МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРІЯ

ЯВЛЕНІЙ ОТРАЖЕНІЯ И ПРЕЛОМЛЕНІЯ ПОЛЯРИЗОВАННАГО СВѢТА НА ГРАНИЦАХЪ ИЗОТРОПНЫХЪ СРЕДИНЪ.

А. П. Грузинцова.

I.

1. Свѣтовыя волны, распространяющіяся въ прозрачной изотропной срединѣ, сохраняютъ какъ свое направленіе, такъ и напряженность и фазу колебаній эфирныхъ частицъ на своихъ поверхностяхъ; но при переходѣ изъ одной средины въ другую онѣ измѣняютъ какъ направленіе, вдоль котораго перемѣщаются, такъ и напряженность съ фазой колебаній своихъ частицъ. Опредѣленіе законовъ обоихъ этихъ измѣненій въ формѣ по возможности простой, но совершенно точной и общей, и составитъ цѣль настоящей статьи. Эти законы извѣстны, но способы ихъ вывода недостаточны—одни по малой строгости основаній, на которыхъ покоятся эти выводы, другіе по трудности своей; вотъ почему я считаю полезнымъ рѣшить эту задачу снова.

Какъ сказано, законы отраженія и преломленія давно извѣстны; первые изъ нихъ, именно — законы, относящіеся до направленій свѣтовыхъ волнъ, извѣстны уже давно [1]; теоретически (на

[1] Законы отраженія были извѣстны еще древнимъ. См. Poggendorff's Geschichte der Physik, p. 23; а законъ преломленія найденъ Декартомъ въ 1637 г.; см. тамъ-же, стр. 311.

основанiи предположенiй теорiи волнообразныхъ движенiй) они были выведены въ первый разъ Гюйгенсомъ [1] въ 1690 году; что же касается до вторыхъ законовъ напряженностей и фазъ, то они найдены сравнительно очень недавно, именно—Фрэнелемъ [2], въ 1819 году, хотя ихъ старались опредѣлить еще Ламбертъ и потомъ (1817) Юнгъ. Законы, найденные Фрэнелемъ, были приближенные; болѣе же точнымъ знанiемъ ихъ физика обязана Коши (1830) [3].

Законы направленiя отраженныхъ и преломленныхъ волнъ выходятъ непосредственно изъ основныхъ предположенiй теорiи волнообразныхъ движенiй, вотъ почему они были найдены теоретически тотчасъ-же, какъ только была предложена теорiя колебательныхъ движенiй, какъ теорiя свѣтовыхъ явленiй; нельзя того-же сказать о законахъ напряженностей и фазъ;—наблюденiя напряженностей отраженныхъ и преломленныхъ лучей несравненно болѣе трудныя, чѣмъ наблюденiя направленiй, не давали возможности найти законы измѣненiй напряженностей путемъ опыта, вслѣдствiе чего сказанные законы найдены были сначала путемъ теоретическихъ разсужденiй, а уже за-тѣмъ произведена была опытная ихъ провѣрка.

Такимъ образомъ въ математической физикѣ законы отраженiя и преломленiя свѣта на границахъ изотропныхъ срединъ выводятъ обыкновенно (кромѣ Коши) отдѣльно одни (законы направленiя) отъ другихъ (законы напряженностей и фазъ) и для различныхъ [4] срединъ различно, хотя самыя явленiя существуютъ совмѣстно. Здѣсь же будетъ предложенъ простой способъ одновременнаго ихъ вывода изъ однихъ и тѣхъ-же началъ

---

[1] См. его Traité de la lumière.

[2] Oeuvres complètes de Fresnel. T. I. p. 767—799 (1823).

[3] См. напр. его Exércices de mathématiques et de physique—mathématique 1840 p. 212 et suivs. Еще: Comptes rendus de l'Acad. de Paris, vol. VIII, p p. 985—1000, vol. IX p. p. 60—68; 676—691; 727—730.

[4] Т. е. прозрачныхъ отдѣльно отъ непрозрачныхъ.

ы будутъ даны законы, общіе всѣмъ изотропнымъ срединамъ какъ прозрачнымъ, такъ и непрозрачнымъ. Но прежде, чѣмъ перейти къ этому выводу, полезно дать краткій очеркъ дальнѣйшей исторіи разбираемаго вопроса. Какъ сказано выше, Фрэнэль былъ первый, нашедшій теоретическимъ путемъ законы напряженностей отраженныхъ и преломленныхъ лучей на границахъ изотропныхъ прозрачныхъ срединъ. Но формулы Фрэнеля были основаны на нѣкоторыхъ ограниченіяхъ и допущеніяхъ, которыя, уменьшивъ общность его рѣшенія, не позволили ему прійти къ результатамъ, вполнѣ подтверждаемымъ опытомъ. Коши далъ первый формулы, вполнѣ отвѣчающія явленіямъ. Самъ онъ сначала не показалъ вывода своихъ рѣшеній, а далъ только основанія, руководствуясь которыми, можно прійти къ предложеннымъ имъ формуламъ [1], но нѣсколько времени спустя онъ сообщилъ [для прозрачныхъ срединъ] эти доказательства. Другія доказательства его формулъ даны Бэромъ [2], Эттингсгаузеномъ [3], Эйзенлоромъ [4], Лангомъ [5] и др.

Формулы, предложенныя Коши, даютъ законы отраженія не только на границахъ прозрачныхъ тѣлъ, но и на границахъ прозрачнаго съ непрозрачнымъ [6] (именно съ металломъ). Затѣмъ предложены были рѣшенія того-же вопроса Гриномъ [7] (1837), исходящимъ изъ другихъ основаній, чѣмъ Коши, Нейманомъ [8] (1835), основныя положенія теоріи котораго, сход-

---

[1] См. Comptes rendus de l'Acad. de Paris. T. IX, p. 9, а доказательства: p. 676 — 691, p. 727 — 730. Ср. также T. II. p. 341 — 349.

[2] Pogg. Annalen. Bd. XCI, S. 268.

[3] Wiener Sitzungsberichte 1855, XVIII. S. 369 — 391.

[4] Pogg. Annalen. Bd. CIV, S. 346.

[5] Theoretische Physik. S. 264.

[6] Comptes rendus. T. VIII. p. 553 — 561. Формулы стр. 559 и 560 не были доказаны Коши.

[7] Mathematical papers, p. 243.

[8] Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflection des Lichtes etc. § 3.

ныя въ нѣкоторыхъ пунктахъ съ положеніями теоріи Фрэнеля, въ другихъ отличаются отъ нихъ.

Наконецъ въ послѣднее время (1878) была предложена новая теорія тѣхъ-же явленій Кеттелеромъ [1], основанія которой хотя и вѣроятны, но не доказаны. Къ упомянутымъ авторамъ нужно прибавить еще Лундквиста [2] (1874), изложившаго сравнительно теоріи Грина и Коши, затѣмъ Макъ-Куллоха [3] (1834), выведшаго изъ формулъ Фрэнеля формулы, аналогичныя формуламъ Коши для металлическаго отраженія.

Кромѣ перечисленныхъ авторовъ о математической теоріи явленій отраженія и преломленія писали еще другіе. Я упомянулъ только главнѣйшихъ по моему мнѣнію [4].

Для удобнѣйшаго обозрѣнія основаній важнѣйшихъ перечисленныхъ теорій можно составить таблицу, въ которой

$$u, v, w,$$

составляющія колебанія вдоль координатныхъ осей, за кои приняты нормалъ къ разграничивающей средины плоскости (ось z-овъ), слѣдъ плоскости паденія на этой границѣ (ось x-овъ) и перпендикуляръ къ плоскости паденія (ось y-овъ); начало же координатъ въ точкѣ паденія луча; T — живая сила колебаній;

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}$$

давленія вдоль осей x и y на единицу площади, перпендикулярной соотвѣтственно осямъ x и y; указатель $(\ )_0$ показываетъ, что количества относятся къ нижней срединѣ, а указатель $(\ )_1$ — къ верхней. Am показываетъ равенство амплитудъ, но не колебаній. Эта таблица слѣдующая:

---

[1] Wiedemann's Annalen. Bd. I. S. 206. Bd. III. S. 83.

[2] Pogg. Annalen Bd. CLII. S. 177.

[3] Journal de mathématiques. t. VII (1842), pp. 217—265. Оригинальнаго мемуара я немогъ достать.

[4] Напр. Lorenz въ Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. XXII (1877). S. 1 und S. 205.

Фрэнель. $T_0 = T_1; Am(u)_0 = Am(u)_1; Am(v)_0 = Am(v)_1$; упругость обѣихъ срединъ одинакова, плотность различна, формулы не даютъ разности фазъ и относятся только къ прозрачнымъ срединамъ; колебанія поперечныя; составляющихъ w не разсматриваетъ.

Коши $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1$

$$(\Delta u)_0 = (\Delta u)_1, (\Delta v)_0 = (\Delta v)_1, (\Delta w)_0 = (\Delta w)_1$$ [1]

Упругость и плотность различны. Вводитъ продольныя колебанія. Даетъ разность фазъ. Разсматриваетъ и случай непрозрачныхъ (металлическихъ) срединъ.

Гринъ $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1$

$$(Pxx)_0 = (Pxx)_1, (Pyy)_0 = (Pyy)_1, (Pxy)_0 = (Pxy)_1.$$

Разсматриваетъ въ случаѣ $(u)_0 = (u)_1$ и $(w)_0 = (w)_1$ продольныя колебанія. Упругость принимаетъ одинаковою въ обѣихъ срединахъ. Полныхъ и окончательныхъ рѣшеній не даетъ, металлическихъ срединъ не разсматриваетъ.

Нейманнъ $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1 T_0 = T_1$.

Упругость принимаетъ различною, но плотность одинаковою; продольныхъ колебаній не разсматриваетъ; у него плоскость поляризаціи луча перпендикулярна къ общепринимаемой. Не даетъ измѣненія фазъ. Непрозрачныхъ срединъ не разсматриваетъ.

Кеттелеръ $(u)_0 = (u)_1, (v)_0 = (v)_1, (w)_0 = (w)_1, T_0 = T_1$.

Равенство деформацій эфира около оси z-овъ, равенство *скоростей* и *силъ перпендикулярныхъ къ плоскости раздѣла.* Продольныхъ колебаній не разсматриваетъ; даетъ разность фазъ; непрозрачныя средины разсмотрѣны. Его формулы сложны, хотя могутъ быть при-

---

[1] Δ означаетъ измѣненія, претерпѣваемыя количествами u, v, w, при переходѣ изъ одной средины въ другую.

ведены, какъ онъ показалъ, къ рѣшеніямъ Коши; принимаетъ въ разсчетъ дѣйствія матеріальныхъ частицъ.

II.

2. Покажемъ теперь основанія новаго простого и общаго способа рѣшенія задачи, состоящей въ опредѣленіи законовъ отраженія и преломленія свѣта на границахъ изотропныхъ срединъ. Допуская непрерывность измѣненій упругихъ силъ при переходѣ изъ одной средины въ другую и называя

$$X, Y, Z,$$

составляющія по координатнымъ осямъ упругаго давленія на элементъ поверхности раздѣла срединъ со стороны первой средины (для ясности — нижней), а

$$X', Y', Z'$$

подобныя же составляющія давленія со стороны второй средины (верхней) на тотъ-же элементъ поверхности, на основаніи равенства давленій имѣемъ:

$$X = X'$$

$$Y = Y'$$

$$Z = Z';$$

но если назовемъ

$$A_1, B_1, C_1,$$

косинусы направленія нормала къ поверхности раздѣла срединъ, направленнаго въ верхнюю (вторую) средину, тогда предъидущія уравненія обратятся въ слѣдующія[1]:

[1] См. напр. Clebsch'a Theorie der Elasticität fester Körper. S. 35.

$$\left.\begin{aligned}
&A_1(Pxx)_0 + B_1(Pxy)_0 + C_1(Pxz)_0 = A_1(Pxx)_1 + \\
&\qquad\qquad + B_1(Pxy)_1 + C_1(Pxz)_1 \\
&A_1(Pxy)_0 + B_1(Pyy)_0 + C_1(Pyz)_0 = A\ (Pxy)_1 + \\
&\qquad\qquad + B_1(Pyy)_1 + C_1(Pyz)_1 \\
&A_1(Pxz)_0 + B_1(Pyz)_0 + C_1(Pzz)_0 = A_1(Pxz)_1 + \\
&\qquad\qquad + B_1(Pyz)_1 + C_1(Pzz)_1
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})$$

гдѣ

$$Pxx,\ Pxy, \ldots$$

суть составляющія вдоль прямоугольныхъ осей координатъ упругихъ силъ, дѣйствующихъ на единицу поверхности внутри средины (x, y, z) соотвѣтственно перпендикулярной координатнымъ осямъ; указатель $(\ )_0$ относится къ нижней срединѣ, а $(\ )_1$ къ верхней.

Кромѣ уравненій (I) можно написать еще группу условныхъ уравненій. Называя

$$u',\ v',\ w'$$

составляющія скорости колебанія частицы вдоль координатныхъ осей, можно принять, что

$$\left.\begin{aligned}
(u')_0 &= (u')_1 \\
(v')_0 &= (v')_1 \\
(w')_0 &= (w')_1
\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{II})$$

эти равенства, существующія на границахъ обѣихъ срединъ, выражаютъ *непрерывность* измѣненій колебаній частицъ *во времени*, причемъ на равенства (I) можно смотрѣть, какъ на условія *непрерывности въ пространствѣ*.

Уравненія (I) и (II) и суть рѣшающія вопросъ.

Къ уравненіямъ (I) и (II) надо прибавить еще геометрическое условіе, выражающее тотъ фактъ, что точка, для которой справедливы предъидущія условія, лежитъ на поверхности раздѣла срединъ и есть такъ называемая точка паденія луча. Это условіе есть слѣдующее:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0. \qquad \text{(III)}$$

Оно есть уравненіе плоскости раздѣла срединъ [1].

3. Такъ-какъ

$$Pxx,\ Pxy \ldots.$$

выражаются въ теоріи упругости посредствомъ составляющихъ колебанія частицы, то надо ввести эти послѣднія.

Пусть въ точку (x, y, z) поверхности раздѣла падаютъ въ верхней срединѣ плоскія волны, частицы эфира, въ коихъ колеблются перпендикулярно къ лучамъ; эти волны разовьютъ на границѣ двѣ системы волнъ: одну — отраженныхъ, другую преломленныхъ; причемъ, какъ въ той, такъ и въ другой, кромѣ лучей съ поперечными колебаніями, на границѣ срединъ могутъ существовать лучи съ продольными колебаніями [2]. — Необходимость введенія лучей съ продольными колебаніями обусловливается какъ общностью математическаго рѣшенія вопроса, такъ, кажется, и сущностью дѣла — именно въ продольныхъ колебаніяхъ заключается дѣйствіе поверхностнаго слоя.

Назовемъ составляющія колебанія въ падающемъ лучѣ

$$u,\ v,\ w,$$

въ отраженномъ съ поперечными колебаніями:

$$u',\ v',\ w',$$

---

[1] Ясно, что подобнымъ предположеніемъ рѣшеніе не теряетъ своей общности.

[2] Лучи съ продольными колебаніями введены Коши.

въ отраженномъ съ продольными колебаніями:

$$u'', v'', w'',$$

въ преломленномъ съ поперечными колебаніями:

$$u_1, v_1, w_1,$$

въ преломленномъ съ продольными колебаніями:

$$u_{11}, v_{11}, w_{11},$$

косинусы направленія колебаній соотвѣтственно чрезъ

$$A', B', C'; m', n', p'; m'', n'', p''; m'_1, n'_1, p'_1 \text{ и } m_{11}, n_{11}, p_{11};$$

а косинусы направленія самыхъ лучей

$$A, B, C; m, n, p; m'', n'', p''; m_1, n_1, p_1; m_{11}, n_{11}, p_{11}.$$

Тогда всѣ u, v, w выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$u = A'.I.\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t-\delta)\text{ [1]};\quad v = B'.I.\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t-\delta);$$

$$w = C'.I.\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\omega t-\delta);$$

$$u' = m'.I'.\sin\frac{2\pi}{\lambda'}(\omega' t-\delta');\quad v' = n'.I'.\sin\frac{2\pi}{\lambda'}(\omega' t-\delta');$$

$$w' = p'.I'.\sin\frac{2\pi}{\lambda'}(\omega' t-\delta');$$

$$u_1 = m'_1.I_1.\sin\frac{2\pi}{\lambda_1}(\omega_1 t-\delta_1);\quad v_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$w_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$u'' = m''.I''.\sin\frac{2\pi}{\lambda''}(\Omega t-\delta'');\quad v'' = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$w'' = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

[1] Это суть частные интегралы тѣхъ дифференціальныхъ уравненій, которыя существуютъ для всѣхъ точекъ внутри срединъ.

$$u_{,,} = m_{,,} . I_{,,} . \sin \frac{2\pi}{\lambda_{,,}} (\Omega_{,} t - \delta_{,,}); \quad v_{,,} = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$w_{,,} = \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

при чемъ буквами

$$I, I', \ldots, \lambda, \lambda', \ldots, \omega, \omega', \ldots$$

означены соотвѣтственно амплитуды всѣхъ колебаній, длины волнъ и скорости ихъ, а количества

$$\delta, \delta', \ldots\ldots$$

суть:

$$\delta = Ax + By + Cz$$

$$\delta' = mx + ny + pz$$

$$\delta'' = m''x + n''y + p''z$$

$$\delta_{,} = m_{,}x + n_{,}y + p_{,}z$$

$$\delta_{,,} = m_{,,}x + n_{,,}y + p_{,,}z,$$

т. е. разстоянія плоскихъ волнъ отъ начала координатъ, которое есть точка паденія.

4. Теперь замѣтимъ, что составляющія колебаній частицы на границѣ въ верхней срединѣ будутъ:

$$u + u' + u'', \quad v + v' + v'', \quad w + w' + w'',$$

а въ нижней:

$$u_{,} + u_{,,}, \quad v_{,} + v_{,,}, \quad w_{,} + w_{,,}.$$

Подставляя значенія u, v, w,...... въ выраженія для упругихъ силъ[1] и предполагая, что упругость эфира на границѣ срединъ одна и та-же, изъ уравненій (I) и (II) § 2 находимъ равенства, которыя должны существовать для всѣхъ значеній

[1] См. напр. *Clebsch*'a Theorie der El. S. 48, причемъ одинъ коэффиціентъ принятъ здѣсь равнымъ 1-цѣ.

аргументовъ подъ знаками синусовъ и косинусовъ; поэтому, называя эти аргументы буквами Q, Q',..., должны имѣть:

$$Q = Q' = Q'' = Q_{,} = Q_{,,} \ldots \ldots \text{ (a).}$$

Эти равенства должны существовать для всѣхъ значеній времени t, а потому, полагая въ нихъ

$$t = 0,$$

находимъ:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta'}{\lambda'} = \frac{\delta''}{\lambda''} = \frac{\delta_{,}}{\lambda_{,}} = \frac{\delta_{,,}}{\lambda_{,,}}. \qquad (1)$$

Сокращая теперь въ (a) равныя отношенія (1), имѣемъ:

$$\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\omega'}{\lambda'} = \frac{\Omega}{\lambda_{,}} = \frac{\omega'}{\lambda'} = \frac{\Omega_{,}}{\lambda_{,,}} \qquad (2)$$

Но ясно, что

$$\omega' = \omega$$

слѣдовательно и

$$\lambda' = \lambda,$$

а потому (2) можно написать въ видѣ:

$$\lambda_{,} = \omega_{,}\tau, \quad \lambda'' = \Omega\tau, \quad \lambda_{,,} = \Omega_{,}\tau, \ldots \ldots \text{ (2 bis)}$$

гдѣ

$$\tau = \frac{\lambda}{\omega}\text{ [1]}.$$

Подставляя въ (1), имѣемъ

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{\delta'}{\omega} = \frac{\delta''}{\Omega} = \frac{\delta_{,}}{\omega_{,}} = \frac{\delta_{,,}}{\Omega_{,}}. \qquad \text{(1 bis)}$$

Если теперь, пользуясь уравненіемъ (III), исключимъ z изъ всѣхъ δ и подставимъ въ уравненіе (1 bis), то получимъ равенства вида

[1] τ есть время одного колебанія частицы эфира.

$$Mx+Ny=M'x+N'y$$

существующія при всѣхъ значеніяхъ x и y [вслѣдствіе уравненія (III)], а потому

$$M=M', \quad N=N'$$ [1]

составляя эти количества M, N.... получимъ четыре равенства, изъ которыхъ достаточно разсмотрѣть одно.

Разсмотримъ равенство

$$\frac{\delta}{\omega}=\frac{\delta_1}{\omega_1}.$$

Имѣемъ:

$$\omega(m_1C_1-A_1p_1)=\omega_1(AC_1-A_1C),$$

$$\omega(n_1C_1-B_1p_1)=\omega_1(BC_1-B_1C),$$

$$\omega(m_1B_1-n_1A_1)=\omega_1(AB_1-A_1B).$$

Такъ какъ множители при ω въ лѣвыхъ частяхъ пропорціональны косинусамъ направленія нормала къ плоскости преломленія[2], а множители при ω_1 въ правыхъ частяхъ—косинусамъ направленія нормала къ плоскости паденія, то заключаемъ: I) *нормалы къ преломленнымъ волнамъ лежатъ въ плоскости паденія*, или *плоскія преломленныя волны перпендикулярны къ плоскости паденія. Это есть въ общей формѣ первый законъ преломленія.*

Далѣе, складывая квадраты тѣхъ-же равенствъ, послѣ извѣстнаго преобразованія, находимъ:

$$\omega^2\sin^2 r=\omega_1^2.\sin^2 i$$

---

[1] Частныя рѣшенія $M=M'=N=N'=0$, ясно, заключаются въ написанномъ общемъ.

[2] Подъ плоскостью преломленія здѣсь подразумѣвается плоскость нормала къ границѣ средины и нормала къ плоской преломленной волнѣ.

или

$$(\mathrm{II})\quad \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\omega}{\omega_{\prime}}$$

это *второй законъ преломленія въ общей формѣ;* при этомъ i (уголъ паденія) и r (уголъ преломленія)[1] опредѣляются равенствами:

$$\cos r = A_{\prime} m_{\prime} + B_{\prime} n_{\prime} + C_{\prime} p_{\prime}$$

$$\cos i = A_{\prime} A + B_{\prime} B + C_{\prime} C.$$

Соотношенія подобныя (II) получаются и для остальныхъ волнъ, при чемъ для отраженныхъ волнъ съ поперечными колебаніями получили бы:

$$\sin i' = \sin i$$

$$\cos i' = -\cos i$$

т. е.

$$i' = \pi - i$$

законъ отраженія.

5. Подставляя теперь значенія u, u',.... въ первую формулу группы (I) и пользуясь равенствами для Q имѣемъ послѣ небольшого преобразованія

$$A.SA_{\prime}A' + A'.SAA_{\prime} + mH.SA_{\prime}m' + m'H.SA_{\prime}m +$$
$$\frac{2m'' K}{\Omega} SA_{\prime}m'' + \frac{KE}{\Omega} A_{\prime} = \frac{m_{\prime}G}{\omega_{\prime}} SA'm_{\prime} + \frac{m_{\prime}'G}{\omega_{\prime}} SA_{\prime}m_{\prime} +$$
$$\frac{2m_{\prime\prime}L}{\Omega} SA_{\prime}m_{\prime\prime} + \frac{LE}{\Omega_{\prime}} A_{\prime}$$

гдѣ значеніе S понятно, а H, K, L, G суть отношеніе амплитудъ къ амплитудѣ падающаго луча.

---

[1] Здѣсь уголъ преломленія есть уголъ между нормалами къ плоскости раздѣла и плоской преломленной волнѣ.

Если теперь положимъ

$$SAA' = \cos\psi, \quad SA_{,}m' = \cos\psi', \quad SA_{,}m_{,}' = \cos\psi_{,},$$

причемъ $\psi, \psi', \psi_{,}$ суть углы между нормаломъ къ поверхности раздѣла и направленіями колебаній въ падающемъ, отраженномъ и преломленномъ лучахъ (съ поперечными колебаніями), и замѣтимъ, что

$$SAA_{,} = \cos i, \quad SA_{,}m = -\cos i, \quad SA_{,}m'' = \cos i_{,}, \quad SA_{,}m_{,} = \cos r,$$

$$SA_{,}m_{,,} = \cos r_{,}, \quad \cos\psi = \sin\phi.\sin i, \quad \cos\psi' = \sin\phi'.\sin i,$$
$$\cos\psi_{,} = \sin\phi_{,}.\sin r\ [1],$$

то получимъ:

$$A\sin\phi.\sin i + A'.\cos i + (m\sin\phi'.\sin i - m'\cos i).\,H + \frac{2m''K}{\Omega}\cos i_{,} + \frac{KE}{\Omega}A_{,} = \frac{m_{,}\sin\phi_{,}\sin r + m_{,}'\cos r}{\omega_{,}}R + \frac{2m_{,,}L\cos r_{,}}{\Omega_{,}} + \frac{LEA_{,}}{\Omega_{,}} \qquad (1)$$

Также:

$$B\sin\phi.\sin i + B'\cos i + (n\sin\phi'.\sin i - n'\cos i).\,H + \frac{2n''K}{\Omega}\cos i_{,} + \frac{KE}{\Omega}B_{,} = \frac{n_{,}\sin\phi_{,}\sin r + n_{,}'\cos r}{\omega_{,}}G + \frac{2n_{,,}L\cos r_{,}}{\Omega_{,}} + \frac{LEB_{,}}{\Omega_{,}} \qquad (2)$$

$$C\sin\phi.\sin i + C'\cos i + (p.\sin\phi'.\sin i - p'\cos i).\,H + \frac{2p''K}{\Omega}\cos i_{,} + \frac{KE}{\Omega}C_{,} = \frac{p_{,}\sin\phi_{,}\sin r + p_{,}'\cos r}{\Omega_{,}}G + \frac{2p''L\cos r_{,}}{\Omega_{,}} + \frac{LEC}{\Omega_{,}} \qquad (3)$$

---

[1] $\phi, \phi', \phi_{,}$ суть азимуты плоскостей поляризацій падающаго, отраженнаго и преломленнаго лучей.

Подставляя въ уравненія (II) значенія u, u',... по приведеніи получимъ:

$$A' + m'H + m''K = m_{,}'G + m_{,,}L \qquad (4)$$

$$B' + n'H + n''K = n_{,}'G + n_{,,}L \qquad (5)$$

$$C' + p'H + p''K = p_{,}'G + p_{,,}L \qquad (6)$$

Система уравненій (1)—(6) и есть упрощенная общая система [1].

Умножая теперь уравненія (1), (2), (3) по порядку на

$$A_{,}, B_{,}, C_{,},$$

потомъ на

$$A_{,,}, B_{,,}, C_{,,},$$

и складывая результаты, получимъ:

$$2\sin\phi . \sin i . \cos i - 2H\sin\phi' . \sin i \cos i + \frac{2K\cos^2 i_{,}}{\Omega} +$$

$$+ \frac{KE}{\Omega} = \frac{2\sin\phi_{,}\sin r\cos r}{\Omega} G + \frac{2L\cos^2 r}{\Omega_{,}} + \frac{LE}{\Omega} \qquad (\alpha)$$

$$\cos\phi . \cos . i - H\cos\phi' \cos i = \frac{\cos\phi_{,} \cos r}{\Omega} G. \qquad (\beta)$$

Поступая также съ группой уравненій (4), (5), (6), находимъ:

$$\sin\phi . \sin i + H\sin\phi' . \sin i + K\cos i_{,} = G\sin\phi_{,} \sin r +$$
$$+ L\cos r_{,} \qquad (\gamma)$$

$$\cos\phi + H\cos\phi' = G\cos\phi_{,} \qquad (\delta)$$

Если умножимъ уравненія (1), (2) (3) на

$$A'', B'', C'',$$

[1] Авторъ нашелъ возможность приложить ее къ кристаллическимъ срединамъ.

гдѣ A'', B'', C'' суть косинусы направленія слѣда плоскости паденія на плоскости раздѣла и сложимъ, то получимъ:

$$\sin\phi(\sin^2 i-\cos^2 i)+H\sin\phi'(\sin^2 i-\cos^2 i)+\frac{2K\cos i_{,}\sin i_{,}}{\Omega}=$$

$$=\frac{\sin^2 r-\cos^2 r}{\omega_{,}}G\sin\phi_{,}+\frac{2L\sin r_{,}\cos r_{,}}{\Omega_{,}}$$

причемъ пользовались равенствами:

$SAA''=\sin i$, $SA''m=\sin i$, $SA''m''=\sin i_{,}$, $SA''m_{,}=\sin r$

$SA''m_{,,}=\sin r_{,}$, $SA_{,,}A''=o$, $SA_{,}A''=o$, $SA'A''=-\sin\phi.\cos i$,

$SA''m'=\sin\phi'\cos i$, $SA''m'_{,}=-\sin\phi_{,}\sin i\cos r$.

При помощи уравненія (γ) предъидущее уравненіе превращается въ слѣдующее:

$$(\sin\phi+H\sin\phi')\frac{\cos^2 i}{\sin i}-K\cos i_1=G\sin\phi_1\frac{\cos^2 r}{\sin r}-L\cos r_{,}. \qquad (\varepsilon)$$

Подобнымъ образомъ уравненія (4), (5), (6) даютъ:

$$(\sin\phi-H\sin\phi')\cos i-K\sin i_1=G\sin\phi_1\cos r-L\sin r_1. \qquad (\lambda)$$

При помощи этого уравненія можно изъ уравненія (α) получить слѣдующее:

$$\frac{K}{\sin i_1}=\frac{L}{\sin r_1}. \qquad (\mu)$$

При помощи же этого уравненія равенство (α) даетъ:

$$(\sin\phi-H\sin\phi')\cos i+K\frac{\cos^2 i}{\sin i}=G\sin\phi_1\cos r+L\frac{\cos^2 r}{\sin r_{,}}.[1] \qquad (\nu)$$

Такимъ образомъ имѣемъ систему шести уравненій съ шестью неизвѣстными:

---

[1] Ср. *Briot* въ Journal de Liouville. T, XII (1867), p. 191, гдѣ получена наша система уравненій на основаніи принципа Коши.

$$H, G, K, L, \phi', \phi_1.$$

Эти уравненія первой степени относительно H, G, K, L и относительно синусовъ и косинусовъ ϕ' и ϕ_1 слѣдовательно имѣемъ *одно рѣшеніе* предложеннаго вопроса[1].

Разсматривая эту систему, видимъ, что уравненія (δ) и (β), которыя даютъ, ясно, напряженности лучей отраженныхъ и преломленныхъ, поляризованныхъ въ первомъ азимутѣ, не заключаютъ K или L, т. е. лучей съ продольными колебаніями,— результатъ, который можно было предвидѣть à priori.

Далѣе, уравненія (γ), (ε), (λ) и (μ) даютъ напряженности лучей, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ, и они зависятъ отъ лучей съ продольными колебаніями, что тоже можно было предвидѣть à priori.

6. Рѣшимъ теперь систему уравненій (β)—(μ). Опредѣлимъ сначала амплитуды отраженныхъ и преломленныхъ лучей, поляризованныхъ въ первомъ азимутѣ, т. е. рѣшимъ сначала уравненія (δ) и (β) предъидущаго параграфа[2].

Примемъ въ нихъ за неизвѣстныя $H\cos\phi'$ и $G\cos\phi_{,}$.

Находимъ, введя вмѣсто $\omega_{,}$ его значеніе изъ уравненія (II) § 4.

$$H\cos\phi' = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}.\cos\phi, \tag{1}$$

$$G\cos\phi_{,} = \frac{2\sin r.\cos i}{\sin(i+r)}.\cos\phi, \tag{2}$$

Первое изъ этихъ уравненій показываетъ, пользуясь замѣчаніемъ § 5 о разности фазъ, что отраженный лучъ различается въ фазѣ отъ падающаго на π, т. е. можетъ теряться при отраженіи

---

[1] Въ этихъ уравненіяхъ измѣненія фазъ должно относить къ амплитудамъ.

[2] Замѣтимъ, что эти уравненія такого-же вида, какъ и у Френеля.

$$\pi : \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\lambda}{2}$$

половина волны — результатъ извѣстный Фрэнелю.

Такимъ образомъ колебанія въ отраженномъ и преломленномъ лучахъ будутъ, называя ихъ h_1 и g_1—

$$h_1 = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} . J\cos\phi . \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(t - x\sin i + z\cos i + \frac{\lambda}{2}\right) \quad (1')$$

$$g_1 = \frac{2\sin r . \cos i}{\sin(i+r)} . J\cos\phi . \sin\frac{2\pi}{\lambda_1}\left(\omega_, t - x\sin r - z\cos r\right) \quad (2')$$

Изслѣдованіемъ формулъ (1) и (2) заниматься не буду, ибо оно очень просто.

Зная амплитуды изъ (1) и (2), знаемъ и напряженности, ибо послѣднія пропорціональны квадратамъ первыхъ.

7. Опредѣлимъ теперь амплитуды колебаній въ лучахъ, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ; для чего рѣшимъ уравненія (γ), (ε), (λ) и (μ) § 5.

Положимъ для краткости письма:

$$H\sin\phi' = h\sin\phi; \qquad K = k\sin\phi;$$

$$G\sin\phi_, = g\sin\phi; \qquad L = l\sin\phi;$$

тогда сказанныя уравненія превратятся въ слѣдующія:

$$1 - h - \frac{\sin i_,}{\cos i} k = \frac{\cos r}{\cos i} g - \frac{\sin r_,}{\cos i} l \quad (1)$$

$$1 + h + \frac{\cos i_,}{\sin i} k = \frac{\sin r}{\sin i} g + \frac{\cos r_,}{\sin i} l \quad (2)$$

$$1 + h - \frac{\cos i_, \sin i}{\cos^2 i} h = \frac{\cos^2 r \sin i}{\sin r \cos i} g - \frac{\cos r_, \sin i}{\cos^2 i} l \quad (3)$$

$$\frac{k}{\sin i_,} = \frac{l}{\sin r_,} . \quad (4)$$

Складывая (3) и (1), по приведеніи находимъ:

$$-\sin(i+i_,).k + \sin(i+r_,).l = \frac{\cos r . \sin(i+r)}{\sin r} . g - 2\cos^2 i . \quad (m)$$

Складывая же (2) и (1), находимъ:

$$+\cos(i+i_,).k-\cos(i+r_,)\,l=\sin(i+r_,).g-2\sin i.\cos i. \quad \text{(n)}$$

Опредѣляя изъ уравненій (m) и (n) количества k и l, находимъ:

$$\sin(r_,-i_,).\,k=\frac{\sin(i+r)}{\sin r}\cos(i-r+r_,)g-2\cos i.\cos r_,$$

$$\sin(r_,-i_,)l=\frac{\sin(i+r)}{\sin r}\cos(i-r+i_,)g-2\cos i.\cos i_,$$

отсюда вслѣдствіе равенства:

$$k.\sin r_,=l.\sin i_,$$

находимъ:

$$\frac{\sin(i+r)}{\sin r}g\left\{\sin r_,\cos(i-r+r_,)-\sin i_,\cos(i-r+i_,)\right\}=$$

$$2\cos i(\sin r\cos r_,-\sin i_,\cos i_,),$$

но

$$\sin r_,.\cos(i-r+r_,)-\sin i_,.\cos(i-r+i_,)=\cos(i-r_,)-$$

$$(\sin r_,.\cos r_,-\sin i_,\cos i_,)-\sin(i-r)(\sin^2 r_,-\sin^2 i_,)=$$

$$\sin(i_,-r_,)[\sin(i-r).\sin(i_,+r_,)-\cos(i-r).\cos(i_,-r_,)],$$

ибо

$$\sin r_,\cos r_,-\sin i_,\cos i_,=-\sin(i_,-r_,).\cos(i_,+r_,) \quad (\alpha)$$

$$\sin^2 r_,-\sin^2 i_,=-\sin(i_,-r_,).\sin(i_,+r_,); \quad (\beta)$$

слѣдовательно:

$$g=\frac{2\sin r.\cos i}{\sin(i+r)\sin(i-r)[\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_,+r_,)]}. \quad (\mathrm{I}')$$

Для опредѣленія h проще поступать слѣдующимъ образомъ: исключимъ g изъ уравненій (1) и (2), потомъ изъ уравненій (1) и (3); тогда найдемъ слѣдующія два уравненія:

$$\sin(i-r)+h\sin(i+r)+k.\cos(r-i_,)=l\cos(r-r_,) \quad \text{(p)}$$

$$\sin(i-r)-h.\sin(i+r)+\frac{\sin i}{\cos i}k.\sin(r-i_{,})=$$
$$=\frac{\sin i}{\cos i}l\sin(r-r_{,}). \qquad (q)$$

Исключая k изъ равенствъ (p) и (q), при помощи уравненія (4) находимъ, пользуясь соотношеніями (α) и (β):

$$\sin(i-r)+h\sin(i+r)=-\frac{\sin(i_{,}-r_{,}).\cos(i_{,}+r_{,}-r)}{\sin r_{,}}l, \qquad (\nu)$$

$$\sin(i-r)-h\sin(i+r)=\frac{\sin(i_{,}-r_{,})\sin(i_{,}+r_{,}-r).\sin i}{\sin r_{,}\cos i}l. \qquad (\varsigma)$$

Исключая дѣленіемъ количество l, находимъ:

$$\frac{\sin(i-r)+h\sin(i+r)}{\sin(i-r)-h\sin(i+r)}=-\frac{\cos i\cos(i_{,}+r_{,}-i)}{\sin i\sin(i_{,}+r_{,}-i)}.$$

Отсюда при помощи соотношеній (α) и (β) получимъ:

$$h.\sin(i+r).\sin(i-r).\cos(i_{,}+r_{,})\{\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})+\operatorname{ctg}(i-r)\}=$$
$$=-\cos(i_{,}+r_{,})\sin(i-r_{,}).\sin(i+r)\{\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})+\operatorname{ctg}(i+r)\}$$

и окончательно:

$$h=\frac{\operatorname{ctg}(i+r)+\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})}{\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})}. \qquad (\mathrm{II}')$$

Возстановляя значенія h и g въ (I') и (II'), имѣемъ:

$$H\sin\phi'=\frac{\operatorname{ctg}(i+r)+\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})}{\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})}\sin\phi \qquad (\mathrm{I})$$

$$G\sin\phi_{,}=\frac{2\sin r.\cos i.\sin\phi.}{\sin(i+r)\sin(i-r)[\operatorname{ctg}(i-r)-\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})]}. \qquad (\mathrm{II})$$

Количества $K_{,}$ и L опредѣлять не будемъ, такъ-какъ они не нужны намъ въ разсматриваемомъ вопросѣ, хотя для ихъ опредѣленія все необходимое заключается въ предъидущихъ формулахъ.

Формулы (I) и (II) даютъ амплитуды отраженныхъ и преломленныхъ лучей, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ.

(7 bis) Изъ системы уравненій (1, 2, 3, 4) можно получать еще другую, очень удобную для опредѣленія h и g.

Подставимъ значеніе l изъ (4) въ (1), (2) и (3); по приведеніи получимъ:

$$(1-h)\cos i - \frac{kp.\sin(i_,-r_,)}{\sin i_,} = g\cos r \qquad \text{(a)}$$

$$(1+h)\sin i - \frac{kq.\sin(i_,-r_,)}{\sin i_,} = g\sin r \qquad \text{(b)}$$

$$(1+h)\frac{\cos^2 i}{\sin i} - \frac{kq\sin(i_,-r_,)}{\sin i_,} = g\frac{\cos^2 r}{\sin r}, \qquad \text{(c)}$$

гдѣ

$$p = \sin(i_,+r_,), \quad q = \cos(i_,+r_,).$$

Опредѣлимъ изъ (a):

$$\frac{k.\sin(i_,-r_,)}{\sin i} = \frac{(1-h).\cos i}{p} - \frac{g\cos r}{p},$$

подставляемъ въ (b) и (c), полагая $\frac{p}{q} = \operatorname{tg}(i_,+r_,) = \operatorname{tg}\gamma$, находимъ:

$$\cos(i-\gamma) - h\cos(i+\gamma) = g.\cos(r-\gamma) \qquad \text{(d)}$$

$$\left[-\sin(i-\gamma) + h\sin(i+\gamma)\right].\frac{\cos i}{\sin i} = -g.\sin(r-\gamma)\frac{\cos r}{\sin r}. \qquad \text{(c)}$$

Умножая теперь (d) на $\frac{\cos i}{\sin i}$ и складывая съ (e), по сокращеніи на $\cos\gamma$, находимъ:

$$1 + h = g\frac{\sin i}{\sin r}. \qquad \text{(f)}$$

Такимъ образомъ имѣемъ два уравненія:

1) $\sin\phi + H\sin\phi' = G\sin\phi_, . \frac{\sin i}{\sin r}$

2) $\sin\phi.\cos(i-\gamma)-H\sin\phi'.\cos(i+\gamma)=G\sin\phi_{,}.\cos(r-\gamma)$ да еще два[1] уравненія § 5, изъ которыхъ только одно (2) заключаетъ количество γ.

Рѣшеніе уравненій (1) и (2) настоящаго § легко. Умножимъ (1) на $\cos(i+\gamma)$ и сложимъ со (2), найдемъ:

$$G\sin\phi_{,}=\frac{2\cos i\sin r\sin\phi\cos\gamma}{[\sin i.\cos(i+\gamma)+\sin r.\cos(r-\gamma)]}$$

или раздѣляя на $\cos\gamma$:

$$G\sin\phi_{,}=\frac{2\cos i.\sin r.\sin\phi}{\sin(i+r).\sin(i-r)[\operatorname{cotg}(i-r)-\operatorname{tg}\gamma]}.$$

Подставляя въ (1)

$$H.\sin\phi'=\frac{[\operatorname{cotg}(i+r)+\operatorname{tg}\gamma]\sin\phi}{\operatorname{cotg}(i+r)-\operatorname{tg}\gamma}.$$

8. Лучи съ продольными колебаніями, входящія въ формулы (I) и (II), можно при помощи нѣкоторыхъ предположеній исключить.

При помощи соотношеній § 4 имѣемъ:

$$\sin i_{,}=\Omega.\sin i,\qquad \cos i_{,}=-\sqrt{1-\Omega^2\sin^2 i},$$
$$\sin r_{,}=\Omega_{,}.\sin i,\qquad \cos r_{,}=\sqrt{1-\Omega_{,}^2\sin^2 i}.$$

Найдемъ далѣе:

$$\operatorname{tg}(i_{,}+r_{,})=C_{,}\sqrt{-1},\tag{1}$$

гдѣ

$$C_{,}=\eta.\sin i\,*$$

$$\eta=\frac{\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega^2}}-\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega_{,}^2}}}{\sin^2 i+\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega^2}}\sqrt{\sin^2 i-\frac{1}{\Omega_{,}^3}}}$$

[1] Именно (β) и (δ).

* η есть коеффиціентъ эллиптичности Коши, названный такъ Жаменомъ.

Полагая Ω и $\Omega_{,}$ безконечно — большими[1], видимъ, что

$$\eta = 0.$$

Количеству η можно дать иной видъ. Именно, не дѣлая относительно Ω и $\Omega_{,}$ предъидущаго предположенія и зная, что

$$\Omega = \sqrt{\frac{E+2}{\rho}}\ ,\ \Omega_{,} = \sqrt{\frac{E+2}{\rho_{,}}},$$

гдѣ ϱ и $\varrho_{,}$ — плотности эфира въ обѣихъ срединахъ на границѣ, имѣемъ:

$$\eta = \frac{\sqrt{E+2}\left\{\sqrt{(E+2)\sin i - \rho} - \sqrt{(E+2)\sin^2 i - \rho_{,}}\right\}}{\sin i\left\{\sqrt{E+2} + \sqrt{(E+2)\sin i - \rho}\sqrt{(E+2)\sin^2 i - \rho'}\right.}\ . \qquad (6)$$

Если предположимъ, что плотности ϱ и $\varrho_{,}$ крайне мало отличны одна отъ другой[2], то количество η будетъ очень малое и имъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно пренебречь.

Можно сдѣлать другое предположеніе о лучахъ съ продольными колебаніями; допустимъ, что они поглощаются 2-ою средой, тогда, какъ это видно изъ формы колебаній:

$$\sin i_{,} = \alpha\sqrt{-1}\ ,\ \sin r_{,} = \beta\sqrt{-1}.$$

При помощи этихъ положеній

$$\operatorname{tg}(i_{,} - r_{,}) \text{ принимаетъ видъ } C\,.\sqrt{-1}\,,$$

аналогичный формулѣ (1).

9. Подставляя значеніе $\operatorname{tg}(i_{,} + r_{,})$ конца предъидущаго параграфа въ формулы (I′) и (II′) § 7, имѣемъ:

$$h = \frac{\operatorname{ctg}(i+r) + C\sqrt{-1}}{\operatorname{ctg}(i-r) - C\sqrt{-1}} \qquad (1)$$

$$g = \frac{2\sin r\,.\,\cos i}{\sin(i+r)\,.\,\sin(i-r)[\operatorname{ctg}(i-r) - C\sqrt{-1}]} \qquad (2)$$

---

[1] Это предположеніе принадлежитъ Коши.

[2] Ясно, что это предположеніе весьма вѣроятно только для нѣкоторыхъ срединъ, но не для всѣхъ.

Для толкованія этихъ формулъ воспользуемся теоремой, доказанной еще Фрэнелемъ. Теорема эта состоитъ въ слѣдующемъ.

Если колебанія частицы выражаются формулой вида

$$F + F_{,}\sqrt{-1},$$

гдѣ F и $F_{,}$ суть дѣйствительныя количества, то это колебаніе можно разсматривать, какъ составленное изъ двухъ другихъ, перпендикулярныхъ одно другому; величина одного F, а другаго $F_{,}$, такъ что искомое колебаніе, какъ равнодѣйствующее, будетъ равно

$$\sqrt{F^2 + F_{,}^2}$$

и разность фазъ обоихъ колебаній, называя ее Δ, будетъ опредѣляться формулой:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{F_{,}}{F}.$$

Примѣняя эту теорему[1] къ выраженіямъ h и g, находимъ, что амплитуда отраженнаго луча будетъ, называя ее h':

$$h' = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2(i+r)+C^2}{\operatorname{ctg}^2(i-r)+C^2}} \quad (3), \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{C[\operatorname{ctg}(i+r)+\operatorname{ctg}(i+r)]}{\operatorname{ctg}(i+r)\operatorname{ctg}(i-r)-C^2}.$$

Но $\operatorname{tg}\Delta$ можно преобразовать. Дѣйствительно, написавъ его въ видѣ:

$$\operatorname{tg}\Delta = -\frac{\dfrac{\operatorname{ctg}(i-r)+\operatorname{ctg}(i+r)}{C}}{1-\dfrac{\operatorname{ctg}(i-r).\operatorname{ctg}(i+r)}{C^2}}$$

и положивъ, что всегда возможно:

---

[1] Здѣсь амплитуда имѣетъ видъ: $\dfrac{A+B\sqrt{-1}}{A_{,}+B_{,}\sqrt{-1}}$, но это все равно, какъ не трудно убѣдиться: $\dfrac{AA_{,}+BB_{,}}{A_{,}^2+B_{,}^2}+\dfrac{BA_{,}-AB}{A_{,}^2+B_{,}^2}\sqrt{-1}=F+F_{,}\sqrt{-1}.$

$$-\frac{\operatorname{ctg}(i-r)}{C}=\operatorname{ctg}u,\ -\frac{\operatorname{ctg}(i+r)}{C}=\operatorname{ctg}v,$$

имѣемъ

$$\operatorname{tg}\Delta=\operatorname{tg}(u+v),$$

т. е.

$$\Delta=\pi+u+v \tag{4}$$

или

$$\Delta=u+v^{*}. \tag{4'}$$

Подобнымъ образомъ для преломленнаго луча имѣемъ

$$g'=\frac{2\sin r\,.\cos i}{\sin(i+r)\,.\sin(i-r)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2(i-r)+C^2}} \tag{5}$$

и

$$\operatorname{tg}\Delta'=C\,.\operatorname{tg}(i-r). \tag{6}$$

Такимъ образомъ отраженный и преломленный лучи поляризованы эллиптически.

Полагая теперь количество C очень малымъ, что̀ для нѣкоторыхъ срединъ справедливо изъ (3), (4), (5) и (6),

$$h'=\frac{\operatorname{ctg}(i+r)}{\operatorname{ctg}(i-r)}=\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)},\qquad \Delta=\pi$$

$$g'=\frac{2\sin r\,.\cos i}{\sin(i+r)\sin(i-r)},\qquad \Delta'=0$$

Такимъ образомъ заключаемъ, что и *при отраженіи свѣта, поляризованнаго во второмъ азимутѣ, можетъ теряться половина волны* (см. § 6).

Возстановляя значеніе h' и g', имѣемъ слѣдовательно:

$$H\sin\phi'=\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}\,.\sin\phi \tag{I}$$

* При $\Delta=u+v$ не теряется половина волны.

$$G\sin\varphi_{,}=\frac{2\sin r\,.\cos i}{\sin(i+r)\,\sin(i-r)}.\sin\varphi. \quad \text{(II)}$$

Эти формулы найдены Фрэнелемъ.

Формулы же для колебаній въ отраженномъ и преломленномъ лучахъ, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ будутъ:

$$h_2=\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}J.\sin\varphi.\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(t-x\sin i+z\cos i+n\frac{\lambda}{2}\right)^{*} \quad \text{(I)}$$

$$g_2=\frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)\sin(i-r)}J.\sin\varphi.\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\omega_{,}t-x\sin r-z\cos r\right) \quad \text{(II)}$$

10. Опредѣлимъ теперь азимуты плоскостей поляризаціи лучей, отраженныхъ и преломленныхъ.—Раздѣляя соотвѣтственно формулы (I) и (II) предъидущаго параграфа на формулы (1) и (2) § 6, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}\operatorname{tg}\varphi \quad \text{(I)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{,}=\frac{1}{\cos(i-r)}.\operatorname{tg}\varphi \quad \text{(II)}$$

Эти формулы были найдены Д. Брьюстеромъ въ 1815 году опытнымъ путемъ.

11. Формула (I) § 9 показываетъ, что если

$$\text{(a)} \quad .\;.\;.\;.\quad i+r=\frac{\pi}{2},$$

то свѣтъ, поляризованный во второмъ азимутѣ, не отражается, если углы паденія и преломленія удовлетворяютъ соотношенію (а). Изъ него и уравненія (II) § 6 находимъ:

$$\operatorname{tg}r=\frac{1}{\omega_{,}}$$

—законъ, найденный Брьюстеромъ.

---

* n равно 0 или 1-цѣ.

III.

12. Перейдемъ теперь къ срединамъ непрозрачнымъ, или поглощающимъ свѣтовыя колебанія.

Чтобы можно было примѣнить найденныя формулы къ срединамъ, поглощающимъ свѣтъ (непрозрачнымъ), стоитъ только выразить математически тотъ фактъ, что свѣтовыя колебанія въ такихъ срединахъ, проникая въ глубь среды, ослабляются, т. е. амплитуды колебаній уменьшаются болѣе или менѣе быстро; это погашеніе свѣта выражается, какъ показываютъ общія уравненія распространенія свѣтовыхъ колебаній, тѣмъ, что амплитуда колебаній не есть постоянная величина, а величина вида

$$ae^{-p\delta},$$

гдѣ a и p постоянныя, δ есть глубина, на которую проникаетъ свѣтъ, e — основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ и кромѣ того p — положительное количество.

Чтобы перейдти отъ формулы колебаній вида

$$A\sin(mt-q),$$

гдѣ A и m — постоянныя, q — линейная функція координатъ колеблющейся частицы эфира, къ виду:

$$ae^{-p\delta}\,.\sin\left(m't-q'\right) \tag{I}$$

стоитъ только положить

$$q=\alpha\sqrt{-1}+\beta,$$

гдѣ α и β — линейныя функціи координатъ[1].

[1] При этомъ надо помнить, что если имѣемъ два частныхъ интеграла линейнаго уравненія, то и сумма ихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на нѣкоторыя постоянныя, будетъ интеграломъ уравненія.

Видъ колебаній (I) и есть тотъ, который поглощается срединой въ большей или меньшей степени.

13. Полагаемъ теперь въ формулахъ (1) и (2) § 6, согласно соображеніямъ, развитымъ въ предъидущихъ параграфахъ,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = k.\left(\cos\varepsilon + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varepsilon\right)$$

$$\sin r = \frac{\sin i}{k}\left(\cos\varepsilon - \sqrt{-}\,.\,\sin\varepsilon\right),$$

причемъ по § 4 k и ε — постоянны; также:

$$\cos r = \frac{U.(\sin u + \sqrt{-1}.\sin u)}{k(\cos\varepsilon + \sqrt{-1}.\sin\varepsilon)} = \frac{U}{k}\left[\cos(u-\varepsilon) + \sqrt{-1}.\sin(u-\varepsilon)\right]$$

и U, u суть количества перемѣнныя; причемъ вслѣдствіе равенства

$$\sin^2 r + \cos^2 r = 1,$$

имѣемъ соотношенія

$$\left.\begin{aligned} U^2\cos 2u &= k^2\cos 2\varepsilon - \sin^2 i \\ U^2\sin 2u &= k^2\sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Находимъ сначала для отраженныхъ лучей:

$$h' = \frac{\cos i - U\cos u - U\sin u\sqrt{-1}}{\cos i + U\cos u + U\sin u\sqrt{-1}}.$$

Толкуя эту формулу по способу § 9, имѣемъ для квадрата амплитуды отраженнаго луча (называя эту амплитуду $h_{\prime}$)

$$h_{\prime}^2 = \frac{U^2 + \cos^2 i - 2U\cos u.\cos i}{U^2 + \cos^2 i + 2U\cos u.\cos i}.$$

Полагая здѣсь

$$\frac{2U\cos u\,.\,\cos i}{U^2 + \cos^2 i} = \operatorname{ctg}\psi, \qquad (a)$$

имѣемъ

$$h_{,}^{2} = \operatorname{tg}\left(\psi_{,} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(I)}$$

и для разности фазъ, называя эту послѣднюю буквою $\Delta_{,}$ имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_{,} = \frac{2U\sin u \,.\, \cos i}{U^2 - \cos^2 i}\,. \qquad \text{(b)}$$

Но если положимъ:

$$\frac{\cos i}{U} = \operatorname{tg}\omega_{,} \qquad \text{(c)}$$

то равенства (a) и (b) превращаются въ слѣдующія:

$$\operatorname{ctg}\psi_{,} = \cos u \,.\, \sin 2\omega_{,} \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{tg}\Delta' = \sin u \,.\, \operatorname{tg} 2\omega_{,} \qquad \text{(III)}$$

формулы (I), (II) и (III) даны Коши для металловъ. Такимъ образомъ лучъ, отраженный въ первомъ азимутѣ, есть лучъ эллиптически-поляризованный (въ частныхъ случаяхъ онъ можетъ обращаться въ поляризованный по кругу или по прямой).

14. Лучи, отраженные во второмъ азимутѣ, даютъ:

$$h'' = \frac{(\sin i \cos i - \sin r \,.\, \cos r) + C(\cos^2 r - \cos^2 i)\sqrt{-1}}{(\sin i \,.\, \cos i + \sin r \,.\, \cos r) - C(\cos^2 r + \cos^2 i)\sqrt{-1}}$$

по § 9, форм. 1.

Подставляя сюда значенія $\sin r$ и $\cos r$ изъ предъидущаго параграфа и полагая

$$\left.\begin{aligned} k^2 \,.\, \sin i \,.\, \cos i + Ck^2 \sin^2 i &= E^2 \,.\, \cos i \\ U\sin i \,.\, \cos(2\varepsilon - u) + C\sin^2 i \,.\, \cos 2\varepsilon &= R\cos(2\varepsilon - P) \\ U\sin i \,.\, \sin(2\varepsilon - u) + C\sin^2 i \,.\, \sin 2\varepsilon &= R\sin(2\varepsilon - P) \end{aligned}\right\} \text{(m)}$$

находимъ:

$$h'' = \frac{E^2\cos^2 i - R\cos(2\varepsilon - P.) + \sqrt{-1}.\, R\sin(2\varepsilon - P.)}{E^2\cos i + R\cos(2\varepsilon - P.) - \sqrt{-1}.\, R\sin(2\varepsilon - P.)}$$

Отсюда при помощи соображеній § 9 имѣемъ для опредѣленія амплитуды колебаній въ лучахъ, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ, равенство

$$h^2_{\,2} = \frac{E^4\cos^2 i + R^2 - 2E^2R\cos i.\cos(2\varepsilon - P)}{E^4\cos^2 i + R^2 + 2E^2R\cos i\,\cos(2\varepsilon - P)};$$

но полагая:

$$\frac{2E^2R\cos i.\cos(2\varepsilon - P)}{E^4\cos^4 i + R^2} = \operatorname{ctg}\psi_2 \qquad \text{(a)}$$

имѣемъ по преобразованіи:

$$h^2_{\,2} = \operatorname{tg}\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(I)}$$

Для разности фазъ, называя эту послѣднюю Δ_2, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \frac{2RE^2\cos i\,\sin(2\varepsilon - P)}{E^4\cos^4 i - R^2}.$$

Если положимъ:

$$\frac{R}{E^2\cos i} = \operatorname{tg}\omega_2 \qquad \text{(c)}$$

тогда формулы (a) и (b) обратятся въ слѣдующія:

$$\operatorname{ctg}\psi_2 = \cos(2\varepsilon - P).\sin 2\omega_2 \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \sin(2\varepsilon - P)\operatorname{tg}2\omega_2 \qquad \text{(III)}$$

Формулы (I), (II) и (III) имѣютъ такой-же видъ, какъ и формулы Коши, но—болѣе общія, чѣмъ у него; онѣ обращаются тождественно въ формулы Коши, если положимъ, что весьма возможно въ нѣкоторыхъ случаяхъ,

$$C = 0 \qquad \text{(n)}$$

тогда формулы (m) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} &E^2 = k^2\sin i \\ &R^2 = U^2\sin^2 i, \qquad P = u \end{aligned}\right\} \text{(p)}$$

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{U}{k^2\cos i}. \qquad \text{(c bis)}$$

Формула (I) сохранитъ тотъ-же видъ, только въ ней будетъ:

$$\operatorname{ctg}\psi_2 = \cos(2\varepsilon - u).\sin 2\omega_2 \qquad \text{(II bis)}$$

Для $\operatorname{tg}\Delta_2$ будемъ имѣть формулу:

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \sin(2\varepsilon - u).\operatorname{tg} 2\omega_2 \qquad \text{(III bis)}$$

Эти формулы уже суть формулы Коши[1]; онѣ были подвергнуты опытной повѣркѣ[2]; формулы же (I), (II) и (III) получены здѣсь, кажется, первый разъ.

Такимъ образомъ и здѣсь лучъ является поляризованнымъ эллиптически (въ частныхъ же случаяхъ по кругу или по прямой).

15. Прежде, чѣмъ перейдти къ преломленнымъ лучамъ, опредѣлимъ азимутъ плоскости поляризаціи отраженныхъ лучей и разность ихъ фазъ и примѣнимъ полученныя формулы къ одному важному частному случаю, представляющему возможность опредѣлить путемъ опыта постоянныя количества, входящія въ предидущія формулы.

Назовемъ азимутъ плоскости поляризаціи Φ, тогда

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{h_2}{h_1}$$

или

$$\operatorname{tg}^2\Phi = \frac{h_2^{\,2}}{h_1^{\,2}}$$

Подставляя сюда значенія h^2_2 и h^2_1 изъ двухъ предъидущихъ §§, находимъ:

$$\operatorname{tg}^2\Phi = \frac{\operatorname{tg}\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

---

[1] C. R. T. VIII, p.p. 559—561.

[2] Для металловъ. См. Ann. de Ch. et Ph. 3 série, t. 19. pp. 295—342.

Для удобнаго приложенія къ частнымъ случаямъ этой формулы, ее полезно преобразовать. Опредѣлимъ $\cos 2\Phi$. Имѣемъ сначала

$$\cos 2\Phi = 2\cos^2\Phi - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\Phi} - 1$$

или

$$\cos 2\Phi = \frac{\operatorname{ctg}\psi_1 - \operatorname{ctg}\psi_2}{\operatorname{ctg}\psi_1 . \operatorname{ctg}\psi_2 - 1}.$$

Подставляя сюда значенія $\operatorname{ctg}\psi_1$ и $\operatorname{ctg}\psi_2$ изъ формулъ (a) § 13 и (a) § 14 при предположеніяхъ (p), находимъ

$$\cos 2\Phi = \frac{2U\cos i . \cos u(U^2+k^4\cos^2 i) - 2U\cos i \cos u(U^2+\cos^2 i)}{4U^2\cos^2 i . \cos^2 u(U^2+\sin^2 i) - (U^2+\cos^2 i)(U^2+k^4\cos^2 i)}$$

Развертывая въ числителѣ скобки, вынося $2U\cos i . \cos u$ общимъ множителемъ, а въ выраженіе, остающееся въ скобкахъ, подставляя вмѣсто U^4 его значеніе, изъ равенства (I) § 13 находимъ для числителя $\cos 2\Phi$ слѣдующее выраженіе:

$$-2U\cos u . \cos i . \sin^2 i(k^4 - 2k^2 . \cos^2\varepsilon + 1).$$

Знаменатель получится подобнымъ же образомъ (внося значеніе U^4 и $U^2\cos 2u$), именно онъ будетъ:

$$-(\sin^4 i + U^2\cos^2 i)(k^4 - 2k^2\cos^2\varepsilon + 1);$$

слѣдовательно:

$$\cos 2\Phi = \frac{2U\cos i . \sin^2 i . \cos u.}{U^2\cos^2 i + \sin^4 i}.$$

Но полагая здѣсь

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin^2 i}{U\cos i} \tag{I}$$

выраженіе для $\cos 2\Phi$ значительно упрощается и превращается въ слѣдующее:

$$\cos 2\Phi = \cos u \sin 2\omega \tag{II}$$

Опредѣлимъ теперь разность фазъ лучей h_1 и h_2. Назовемъ эту разность Δ, тогда

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$$

и такъ-какъ Δ_1 и Δ_2 даются посредствомъ тангенсовъ ихъ, то опредѣлимъ $\operatorname{tg}\Delta$. Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\operatorname{tg}\Delta_1 - \operatorname{tg}\Delta_2}{1 + \operatorname{tg}\Delta_1 . \operatorname{tg}\Delta_2}$$

или, подставляя сюда значенія $\operatorname{tg}\Delta_1$ и $\operatorname{tg}\Delta_2$ изъ (b) §§ 13 и 14 въ предположеніи (p) § 14, получаемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2U\cos i . \sin u . [(U^2 - \cos^2 i).(U^2 - \sin^2 i) - (k^4\cos^2 i - U^2)]}{(U^2 - \cos^2 i)(k^4\cos^2 i - U^2) + 4U^2\sin^2 u . \cos^2 i\,(U^2 - \sin^2 i)}.$$

Развертывая скобки и поступая такъ-же, какъ и при вычисленіи $\cos 2\Phi$, находимъ

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sin^2 i\,(k^4 - 2k^2\cos 2\varepsilon + 1)}{U^2\cos^2 i\,(1 - \operatorname{tg}^2\omega)\,(k^4 - 2k^2\cos 2\varepsilon + 1)}\,^*,$$

или окончательно:

$$\operatorname{tg}\Delta = \sin u . \operatorname{tg} 2\omega. \qquad \text{(III)}$$

16. Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующее. Колебанія въ отраженномъ лучѣ состоятъ изъ двухъ; первое есть:

$$u = h\cos\Phi . \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \Delta_1\right),$$

второе:

$$w = h . \sin\Phi . \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \Delta_2\right).$$

Исключая отсюда t, получимъ уравненіе траекторіи частицы эфира въ слѣдующемъ видѣ:

* Трехчленъ можетъ уничтожиться только при k^2 мнимомъ, что не соотвѣтствуетъ дѣйствительности.

$$\frac{u^2}{h^2 \cos^2 \Phi} + \frac{w^2}{h^2 \sin^2 \Phi} - \frac{2uw}{h^2 \sin \Phi . \cos \Phi} \cos \Delta = \sin^2 \Delta$$

Это есть уравненіе эллипсиса, отнесеннаго къ центру; оно будетъ отнесено къ осямъ, если

$$\Delta = \frac{\pi}{2}. \tag{a}$$

Этотъ случай играетъ большую роль на практикѣ, а потому разсмотримъ его [1].

Если $\Delta = \frac{\pi}{2}$, тогда, называя уголъ паденія луча i_0 и другія перемѣнныя количества обозначая указателемъ ($_0$), имѣемъ:

$$\sin u_0 . \operatorname{tg} 2\omega_0 = \infty$$

т. е.

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4}. \tag{b}$$

Далѣе изъ формулы (I) предъидущаго § имѣемъ:

$$U_0 = \sin i_0 . \operatorname{tg} i_0 \tag{c}$$

Формула (II) даетъ:

$$u_0 = 2\Phi_0 \tag{d}$$

Такимъ образомъ видимъ, что, зная изъ опыта i_0, Φ_0, можемъ опредѣлить k и ε по формуламъ (I) § 13.

Разсмотрѣнный случай есть случай главнаго паденія [2].

Вычисленіе k и ε можно совершить по слѣдующимъ формуламъ:

1) Если $u_0 < \frac{\pi}{4_1}$ то, вычисливъ сначала вспомогательный уголъ μ по формулѣ: $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} i_0 . \sqrt{\cos 2u_0}$,

---

[1] Это есть случай главнаго паденія луча.

[2] Всѣ выводы §§ 13, 14, 15 и 16 опытомъ провѣрены Жаменомъ. См. An. de ch. et de ph. 3-me série T. XIX p. 296 — 342 для срединъ металлическихъ.

имѣемъ:

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \sin^2\mu \,.\, \operatorname{tg} 2u_0,$$

$$k^2 \sin 2\varepsilon = \sin^2 i_0 \,.\, \operatorname{tg}^2\mu \,.\, \operatorname{tg}^2 u_0.$$

2) Если $u_0 > \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} i_0 \sqrt{\cos(\pi - 2u_0)}$;

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{\sin^2\mu \,.\, \operatorname{tg}(\pi - 2u_0)}{\cos 2\mu},$$

$$k^2 \,.\, \sin 2\varepsilon = \sin^2 i_0 \,.\, \operatorname{tg}^2\mu \,.\, \operatorname{tg}(\pi - 2u_0).$$

17. Опредѣлимъ теперь амплитуды преломленныхъ лучей.

Положимъ сначала, что рѣчь идетъ о лучѣ, поляризованномъ въ 1-мъ азимутѣ, тогда при помощи формулъ §§ 6, 9 и 13 находимъ:

$$g' = \frac{2\cos i\,(\cos\varepsilon - \sqrt{-1}\,.\sin\varepsilon)}{\cos i\,.\cos\varepsilon + U\cos(u-\varepsilon) + \sqrt{-1}\,(U\sin(u-\varepsilon) - \cos i\,.\sin\varepsilon)},$$

отсюда

$$g^2_1 = \frac{4\cos^2 i}{\cos^2 i + U^2 + 2U\cos i\,.\cos u}. \qquad (1)$$

Эта формула даетъ амплитуду колебаній въ лучахъ, поляризованныхъ въ 1-мъ азимутѣ. Для разности хода получимъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_1 = \frac{-U\sin u}{\cos i + U\cos u}. \qquad (2)$$

Здѣсь, слѣдовательно, опережаетъ второе колебаніе. — Полагая въ (1)

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \sqrt{\frac{\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right)}} \qquad (a)$$

причемъ

$$\operatorname{tg}\varPhi = \cos u \sin 2\omega_1 \qquad (b)$$

т. е.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi_1$$

по формулѣ (II) § 13 и тогда

$$(\alpha_1) \ldots \operatorname{tg} \tau_1 = \sqrt{\frac{\sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right)}},$$

или еще $(\alpha_1) \ldots \cos 2\tau_1 = \cos u \sin 2\omega_1$,

тогда получимъ:

$$g_1^{\,2} = \frac{2U \sin^2 \omega_1}{\cos^2 \tau_1} \qquad (I)$$

§ 13 даетъ:

$$\operatorname{ctg} r . \sin i = U \cos u + U \sin u \sqrt{-1};$$

называя же дѣйствительный уголъ преломленія r_0, можно эту формулу представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\operatorname{ctg} r_0 . \sin i + q\sqrt{-1} = U \cos u + U \sin u \sqrt{-1},$$

откуда

$$U \cos u = \sin i . \operatorname{ctg} r_0. \qquad (\alpha)$$

$$U \sin u = q^{*}. \qquad (\beta)$$

При помощи этихъ соотношеній можно придать формуламъ (I) и (2) видъ формулъ Кеттелера [1]; именно, подставляя въ нихъ (α) и (β), находимъ:

$$g_1^{\,2} = \frac{4 \cos^2 i . \sin^2 r_0}{\sin^2 (i + r_0) + q^2 \sin^2 r_0} \qquad (1 \text{ bis})$$

---

* Количество q есть коэффицентъ поглощенія.

[1] Wiedemann's Annalen. Bd. I. S. 206.

и

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = \frac{q \, . \sin r_0}{\sin (i + r_0)} . \qquad (2 \text{ bis})$$

Такимъ образомъ преломленный лучъ есть эллиптически поляризованный [1].

18. Вычислимъ амплитуду преломленнаго луча, поляризованнаго во второмъ азимутѣ. Имѣемъ по §§ 9 и 13 въ предположеніи

$$C = 0,$$

$$g'' = \frac{4k^2 \cos^2 i}{k^2 \cos i + U \cos (2\varepsilon - u) - U \sin (2\varepsilon - u) . \sqrt{-1}} ,$$

слѣдовательно

$$g^2_{\ 2} = \frac{4k^2 \cos^2 i}{k^4 \cos^2 i + U^2 + 2Uk^2 \cos i . \cos (2\varepsilon - u)} . \qquad (1)$$

Полагая же

$$\operatorname{tg} \tau_2 = \sqrt{\frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{4} \right)}} , \qquad (a)$$

гдѣ

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \cos (2\varepsilon - u) . \sin 2\omega_2 \qquad (b)$$

или по § 14

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \psi_2$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tg} \tau_2 = \sqrt{\frac{\sin \left(\psi_2 - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(\psi_2 + \frac{\pi}{4} \right)}} , \qquad (a')$$

---

[1] Мнѣ неизвѣстно, былъ ли подобный результатъ повѣряемъ опытомъ.

или еще

$$\cos 2\tau_2 = \cos(2\varepsilon - u) \sin 2\omega_2 \qquad (a'')$$

тогда

$$g^2_2 = \frac{2\cos^2\omega_2}{k^2\cos^2\tau_2}. \qquad (I)$$

Для разности хода получаемъ:

$$\operatorname{tg}\Delta_2 = \frac{U\sin(\varepsilon - u) - k^2\cos i.\sin\varepsilon}{U\sin(\varepsilon - u) + k^2\cos i.\sin\varepsilon}. \qquad (II)$$

Чтобы привести формулы (I) и (II) къ виду Кеттелера, надо положить

$$U\cos u = p,\ U\sin u = q,\ k.\cos\varepsilon = a,\ k\sin\varepsilon = b.$$

Такимъ образомъ получаемъ эллиптически поляризованный лучъ.

19. Если C не нуль, то вопросъ предъидущаго § разрѣшается слѣдующимъ образомъ. — Для вычисленія g'' полагаемъ сначала:

$$U\cos u + CU^2\sin i.\sin 2u = Q^2\cos P$$

$$U\sin u - CU^2\sin i.\cos 2u + C\cos^2 i.\sin i = Q^2\sin P;$$

отсюда находимъ

$$U\cos(2\varepsilon - u) + CU^2\sin i.\sin 2(u-\varepsilon) + \\ + C\cos^2 i.\sin i.\sin 2\varepsilon = Q^2\cos(2\varepsilon - P)$$

$$U\sin(2\varepsilon - u) + CU^2\sin i.\cos 2(u-\varepsilon) - \\ - C\cos^2 i.\sin i.\cos 2\varepsilon = Q^2\sin(2\varepsilon - P).$$

При помощи этихъ соотношеній находимъ:

$$g'' = \frac{2k.\cos i(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\sqrt{-1})}{k^2\cos i + Q^2\cos(2\varepsilon - P) - Q^2\sin(2\varepsilon - P)\sqrt{-1}},$$

слѣдовательно

$$g^2_2 = \frac{4k^2 \cos^2 i}{k^4 \cos^2 i + Q^4 + 2k^2 Q^2 \cos i . \cos(2\varepsilon - P)}. \qquad (1)$$

Но если положимъ:

$$\operatorname{tg} \omega'_2 = \frac{Q^2}{k^2 . \cos i}, \qquad (\alpha)$$

тогда послѣ простого преобразованія получимъ:

$$g^2_2 = \frac{2 \cos^2 \omega'_2}{k^2 \cos^2 \tau'_2}. \qquad (a)$$

Для вычисленія τ'_2 можно дать формулу, аналогичную той, которая получена для τ_2.

Дѣйствительно, положимъ:

$$\sin 2\omega_2 . \cos(2\varepsilon - P) = \operatorname{tg} \varphi'_2 \qquad (b)$$

Вычисляя

$$1 - \operatorname{tg} \varphi'_2 \text{ и } 1 + \operatorname{tg} \varphi'_2$$

найдемъ по раздѣлении результатовъ:

$$\operatorname{tg} \tau'_2 = \sqrt{\frac{\cos\left(\varphi'_2 + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\varphi'_2 - \frac{\pi}{4}\right)}} \qquad (c)$$

— формула аналогичная (a') предъидущаго параграфа.

Если сдѣлаемъ $C = 0$, то сейчасъ найденныя формулы обратятся въ формулы предъидущаго параграфа.

20. Разберемъ теперь случай, когда свѣтъ идетъ изъ поглощающей среды въ непоглощающую.

Пусть i будетъ уголъ паденія, r—преломленія; тогда можно положить, согласно § 13:

$$\sin i = \frac{\sin r}{k} (\cos \varepsilon - \sqrt{-1} . \sin \varepsilon). \qquad (\alpha)$$

$$\cos i = \frac{U}{k}\Big[\cos(\varepsilon - u) - \sqrt{-1}\sin(\varepsilon - u)\Big] \qquad (\beta),$$

причемъ k, ε постоянныя количества, а U и u перемѣнныя.

Изъ написанныхъ соотношенiй находимъ:

$$\left.\begin{aligned} U^2\cos 2u &= k^2\cos 2\varepsilon - \sin^2 r \\ U^2\sin 2u &= k^2\sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

ибо

$$\sin^2 i + \cos^2 i = 1.$$

Дѣйствительный показатель преломленiя опредѣлимъ слѣдующимъ образомъ.

Уравненiе (β), раздѣленное на (α) даетъ:

$$\operatorname{ctg} i.\sin r = U\cos u + \sqrt{-1}.\,U\sin u,$$

или:

$$\operatorname{ctg} i_0.\sin r + q.\sqrt{-1}. = U\cos u + \sqrt{-1}.\,U\sin u,$$

гдѣ i_0 — дѣйствительный уголъ паденiя. Отсюда:

$$\operatorname{ctg} i_0 = \frac{U\cos u}{\sin r}. \qquad (\gamma)$$

Опредѣливъ изъ этой формулы i_0, найдемъ показатель преломленiя, равный отношенiю $\frac{\sin i_0}{\sin r}$.

21. Замѣтивъ соотношенiя предъидущаго §, получаемъ амплитуды отраженныхъ и преломленныхъ лучей въ обоихъ азимутахъ совершенно тѣмъ-же путемъ, какимъ онѣ были получены въ §§ 13, 14, 17, 18 и 19.

Именно для лучей, поляризованныхъ въ первомъ азимутѣ, имѣемъ формулы:

$$h_1^2 = \operatorname{tg}\left(f_1 - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\Delta_1 = \sin u.\operatorname{tg} 2w_1 \qquad (2)$$

при чемъ

$$\operatorname{tg} w_1 = \frac{\cos r}{U} \tag{3}$$

и

$$\operatorname{ctg} f_1 = \cos u \,.\, \sin 2w_1 \tag{4}$$

Можно вычислить h_1 иначе. Положимъ:

$$\cos 2t_1 = \cos u \,.\, \sin 2w_1 \tag{5}$$

тогда

$$h_1^2 = \operatorname{tg}^2 t_1 \tag{6}$$

Далѣе:

$$g_1^2 = \frac{2\cos^2 w_1}{\cos^2 t_1}\,. \tag{7}$$

и

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\cos r \,.\, \sin u}{U + \cos r \,.\, \cos u}\,. \tag{8}$$

Для лучей, поляризованныхъ во второмъ азимутѣ, имѣемъ:

$$h_2^2 = \operatorname{tg}\left(f_2 - \frac{\pi}{4}\right), \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} \Delta_2 = \sin(2\varepsilon - u) \,.\, \operatorname{tg} 2w_2 \tag{11}$$

при чемъ:

$$\operatorname{tg} w_2 = \frac{U}{k^2 \cos r}, \tag{12}$$

$$\operatorname{ctg} f_2 = \cos(2\varepsilon - u) \,.\, \sin 2w_2. \tag{13}$$

Для h_2 можно имѣть еще формулу:

$$h_2^2 = \operatorname{tg}^2 t_2, \tag{14}$$

гдѣ

$$\cos 2t_2 = \cos(2\varepsilon - u) \sin 2w_2. \tag{15}$$

Далѣе:

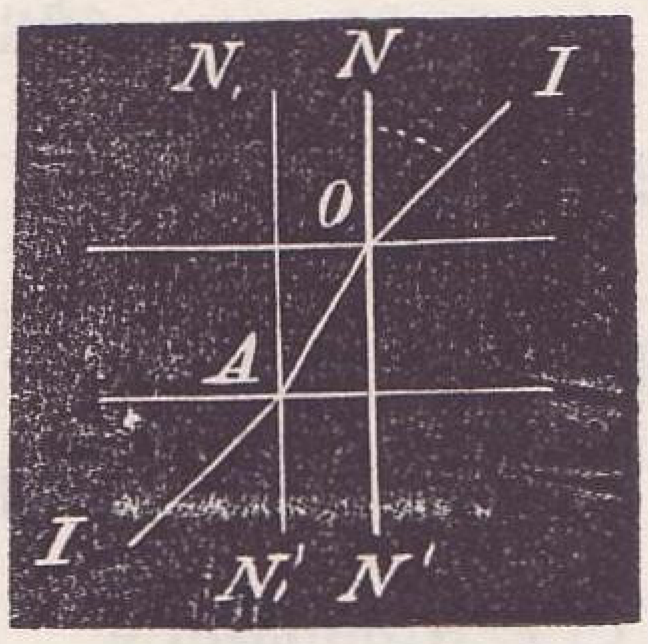
$$g_2^2 = \frac{2k^2 \sin^2 w_2}{\cos^2 t_2} \tag{16}$$

и

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{U \sin \varepsilon - k^2 \cos r \sin(\varepsilon - u)}{U \cos \varepsilon + k^2 \cos r \cos(\varepsilon - u)} \tag{17}$$

Замѣтимъ, что при выводѣ послѣднихъ формулъ предполагалось $C=0$.

22. Приложимъ найденныя формулы къ рѣшенію слѣдующаго вопроса. Свѣтъ проходитъ чрезъ поглощающую его средину (напримѣръ тонкій листокъ металла), которая помѣщена въ непоглощающей (напр. въ воздухѣ). Опредѣлить амплитуду и фазу луча, вышедшаго изъ поглощающей средины.



Пусть уголъ паденія NOJ есть i, амплитуды преломляющаго луча OA, поляризованнаго въ томъ или другомъ изъ главныхъ азимутовъ, будутъ соотвѣтственно g_1 и g_2; амплитуды вышедшаго луча $AJ^1-g_1{}^1$ и $g_2{}^1$, принимая западающій лучъ OA; тогда, если G_1 и G_2 будутъ амплитуды вышедшаго луча, соотвѣтствующаго падающему JO (амплитуда котораго принимается за 1-цу), имѣемъ:

$$G_1=g_1.g_1{}^1 \text{ и } G_2=g_2.g_2{}^1.$$

Подставляя значенія g_1, g_2 изъ §§ 17 и 18, а значенія $g_1{}^1$ и $g_2{}^1$ изъ § 21, находимъ по упрощеніи:

$$G_1=\frac{\sin 2\omega_1}{\cos^2\tau_1}, \tag{1}$$

$$G_2=\frac{\sin 2\omega_2}{\cos^2\tau_2}. \tag{2}$$

Для разности фазъ находимъ:

$$D_1=\delta_1+\delta_1{}' \quad \text{и} \quad D_2=\delta_2+\delta'_2, \text{ гдѣ}$$

$$\operatorname{tg}\delta_1=-\frac{U\sin u}{\cos i+U\cos u}, \qquad \operatorname{tg}\delta_1{}^1=\frac{\cos r.\sin u}{U+\cos r.\cos u},$$

$$\operatorname{tg}\delta_2=\frac{U\sin(\varepsilon-u)-k^2\cos i.\sin\varepsilon}{U\cos(\varepsilon-u)-k^2\cos i.\cos\varepsilon},$$

$$\operatorname{tg}\delta_2{}^1=\frac{U\sin\varepsilon-k^2\cos r.\sin(\varepsilon-u)}{U\cos\varepsilon-k^2\cos r.\cos(\varepsilon-u)}.$$

Замѣтимъ еще одну формулу, которою ниже воспользуемся. Раздѣляя (2) формулу настоящаго параграфа на (1), имѣемъ:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\sin 2\omega_2 \cos^2\tau_1}{\sin 2\omega_1 \cos^2\tau_2}. \tag{a}$$

IV.

23. Такъ-какъ всѣ тѣла болѣе (непрозрачныя) или менѣе (прозрачныя) поглощаютъ падающій на нихъ свѣтъ, то формулы §§ 13 — 22 показываютъ, что отраженіемъ и преломленіемъ свѣтъ вообще поляризуется эллиптически во всѣхъ изотропныхъ тѣлахъ; но если уголъ ε, а слѣдовательно и u очень малъ или нуль, то лучъ поляризуется прямолинейно.

И такъ, *каждая средина должна характеризоваться двумя коеффиціентами* ε и k (§ 13).

Если $\varepsilon=0$, то формулы §§ 13—22 переходятъ въ формулы Фрэнеля, которыя справедливы только для нѣкоторыхъ срединъ [1]. *Средины, считаемыя прозрачными, характеризуются очень малымъ* ε (а слѣдовательно и u), *а непрозрачныя (металлы* напр.) *большимъ* ε (или u). Для повѣрки сдѣланнаго сейчасъ заключенія, я обращусь къ наблюденіямъ Жамена, произведеннымъ имъ надъ цѣлымъ рядомъ твердыхъ и жидкихъ тѣлъ. Жаменъ производилъ свои наблюденія съ цѣлью повѣрить формулы Коши для прозрачныхъ срединъ (§ 9), но не для срединъ, поглощающихъ свѣтъ (§§ 13—22). Его наблюденія содержатъ данныя и для нашего случая. Именно: для опредѣленія k и ε необходимъ *главный случай паденія*; при этомъ полезно замѣтить, что коеффиціентъ ε Жамена есть нашъ η (§ 8) и онъ намъ не нуженъ. Наблюденія Жамена даютъ i_0 (уголъ полной поляризаціи) и Φ_0 (§ 16).

---

[1] Жаменъ нашелъ только два тѣла подобнаго рода: квасцы и менилитъ. Ann. de ch. et de ph. 3 s. T. 29, pp. 263—304.

Разсматривая i_0 и Φ_0 таблицъ Жамена[1], можно видѣть, что нѣкоторыя изъ нихъ даны неточно; именно, онѣ соотвѣтствуютъ разности хода обоихъ отраженныхъ лучей, равной не $^3/_2$ длины волны, а величинѣ нѣсколько меньшей. Все это нѣсколько вліяетъ на результатъ, но если опредѣлить ε и Φ_0 простымъ интерполированіемъ, то получатся болѣе точныя числа, мало, впрочемъ, отличающіяся отъ предъидущихъ.

Вотъ таблица k и ε для нѣкоторыхъ срединъ[2].

Названіе тѣла.	k	ε	i_0	Φ_0
Алмазъ. . . .	2,41353	2°20′0″.	67°30′,	1°22′
Обманка прозрачная	2,36487	4°21′31″.	67°6′,	2°34′
Плавиковый шпатъ	1,44134	0°51′19″.	55°15′,	0°38′
Флинтгласъ (Guinant.). . . .	1,71307	1°42″4′.	59°44′,	1°8′24″
Стекло (пок. прел. 1,487) . . .	1,48712	0°32′33″.	56°5′,	0°23′38″[3]
Гіалитъ . . .	1,4207	0°43′26″.	54°52′,	0°25′47″
Огненный опалъ	1,62235	2°20′1″.	58°22′,	1°36′35″
Вода	1,3229	0°20′19″.	53°7′,	0°16′
Лавандовая эссенція	1,4619	0°9′33″.	55°37′40″,	0°7′
Растворъ полуторахлористаго желѣза.	1,3723	0°48′20″.	53°55′,	1°14′
Реальгаръ прозрачный . . .	2,427	11°54′.	67°45′,	6°55′

[1] Ann. de Ch. et de Ph. 3-me série. T. 29.

[2] Для вычисленія служили формулы (c), (d) § 16 и (1) § 13.

[3] Болѣе точныя числа суть: $i_0 = 56°4'31''$; $\phi_0 = 0°23'24''$.

Вычисляя съ этими ко ффиціентами нѣкоторыя наблюденія Жамена, я нашелъ, что *наблюденія согласуются лучше съ предлагаемыми формулами* (§ 15), чѣмъ съ формулами Коши (§ 9).

Вотъ для примѣра таблица:

Названіе тѣлъ.	Углы паденія.	Наблюденіе Ф.	Фор. К.	Предл. фор.	Н.—К.	Н.—П.
Алмазъ . . .	75^0	$13^0 30'$	$13^0 17'$	$13^0 31'$	$+13'$	$-1'$
	74^0	$12^0 13'$	$11^0 23'$	$11^0 38'$	$+50'$	$+35'$
	69^0	$2^0 57'$	$2^0 18'$	$2^0 52'$	$+39'$	$+5'$
	62^0	$8^0 18'$	$8^0 54'$	$8^0 38'$	$-36'$	$-20'$
Прозрачная обманка. . . .	65^0	$4^0 36'$	$4^0 8'$	$4^0 13'$	$+28'$	$+23'$
	64^0	$5^0 21'$	$5^0 27'$	$5^0 32'$	$-6'$	$-11'$
Плавиковый шпатъ . . .	$57^0 30'$	$3^0 50'$	$3^0 35'$	$3^0 37'$	$+15'$	$+13'$
	$54^0 15'$	$1^0 38'$	$1^0 39'$	$1^0 41'$	$-1'$	$-3'$
Флинтъ (Guinant)	$60^0 30'$	$2^0 3'$	$1^0 31'$	$1^0 39'$	$+32'$	$+24'$
	58^0	$2^0 45'$	$2^0 50'$	$2^0 53'$	$-5'$	$-8'$
Стекло[1] пок. прел. 1,487. .	60^0	$6^0 5'$	$5^0 29'$	$6^0 9'$	$+36'$	$-4'$
	58^0	$3^0 2'$	$3^0 50'$	$3^0 2'$	$-48'$	$\mp 0'$
	54^0	$3^0 9'$	$3^0 17'$	$3^0 17'$	$-8'$	$-8'$
		Ариѳм. среднее ошибокъ			$+9'$	$+3'$

Для гіалита, огненнаго опала и реальгара вычисленія дали тоже подобные результаты, причемъ для трехъ названныхъ тѣлъ вычислялся tg Φ, но не уголъ Φ.

---

1 Для стекла взяты были болѣе точныя значенія i_0 и Φ_0. См. предъидущую таблицу.

Какъ примѣръ приведу два случая для огненнаго опала. Для $i = 57°30'$ и для $i = 60°$ вычисленія дали въ 1-мъ случаѣ $\operatorname{tg} \Phi = 0{,}0383$ и во 2-мъ случаѣ $\operatorname{tg} \Phi = 0{,}0729$, а наблюденія: 0,0362 и 0,0738. Кромѣ приведенныхъ случаевъ я вычислялъ и другіе.

Для повѣрки возможности примѣненія предложенныхъ формулъ къ жидкостямъ, я вычислилъ показателей преломленія ихъ по формулѣ (α) § 17, которая даетъ дѣйствительный уголъ преломленія r_0, а затѣмъ показатель преломленія $= \frac{\sin i}{\sin r_0}$. Вычисленія дали числа тождественныя съ тѣми, которыя приводитъ Жаменъ[1]. Вотъ примѣры:

	Вода.	Лавандовая эссенція.	Растворъ полутора-хлористаго желѣза.	Стекло и вода.
Наблюденіе . .	1,333	1,462	1,372	1,091
Вычисленіе . .	1,332	1,462	1,372	1,091.

То-же даютъ и разности фазъ; совпаденіе съ наблюденіями такое-же, какъ и въ случаѣ азимутовъ; при этомъ только надо замѣтить, что у Жамена главный случай соотвѣтствуетъ разности фазъ, равной $\frac{3\lambda}{2}$; а у меня $\frac{\lambda}{2}$, слѣдовательно разности фазъ, вычисленныя по предлагаемымъ мною формуламъ, обратятся въ жаменовскія, если ихъ вычесть изъ 2, такъ-какъ $\frac{3\lambda}{2} = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}$ и $\frac{\lambda}{2}$ принята у Жамена за единицу линейной мѣры.

Приложимъ еще формулы § 22 къ нѣкоторымъ наблюденіямъ Квинке.

Наблюденіе надъ золотомъ дало Квинке:

$$i_0 = 70°48', \quad \Phi_0 = 42°19'^{*}.$$

[1] Annales de Ch. et de Ph. 3-ième série. T. 31, pp. 165--187.

[*] Pogg. Ann. Bd. CXIX. S. 383.

Съ этими данными находимъ:

$$k = 2,5456, \qquad \varepsilon = 83^\circ 54'.$$

Вычислимъ одно изъ наблюденій, осуществившихъ формулу (a) § 22; возьмемъ изъ ряда данныхъ Квинке одно, соотвѣтствующее $i = 10^\circ$. Имѣемъ

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{G_2}{G} = 45^\circ 41'.$$

Квинке даетъ: $\beta = 45^\circ 11'$.
