin}\,y) - e^{-x}\,(\mathrm{Cos}\,y - i\,\mathrm{Sin}\,y) = e^z - e^{-z},$$

слѣдовательно

$$4\,\mathrm{Ch}\,z\,.\,\mathrm{Ch}\,z_1 = e^{z+z_1} + e^{-z-z_1} + e^{z-z_1} + e^{z_1-z};$$

$$4\,\mathrm{Sh}\,z\,.\,\mathrm{Sh}\,z_1 = e^{z+z_1} + e^{-z-z_1} - e^{z-z_1} - e^{z_1-z}$$

$$4\,\mathrm{Sh}\,z\,.\,\mathrm{Ch}\,z_1 = e^{z+z_1} - e^{-z_1-z} + e^{z-z_1} - e^{z_1-z}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\mathrm{Ch}\,z\,\mathrm{Ch}\,z_1 \pm \mathrm{Sh}\,z\,\mathrm{Sh}\,z_1 = \mathrm{Ch}\,(z \pm z_1),$$

$$\mathrm{Sh}\,z\,\mathrm{Ch}\,z_1 \pm \mathrm{Sh}\,z_1\,\mathrm{Ch}\,z = \mathrm{Sh}\,(z \pm z_1).$$

Теперь, удерживая нижніе знаки въ уравненіяхъ:

$$\frac{d^2X}{dx^2} \mp \alpha^2 X = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2Y}{dy^2} \pm \alpha^2 Y\ 0,$$

получимъ $X = b\,\mathrm{Cos}\,\alpha x + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha x$ и $Y = ae^{\alpha y} + a'e^{-\alpha y}$; слѣдовательно $u = (ae^{\alpha y} + a'e^{-\alpha y})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha x + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha x)$, а потому коэффиціентъ при i въ функціи w будетъ

$$v = -\int\frac{du}{dy}\,dx = -\alpha\int(ae^{\alpha y} - a'e^{-\alpha y})(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha x + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha x)\,dx$$
$$= (ae^{\alpha y} - a'e^{-\alpha y})\,(b'\,\mathrm{Cos}\,\alpha x - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha x).$$

Такимъ образомъ заключаемъ, что

$$w = (ae^{\alpha y} + a'e^{-\alpha y})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha x + b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha x)$$
$$+ (ae^{\alpha y} - a'e^{-\alpha y})\,(b'\,\mathrm{Cos}\,\alpha x - b\,\mathrm{Sin}\,\alpha x)\,.\,i$$

есть функція отъ $z = x + yi$. Для опредѣленія аналитическаго вида этой функціи полагая $y = 0$ имѣемъ:

$$w_{y=0} = [(a + a')\,b + (a - a')\,b'i\,]\,\mathrm{Cos}\,\alpha x$$
$$+ [(a + a')\,b' - (a - a')\,bi]\,\mathrm{Sin}\,\alpha x.$$

Слѣдовательно предыдущее выраженіе w опредѣляетъ функцію комплекснаго перемѣннаго z.

$$w=[(a+a')b+(a-a')b'i]\,\mathrm{Cos}\,\alpha z$$
$$+[(a+a')b'-(a-a')bi]\,\mathrm{Sin}\,\alpha z.$$

Полагая здѣсь, во 1-хъ, $\alpha=1$, $a=a'$, $b=\frac{1}{2a}$, $b'=0$, имѣемъ:

$$w_{y=0}=\mathrm{Cos}\,x \text{ и } w=\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Ch}y-i\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sh}y=\mathrm{Cos}\,z;$$

во 2-хъ, полагая $\alpha=1$, $a=a'$, $b=0$, $b'=\frac{1}{2a}$, получимъ

$$w_{y=0}=\mathrm{Sin}\,x \text{ и } w=\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Ch}y+i\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sh}y=\mathrm{Sin}\,z.$$

Такимъ образомъ выведены опредѣленія функцій $\mathrm{Cos}\,z$ и $\mathrm{Sin}\,z$, комплекснаго перемѣннаго $z=x+yi$, выраженныя конечнымъ числомъ дѣйствій надъ извѣстными аналитическими элементами. Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ:

1. Значенія функцій $\mathrm{Cos}\,z$ и $\mathrm{Sin}\,z$ не измѣняются, когда x и y получаютъ соотвѣтственно приращенія $\pm 2\pi n$ и $\pm 2\pi n'i$, если n и n' цѣлыя числа, — при этомъ z измѣняется на $\pm 2\pi(n-n')$.

2. По формулѣ $\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dx}$, находимъ,

$$\frac{d\,\mathrm{Cos}\,z}{dz}=-\mathrm{Sin}\,z \text{ и } \frac{d\,\mathrm{Sin}\,z}{dz}=\mathrm{Cos}\,z.$$

3. Пользуясь выраженіями $2\mathrm{Ch}y=e^y+e^{-y}$ и $2\mathrm{Sh}y=e^y-e^{-y}$, находимъ:

$$2\,\mathrm{Cos}\,z=(e^y+e^{-y})\,\mathrm{Cos}\,x-i\,(e^y-e^{-y})\,\mathrm{Sin}\,x$$
$$=e^y(\mathrm{Cos}\,x-i\,\mathrm{Sin}\,x)+e^{-y}(\mathrm{Cos}\,x+i\,\mathrm{Sin}\,x)=e^{zi}+e^{-zi},$$

$$2i\,\mathrm{Sin}\,z=(e^{-y}-e^y)\,\mathrm{Cos}\,x+i\,(e^y+e^{-y})\,\mathrm{Sin}\,x$$
$$=e^{-y}(\mathrm{Cos}\,x+i\,\mathrm{Sin}\,x)-e^y(\mathrm{Cos}\,x-i\,\mathrm{Sin}\,x)=e^{zi}-e^{-zi}.$$

Поэтому

$$4 \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} z_1 = e^{(z+z_1)i} + e^{-(z+z_1)i} + e^{(z-z_1)i} + e^{(z_1-z)i},$$

$$-4 \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} z_1 = e^{(z+z_1)i} + e^{-(z+z_1)i} - e^{(z-z_1)i} - e^{(z_1-z)i},$$

$$4i \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} z_1 = e^{(z+z_1)i} - e^{(z_1-z)i} + e^{(z-z_1)i} - e^{-(z+z_1)i},$$

$$4i \operatorname{Sin} z_1 \operatorname{Cos} z = e^{(z_1+z)i} - e^{(z-z_1)i} + e^{(z_1-z)i} - e^{-(z_1+z)i}.$$

Слѣдовательно

$$\operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} z_1 \mp \operatorname{Sin} z \operatorname{Sin} z_1 = \operatorname{Cos}(z \pm z_1)$$

$$\operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} z_1 \pm \operatorname{Sin} z \operatorname{Cos} z_1 = \operatorname{Sin}(z \pm z_1).$$

Опредѣливъ $\operatorname{Ch} z$, $\operatorname{Sh} z$, $\operatorname{Cos} z$, $\operatorname{Sin} z$ для комплекснаго z вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляемъ и всѣ составленныя изъ нихъ сложныя функціи, какъ напр. остальныя тригонометрическія и гиперболическія.

Что касается обратныхъ элементарныхъ функцій, то, при комплексномъ значеніи ихъ аргумента, аналитическія значенія ихъ à priori неизвѣстны, если эти функціи первоначально опредѣлены лишь для дѣйствительныхъ значеній аргумента.

Но такъ-какъ всѣ разсмотрѣнныя выше функціи составляются алгебраически изъ e^z, то достаточно вывести обратную только этой функціи, слѣдуя указанному выше пріему.

Для этого имѣемъ

$$e^z = e^x (\operatorname{Cos} y + i \operatorname{Sin} y) = u + vi = w,$$

т. е.

$$e^x \operatorname{Cos} y = u \quad \text{и} \quad e^x \operatorname{Sin} y = v$$

или

$$e^{2x} = u^2 + v^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} y = \frac{v}{u}.$$

Разсматривая u и v какъ данныя величины, а x и y какъ неизвѣстныя и опредѣляя только дѣйствительный корень перваго уравненія и абсолютно наименьшій второго, находимъ

$$x = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) \quad \text{и} \quad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}.$$

Слѣдовательно

$$z = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$$

должно быть функціей отъ $w = u + vi$.

Далѣе, слѣдуя общему пріему, дѣлая $v = o$, имѣемъ

$$z_{v=o} = \frac{1}{2}\log u^2 = \log u$$

и, ставя $u + vi = w$ на мѣсто u, заключаемъ, что аналитическое выраженіе искомой функціи должно быть

$$z = \log(u+vi) = \log w.$$

Вслѣдствіе принятыхъ условій при выводѣ значеній x и y, полученный результатъ представляетъ только одно изъ значеній z, удовлетворяющихъ уравненію

$$e^z = w.$$

Но было доказано, что e^z возвращается періодически къ прежнимъ значеніямъ когда одно и то-же значеніе z измѣняется на $\pm 2\pi n i$; поэтому, если условимся, что $\log w$ долженъ представлять всѣ значенія z, удовлетворяющія предыдущему уравненію, то будемъ имѣть

$$z = \log w = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} \pm 2\pi n i,$$

гдѣ

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Теперь обращеніе остальныхъ элементарныхъ функцій отъ $z = x + yi$ сведется уже на извѣстныя дѣйствія и функціи.

Въ близкой связи съ предыдущими простыми примѣрами находятся только по-видимому болѣе сложные примѣры, образцы которыхъ можно заимствовать изъ теоретической механики и физики.

Такъ, мы имѣли рѣшеніе

$$u=(ae^{\alpha y}+a'e^{-y})\,(b\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,x+b'\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,x)$$

уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

которому предыдущее рѣшеніе очевидно будетъ удовлетворять и послѣ слѣдующихъ измѣненій въ его выраженіи.

Напишемъ $x-\beta$ вмѣсто x и положимъ

$$a=a'=\frac{1}{2\pi}\,f(\beta)\,d\beta d\alpha,\quad b=\frac{1}{2},\ b'=0,$$

означая черезъ $f(\beta)$ произвольно данную функцію съ конечными значеніями для всѣхъ дѣйствительныхъ и комплексныхъ значеній β. Вслѣдствіе этого данное рѣшеніе получитъ видъ $\frac{1}{2\pi}\,f(\beta)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,(x-\beta)\,\mathrm{Ch}\,\alpha y d\alpha d\beta$. Но, по свойству линейнаго уравненія, ему удовлетворяетъ и сумма подобныхъ рѣшеній, распространенная на непрерывный рядъ значеній α и β отъ $-\infty$ до $+\infty$. Вслѣдствіе этого замѣчанія получаемъ

$$u=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,(x-\beta)\,\mathrm{Ch}\,\alpha y dx d\beta$$

рѣшеніе, данное *Фурье*.

Разсматривая это значеніе u какъ дѣйствительную часть функціи w отъ $z=x+yi$, находимъ, что коеффиціентъ при i въ этой функціи будетъ

$$v=\int\frac{du}{dx}dy=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\int f(\beta)\operatorname{Sin}\alpha(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y.\,\alpha d\alpha\,d\beta\,dy$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Sin}\alpha(x-\beta)\operatorname{Sh}\alpha y\,d\alpha\,d\beta.$$

Слѣдовательно

$$w=u+vi=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\left\{\operatorname{Cos}\alpha(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y\right.$$

$$\left.-i\operatorname{Sin}\alpha(x-\beta)\operatorname{Sh}\alpha y\right\}d\alpha\,d\beta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(x+yi-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

есть функція отъ $z=x+yi$. Для опредѣленія вида этой функціи, по общему способу дѣлая $y=0$, на основаніи извѣстной формулы, также принадлежащей Фурье, имѣемъ

$$w_{y=0}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(x-\beta)\,d\alpha\,d\beta=f(x),$$

а замѣнивъ здѣсь x на $x+yi=z$, будемъ имѣть

$$w=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(z-\beta)\,d\alpha\,d\beta=f(z)$$

предыдущую формулу Фурье, распространенную на комплексныя значенія z.

Сложивъ последнюю формулу съ тою, которая изъ нея получится при подстановкѣ $z' = x - yi$ вмѣсто z и замѣчая, что

$$\operatorname{Cos}\alpha(z-\beta) + \operatorname{Cos}\alpha(z'-\beta) = 2\operatorname{Cos}(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y,$$

находимъ для даннаго выше рѣшенія Фурье выраженіе

$$u = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\beta)\operatorname{Cos}\alpha(x-\beta)\operatorname{Ch}\alpha y\, d\alpha\, d\beta = \frac{f(z)+f(z')}{2},$$

показывающее его общность.

Подобнымъ же образомъ формула

$$\log(x+yi) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

показываетъ, что ея дѣйствительная часть и коеффиціентъ при i суть частныя рѣшенія уравненія

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

отсюда легко заключить о существованіи двухъ другихъ рѣшеній:

$$U = \iint f(\alpha,\beta)\log\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\, d\alpha\, d\beta$$

и $$V = \iint f(\alpha,\beta)\operatorname{arc\,tg}.\frac{y-\beta}{x-\alpha}\, d\alpha\, d\beta$$

того-же уравненія, гдѣ $f(\alpha,\beta)$ имѣетъ конечныя значенія въ границахъ интегрированія, а эти послѣднія обнимаютъ всѣ точки (съ прямоугольными координитами α и β) нѣкоторой конечной площади A, не заключающей въ себѣ точку съ координатами x и y.

Функціи U и V вычисляются помощію данныхъ выше квадратуръ одна посредствомъ другой и выраженіе

$$W = U + Vi$$

есть функція комплекснаго перемѣннаго $z = x + yi$.

Можно еще замѣтить, что U есть потенціалъ (такъ называемый логариѳмическій) силы притяженія точки (x, y), съ массой $= 1$, всѣми точками (α, β), имѣющими плотность $f(\alpha, \beta)$, обратно пропорціональной разстояніямъ и пропорціональной массамъ этихъ точекъ.

Вслѣдствіе же равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

уравненіе

$$V = \iint f(\alpha, \beta) \operatorname{arc\,tg} \frac{y-\beta}{x-\alpha}\, d\alpha\, d\beta = \mathrm{Const}$$

представляетъ *линіи силъ*, т. е. линіи, касательныя къ которымъ во всякой точкѣ (x, y), не принадлежащей площади A, опредѣляютъ направленіе силы, имѣющей потенціалъ U.

В. И.