I.

ОБЪ ИЗЛОЖЕНІИ НАЧАЛЪ

ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ геометріи, изучающей свойства пространства и мыслимыхъ въ немъ формъ независимо отъ понятій о величинѣ и измѣреніи, встрѣчается одно предложеніе, по справедливости называемое нѣкоторыми учеными *основнымъ* [1]. Предложеніе это выражаетъ, что такъ называемое проективное соотвѣтствіе между двумя формами первой степени (напр. между двумя рядами точекъ на прямыхъ) устанавливается вполнѣ, когда даны три пары соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ формъ.

Нѣтъ надобности объяснять подробно, почему этому предложенію придается такое важное значеніе. Достаточно сказать, что, только руководясь этимъ предложеніемъ, можно при посредствѣ проективнаго соотвѣтствія перейдти отъ разсмотрѣнія элементарныхъ формъ къ разсмотрѣнію и изученію формъ первой степени болѣе сложныхъ, каковы кривыя линіи. Это понятно для всякаго, кто знакомъ напр. съ синтетическою теоріею коничe-

[1] *Th. Reye*, «Die Geometrie der Lage». 2-te Aufl. Hannover, 1877, p. 45—49.—*G. Darboux*, «Sur le théorème fondamental de la géometrie projective». Math. Annalen, T. XVII, 1880, p. 55.

скихъ сѣченій[1]. Гораздо важнѣе по нашему мнѣнію сдѣлать что нибудь, чтобы внести достаточную ясность и опредѣленность въ имѣющіеся или возможные способы доказательства этого предложенія, которые до сего времени представляютъ слабый пунктъ въ существующихъ изложеніяхъ началъ проективной геометріи.

На этотъ пунктъ обращено было въ послѣднее время вниманіе нѣкоторыхъ геометровъ. Такъ, Феликсъ Клейнъ, одинъ изъ нынѣшнихъ издателей журнала Mathematische Annalen, трактуетъ объ этомъ вопросѣ въ нѣсколькихъ своихъ статьяхъ, помѣщенныхъ въ этомъ журналѣ. Первая изъ нихъ, напечатанная еще въ 1873 году, касается вопроса случайнымъ образомъ и, такъ сказать, мимоходомъ[2]. Тѣмъ не менѣе она содержитъ вполнѣ опредѣленное относительно этого вопроса заключеніе. Вслѣдъ за-тѣмъ на вопросъ было обращено вниманіе другихъ геометровъ, гг. Кантора, Лурота и Цейтена, которые выразили свои мнѣнія въ письмахъ къ г. Клейну и тѣмъ вызвали новую замѣтку послѣдняго, напечатанную въ 1874 году[3]. Къ этой-же замѣткѣ присоединена и часть разсужденій, извлеченныхъ изъ переписки, подъ названіемъ Лурото-Цейтеновскаго доказательства. Наконецъ въ послѣднее время, въ первой тетради выходящаго нынѣ 17 тома Mathematische Annalen появилась новая замѣтка г. Клейна, служащая собственно введеніемъ къ болѣе подробной статьѣ французскаго геометра г. Дарбу, носящей названіе: «Sur le théorème fondamental de la géométrie projective»[4]. Въ этой послѣдней замѣткѣ г. Клейнъ категорически заявляетъ, что ошибался въ преж-

---

[1] *J. Steiner*, «Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch». 2 Aufl., Leipzig, 1876.

[2] *F. Klein*, «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie». Math. Ann. T. VI, 1873, p. 132 и сл.

[3] *F. Klein*, «Nachtrag zu dem zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie». Math. Ann. T. VII, 1874, p. 531—537.

[4] *F. Klein*, «Ueber die geometrische Definition der Projetivität auf den Grundgebilden erster Stufe». Math. Ann. T. XVII, 1880, p. 52—54.

нихъ своихъ воззрѣніяхъ, и указываетъ, какъ на причину своего заблужденія, на то, что имъ былъ упущенъ изъ виду точный смыслъ слова опредѣленіе. Заявленіе это г. Клейнъ считаетъ въ настоящее время тѣмъ болѣе необходимымъ, что ошибочное его мнѣніе вошло уже, по его словамъ, въ нѣкоторыя новѣйшія геометрическія сочиненія и чрезъ то угрожаетъ сдѣлаться обще-распространеннымъ.

Намъ извѣстно только одно сочиненіе, на которое въ нѣкоторой мѣрѣ повліяло прежнее воззрѣніе г. Клейна, хотя, можетъ быть, не столь вреднымъ образомъ, какъ того опасается самъ г. Клейнъ. Сочиненіе это — «Geometrie der Lage» страсбургскаго профессора Теодора Рейе. Это весьма распространенный курсъ лекцій по чистой или синтетической геометріи, выдержавшій въ сравнительно непродолжительное время два изданія. Въ первомъ изъ нихъ *основное предложеніе*, о которомъ мы теперь ведемъ рѣчь, доказывается, строго придерживаясь изложенія Штаудта въ его классическомъ сочиненіи, посящемъ то-же заглавіе[1]. Во второмъ же это доказательство замѣнено другимъ, которое г. Рейе заимствовалъ изъ сочиненія г. Томе: «Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage» (*J. Thomae*. Halle, 1873). Въ предисловіи ко второму изданію г. Рейе говоритъ, что сдѣлалъ это измѣненіе во вниманіе къ совершенно справедливымъ возраженіямъ г. Клейна противъ доказательства Штаудта.

Въ виду того, что теперь г. Клейнъ совершенно отказывается отъ своего прежняго мнѣнія, можно было бы ожидать, что въ третьемъ изданіи своей книги г. Рейе снова долженъ будетъ возвратиться къ доказательству Штаудта. Но на самомъ дѣлѣ въ этомъ, кажется, не представится надобности, потому что, какъ увидимъ ниже, доказательство г. Томе отличается отъ до-

---

[1] *G. v. Staudt*, «Geometrie der Lage». Nürnberg, 1847.

казательства Штаудта лишь болѣе подробнымъ и обстоятельнымъ изложенiемъ и оба одинаково вѣрны. Напротивъ, скорѣе можно думать, что послѣдняя замѣтка г. Клейна не есть послѣднее слово, сказанное въ разъясненiе той неясности, которая покрываетъ пока вопросъ. Причина этой неясности лежитъ, вѣроятно, въ трудности и деликатности самаго предмета, а вмѣстѣ съ тѣмъ и въ трудности установить опредѣленную точку зрѣнiя на предметъ, по чему-либо болѣе предпочтительную чѣмъ другiя.

Что возможны нѣсколько такихъ точекъ зрѣнiя, объ этомъ свидѣтельствуетъ большее или меньшее различiе въ воззрѣнiяхъ, проводимыхъ въ основныхъ сочиненiяхъ, положившихъ начало систематическому изложенiю новой геометрiи, каковы произведенiя Штейнера, Шаля и Штаудта, а также и въ сочиненiяхъ ихъ строгихъ послѣдователей. Но именно вслѣдствiе этого намъ кажется, что существенно важно выяснить, не существуетъ ли, при всемъ различiи этихъ точекъ зрѣнiя, какихъ-либо опредѣленныхъ между ними соотношенiй; главное же — разъяснить дѣло на-столько, чтобы было видно, что справедливо и что нѣтъ съ каждой точки зрѣнiя въ-отдѣльности.

Мы не задаемъ себѣ задачи представить такое разъясненiе, но попробуемъ сдѣлать краткiй обзоръ интересующаго насъ вопроса, на-сколько тому даютъ поводъ упомянутыя статьи г. Клейна. Черезъ это, можетъ быть, обнаружатся опредѣленнѣе тѣ причины, на которыхъ различiе воззрѣнiй основывается.

§ 2.

Какъ видно изъ указаннаго выше содержанiя основного предложенiя проективной геометрiи, доказательство его должно обусловливаться тѣмъ опредѣленiемъ, съ которымъ проективное соотвѣтствiе вводится въ изученiе.

Вообще соотношенiя, такъ-же какъ и предметы, могутъ имѣть разнообразныя свойства, но только тѣ изъ этихъ свойствъ, которыми разсматриваемое соотношеніе характеризуется вполнѣ, т. е. такъ, что всѣ остальныя свойства выводятся какъ ихъ логическія слѣдствія, могутъ быть принимаемы за опредѣленія этихъ соотношеній при ихъ изученіи. Въ большинствѣ случаевъ такихъ характерныхъ свойствъ бываетъ нѣсколько, и это какъ разъ имѣетъ мѣсто для проективнаго соотвѣтствія. Послѣднее допускаетъ, слѣдовательно, нѣсколько опредѣленій.

Прежде чѣмъ указать, въ чемъ состоятъ эти опредѣленія и какое между ними различіе или связь, замѣтимъ, что въ геометріи уже давно различаютъ два рода свойствъ или соотношеній: свойства *метрическія* или количественныя и свойства относительно положенія или *дескриптивныя*[1].

Возникновеніе аналитической геометріи и дальнѣйшее развитіе и обобщеніе ея основныхъ положеній, имѣющихъ такъ или иначе своею точкою опоры понятіе о величинѣ, дало наукѣ превосходное средство для изученія свойствъ перваго рода и внесло въ это изученіе строгую послѣдовательность и систематичность. Вмѣстѣ съ тѣмъ новѣйшіе методы аналитической геометріи являются достаточно сильными не только для доказательства, но и для раскрытія свойствъ второго рода. Вслѣдствіе этого можно было бы признать за великимъ изобрѣтеніемъ Декарта всеобъемлющее по отношенію къ геометрическому ученію значеніе. Но этому признанію должно, намъ кажется, противопоставить то требованіе, которое самымъ необходимымъ образомъ должно соблюдаться въ каждой умозрительной наукѣ. Это требованіе доводитъ все изучаемое до возможно большей простоты. Безъ выполненія этого требованія наука перестанетъ имѣть для человѣческаго ума неувядающую прелесть и свѣжесть и угрожаетъ

[1] Объ этомъ разграниченіи см. напр. у Шаля и Понселе: *M. Chasles*, «Aperçu historique» etc.—2-e edit. 1875. p. 22—23. *J. V. Poncelet*, «Applications d'Analyse et de Géométrie». Paris, 1864. T. II, p. 298—299.

сдѣлаться достояніемъ по преимуществу библіотечныхъ полокъ [1].

Простота въ наукѣ можетъ быть двоякаго рода. Во-первыхъ, та, которая обусловливается употребленіемъ пріемовъ намъ привычныхъ или въ насъ вкоренившихся; будутъ ли эти пріемы спеціальнаго научнаго характера или даже усвоенные нами въ самой обычной повседневной умственной дѣятельности. Это, такъ сказать, простота практическая. Противоположность ей должна составлять простота теоретическая или собственно научная, т. е. та, которая достигается устраненіемъ какъ въ самомъ предметѣ, который мы изучаемъ, такъ и въ тѣхъ путяхъ, по которымъ мы къ нему подходимъ, всего того, что не связано съ нимъ самымъ интимнымъ образомъ и не обусловливается тѣми цѣлями, которыя мы преслѣдуемъ. Короче сказать, это — простота, достигаемая путемъ отвлеченія.

Извѣстно, что математическія науки пользуются репутаціею трудныхъ и въ то-же время простыхъ, и послѣднее свойство, обусловливаемое ихъ отвлеченностью, безъ-сомнѣнія понимается всѣми именно въ смыслѣ простоты теоретической. Требованіе этой-то простоты и должно стоять въ наукѣ на первомъ планѣ. Но какъ-скоро мы вмѣняемъ въ необходимое придерживаться этого требованія, то приходимъ къ заключенію, что изученіе дескриптивныхъ свойствъ должно быть поставлено внѣ зависимости отъ методовъ аналитической геометріи, такъ-какъ послѣдняя не существуетъ безъ понятія о величинѣ и количественныхъ соотношеній, а дескриптивныя свойства съ этими понятіями ничего общаго не имѣютъ. Возникаетъ такимъ образомъ потребность въ сгруппированіи истинъ, относящихся къ дескрицтивнымъ свой-

---

[1] Лапласъ говоритъ: Préférez les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles». См. *Chasles*, «Aperçu historique» etc. p. 234.

ствамъ въ особое цѣлое и въ разработкѣ особыхъ методовъ для раскрытія и изслѣдованія этихъ истинъ.

Стремленіе удовлетворить этой потребности беретъ свое начало еще отъ Дезарга и Паскаля, если не ранѣе. Начертательная геометрія Монжа представляетъ блестящій примѣръ рѣшительнаго успѣха такого стремленія. Позднѣе Понселе, Шаль и Штейнеръ обогатили науку изслѣдованіями, содѣйствовавшими въ значительной степени установленію общихъ чисто геометрическихъ пріемовъ, замѣняющихъ пріемы аналитической геометріи, и дали примѣры строго-научнаго и систематическаго ихъ примѣненія. Наконецъ Штаудтъ изложилъ въ наиболѣе принципіальной формѣ ученіе о дескриптивныхъ свойствахъ, строго исключивъ въ своихъ пріемахъ понятіе о величинѣ и измѣреніи. Книга Штаудта «Geometrie der Lage» по справедливости считается тѣмъ-же самымъ по отношенію къ ученію о дескриптивныхъ свойствахъ, чѣмъ элементы Эвклида являются по отношенію къ геометріи вообще.

Въ настоящее время *геометрія положенія* не только имѣетъ несомнѣнное право на существованіе какъ наука, но и все дальнѣйшее развитіе этого ученія должно основываться на началахъ систематически сгруппированныхъ Штаудтомъ. Сама начертательная геометрія, преслѣдуя болѣе практическія цѣли (какъ *art du trait)*, исходитъ изъ началъ, покоящихся на болѣе отвлеченныхъ основаніяхъ геометріи положенія.

§ 3.

Чтобы окончательно подготовить почву для разсмотрѣнія различныхъ опредѣленій проективнаго соотвѣтствія, которое въ геометріи положенія играетъ первенствующую роль, укажемъ на основанія этого ученія.

Точка, прямая линія и плоскость принимаются за элементы, подлежащіе изученію геометріи положенія. Всякая совокупность этихъ элементовъ есть геометрическая форма. Свойства формъ и соотношенія между ними должны быть, очевидно, слѣдствіями свойствъ и взаимныхъ соотношеній, характеризующихъ элементы.

Каждый элементъ въ-отдѣльности обладаетъ свойствомъ или способностью занимать то или другое положеніе въ пространствѣ. Только различіемъ положенія различаются элементы одного и того-же рода.

Между различными положеніями элементовъ разныхъ родовъ, разсматриваемыхъ совмѣстно, существуетъ особое, въ которомъ они являются *взаимно совмѣщенными*. Таково положеніе точки и прямой, когда первая лежитъ на второй и, слѣдовательно, вторая проходитъ чрезъ первую.

Положеніе каждаго элемента опредѣляется *вполнѣ и единственнымъ образомъ* положеніемъ нѣскольких элементовъ съ нимъ совмѣщенныхъ. Такъ, прямая опредѣляется двумя совмѣщенными съ ней точками, плоскость тремя точками, точка тремя плоскостями и т. д.

Та взаимность, которая существуетъ, или можетъ существовать при нѣкоторыхъ условіяхъ, между разнородными элементами по отношенію къ ихъ опредѣляемости однихъ чрезъ другія посредствомъ совмѣщенія, есть коренная причина общаго *закона двойственности* или взаимности, господствующаго надъ всею областью геометріи положенія.

Понятіе о совмѣщеніи разнородныхъ элементовъ служитъ кромѣ того основаніемъ для опредѣленія простѣйшихъ или основныхъ геометрическихъ формъ, за каковыя принимаютъ совокупности всѣхъ элементовъ одного или двухъ родовъ совмѣщенныхъ съ однимъ элементомъ инаго рода. Таковы такъ называемыя формы первой степени, о которыхъ намъ только и придется говорить ниже. Именно: 1) *рядъ точекъ*, т. е. совокупность точекъ, лежащихъ на одной прямой; 2) *пучекъ прямыхъ*, т. е. совокупность прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну точку и лежащихъ въ одной плоскости, и 3) *пучекъ плоскостей*, т. е. совокупность плоскостей, проходящихъ чрезъ одну прямую.

§ 4.

Каждый элементъ мы можемъ представлять въ своемъ воображеніи или имѣющимъ опредѣленное положеніе въ пространствѣ, или измѣняющимъ это положеніе, т. е. перемѣщающимся.

Въ механикѣ перемѣщеніе или движеніе разсматривается въ зависимости отъ времени. Но, очевидно, мы можемъ отвлечься, если не отъ самаго существованія этой зависимости, то во всякомъ случаѣ отъ представленія какой-либо ея формы. Перемѣщеніе въ такомъ отвлеченномъ видѣ есть несомнѣнно одно изъ основныхъ понятій геометріи, и оно на-столько просто и естественно, что почти во всѣхъ систематическихъ трактатахъ по геометріи входитъ или въ самую формулировку вопросовъ и предложеній, или въ разсужденія, служащія для доказательства и разъясненій[1].

Отвлекаясь отъ зависимости перемѣщенія отъ времени, мы едва-ли можемъ и, во всякомъ случаѣ, не имѣемъ никакой надобности отвлекаться отъ такихъ свойствъ перемѣщенія какъ *непрерывность*, которая сама по себѣ также не обусловливается формою этой зависимости. Если какой-либо элементъ, напр. точка, перемѣщается изъ положенія A въ положеніе B, то непремѣнно въ пространствѣ долженъ существовать путь, по которому это перемѣщеніе совершилось или можетъ совершиться;

---

[1] Вотъ что говоритъ объ этомъ извѣстный французскій геометръ *J. Houel*, «L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du *mouvement géométrique*, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue... Il est avantageux d'introduire cette idée du mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage.... (см. «Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire». Paris. 1867, p. 60).

и каковы бы ни были прочіе признаки этого пути, долженъ существовать тотъ признакъ или та особенность, что положенія на немъ элемента, промежуточныя относительно A и B, представляютъ такъ-называемую непрерывную послѣдовательность. Иначе намъ пришлось бы допустить, что элементъ можетъ при перемѣщеніи уничтожаться или, другими словами, выходить изъ пространства и снова появляться въ немъ.

Какъ-скоро мы допускаемъ въ геометріи непрерывное перемѣщеніе элемента изъ положенія A въ положеніе B, то мы не можемъ отрицать возможности и обратнаго перемѣщенія изъ B въ A, имѣющаго всѣ тѣ-же признаки и отличающагося отъ перваго перемѣщенія только тѣмъ, что промежуточныя положенія смѣняются въ немъ въ обратной послѣдовательности. Такимъ образомъ ставится на видъ понятіе о двухъ противоположныхъ направленіяхъ непрерывнаго перемѣщенія.

Все, что сейчасъ сказано, служитъ не для того, чтобы дать опредѣленія такимъ понятіямъ какъ *перемѣщеніе*, его *непрерывность* и два различныя *направленія*, а лишь какъ разъясненіе, что эти понятія имѣютъ свое естественное мѣсто въ геометріи и, будучи въ ней употребляемы или какъ предметъ, или какъ средство изученія, должны быть предварительно по крайней-мѣрѣ указаны съ точностью и опредѣленностью. Относительно же опредѣленій нужно по этому случаю припомнить, что они имѣютъ вообще цѣлью лишь установленіе одинаковости пониманія у людей, обсуждающихъ одинъ и тотъ-же предметъ, и нужны лишь для болѣе или менѣе сложныхъ и искусственныхъ комбинацій. Вещи же на-столько простыя и естественныя, что одно наименованіе ихъ возбуждаетъ во всѣхъ одинаковое представленіе, въ опредѣленіяхъ не нуждаются [1].

[1] Не слѣдуетъ, однако, злоупотреблять этимъ правиломъ. Въ строго научномъ изложеніи число понятій, допускаемыхъ безъ опредѣленія, должно быть доведено до возможнаго minimum'а, и только тѣ изъ такихъ понятій могутъ

§ 5.

Въ числѣ геометрическихъ формъ, состоящихъ изъ совокупностей элементовъ одного рода, очевидно, могутъ быть такія, элементы которыхъ могутъ быть разсматриваемы какъ послѣдовательныя положенія одного и того-же непрерывно перемѣщающагося элемента. Формы эти въ отличіе отъ другихъ, необладающихъ тѣмъ-же свойствомъ, можно называть *непрерывными*. Къ числу такихъ принадлежатъ и названныя выше основныя формы первой степени.

Непрерывность формъ первой степени (наприм. линій), разсматриваемая съ такой точки зрѣнія, не имѣетъ ничего общаго съ понятіемъ о величинѣ и измѣреніи и, слѣдовательно, нѣтъ никакого основанія устранять ее при разсмотрѣніи этихъ формъ въ геометріи положенія.

Аналитическая геометрія, ставя въ свое основаніе опредѣленіе положенія посредствомъ величинъ, тѣмъ самымъ и непрерывность геометрическихъ формъ (напр. ряда точекъ на прямой), ставитъ въ зависимость отъ непрерывности, приписываемой ряду чиселъ. Послѣдняя можетъ быть понимаема не иначе, какъ въ смыслѣ безпредѣльной возможности заполнять числами промежутки въ какомъ бы ни было разсѣянномъ числовомъ ряду (напр. въ натуральномъ рядѣ цѣлыхъ чиселъ).

Такое пониманіе непрерывности можно перенести и на всякую геометрическую форму первой степени. При этомъ самое заполненіе формы, исходя изъ разсѣяннаго ряда элементовъ, возможно и безъ понятія о величинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ одного только понятія о совмѣщеніи разнородныхъ элементовъ и ихъ опредѣляемости одни чрезъ другія выясняется, какъ извѣстно, возможность по даннымъ тремъ элементамъ фор-

---

быть допускаемы вновь, которыя, по своей разнородности съ прежними, никакимъ образомъ чрезъ нихъ опредѣлены быть не могутъ.

мы первой степени находить построенiемъ (полнаго четыреугольника) въ промежуткѣ между каждыми двумя изъ нихъ еще одинъ элементъ, составляющiй съ данными такъ-называемую *гармоническую группу*. Принимая вновь построенные элементы за данные и повторяя неопредѣленное число разъ такое построенiе *четвертаго гармоническаго* элемента, можно, слѣдовательно, безпредѣльно заполнять промежутокъ между двумя какими бы ни было изъ нихъ.

Такимъ образомъ получается рядъ элементовъ непрерывный въ такомъ-же смыслѣ какъ и рядъ чиселъ. Но для признанiя, что этотъ рядъ, получаемый такимъ безпредѣльнымъ заполненiемъ, есть совершенно тотъ-же какъ и описываемый непрерывнымъ движенiемъ (что въ немъ не будетъ недоставать ни одного элемента, имѣющагося въ послѣднемъ), нѣтъ никакихъ геометрическихъ основанiй.

Въ дифференцiальномъ исчисленiи и рацiональной механикѣ, по-видимому, признается тождество этихъ рядовъ, но на самомъ дѣлѣ это дѣлается только условно. Дѣйствительно, рядъ точекъ считается въ дифференцiальномъ исчисленiи непрерывнымъ, когда разстоянiе между послѣдовательными точками есть величина скольугодномалая. Это есть понятiе, устанавливаемое искусственно и условно (vérité de définition), тогда какъ понятiе о непрерывности при движенiи внушается намъ непосредственнымъ ощущенiемъ (vérité de sentiment). Первое имѣетъ мѣсто лишь по-стольку, по-скольку оно не противорѣчитъ второму, и дается въ такой формѣ лишь для того, чтобы быть пригоднымъ для цѣлей вычисленiя. Второе же совершенно независимо отъ перваго.

§ 6.

Одно только понятiе о совмѣщенiи разнородныхъ элементовъ позволяетъ при разсмотрѣнiи двухъ разнородныхъ формъ первой степени усматривать между ними опредѣленную зависимость, состоящую въ томъ, что каждому элементу одной формы соотвѣтствуетъ совмѣщенный съ нимъ элементъ другой, и обратно. Такъ, напр., если двѣ разсматриваемыя формы первой степени суть рядъ точекъ на прямой L и пучекъ прямыхъ O, лежащихъ съ этимъ рядомъ въ одной плоскости, то каждой точкѣ ряда L будетъ соотвѣтствовать лучъ пучка O, проходящій чрезъ эту точку, и каждому лучу пучка O будетъ соотвѣтствовать точка ряда L, на немъ лежащая. (Предполагается, конечно, что центръ пучка O и основаніе ряда L не совмѣщены между собою).

Опредѣленіе по элементамъ какой-нибудь изъ основныхъ формъ первой степени совмѣщенныхъ съ ними элементовъ другой такой же формы (но разнородной съ первою) г. Кремона называетъ *элементарною геометрическою операціей*[1]. Такъ, если мы имѣемъ рядъ точекъ на прямой L и точку O внѣ этого ряда, то опредѣленіе прямыхъ, проходящихъ чрезъ O и чрезъ различныя точки ряда L, будетъ элементарная геометрическая операція, производимая надъ рядомъ и называемая проектированіемъ этого ряда. Если имѣемъ пучекъ прямыхъ O, лежащихъ въ одной плоскости, и прямую L, не принадлежащую къ числу его лучей, но лежащую въ той-же плоскости, то опредѣленіе точекъ прямой L, лежащихъ на различныхъ лучахъ пучка O, будетъ элементарная геометрическая операція, производимая надъ пучкомъ и называемая сѣченіемъ этого пучка и т. п.

Изъ сказаннаго видимъ, что указанною сейчасъ зависимостью между двумя разнородными формами связаны всякія двѣ формы, изъ которыхъ одна получается какъ результатъ какой-либо элементарной геометрической операціи надъ другою. Надъ такимъ результатомъ можно произвести вновь элементарную геометрическую операцію, за-тѣмъ надъ результатомъ этой по-

[1] *L. Cremona*, «Elementi di Geometria projettiva». Roma, 1873, p. 1—2.

слѣдней и т. д. Такимъ образомъ получается рядъ геометрическихъ формъ первой степени, изъ которыхъ каждая промежуточная связана указанною зависимостью съ предыдущею и послѣдующею, а чрезъ то первая форма со всѣми остальными до послѣдней включительно.

Устанавливаемая такимъ образомъ посредствомъ ряда элементарныхъ операцій зависимость можетъ имѣть мѣсто и между формами одного и того-же рода и даже совпадающими. Такъ, наприм., можно установить такимъ путемъ зависимость между точками одной и той-же прямой, предполагая, слѣдовательно, что на этой прямой мы имѣемъ два ряда, такъ-что каждая ея точка можетъ быть разсматриваема какъ принадлежащая или одному или другому изъ нихъ.

Зависимость, получаемая такимъ чисто геометрическимъ путемъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленный характеръ или есть зависимость достаточно опредѣленная для того, чтобы быть предметомъ изученія. Другими словами указанное геометрическое происхожденіе этой зависимости можно принять въ геометріи положенія за ея опредѣленіе, что и дѣлаютъ въ своихъ курсахъ гг. Томе и Кремона[1].

По причинѣ, конечно, одного изъ видовъ геометрическихъ операцій (проектированіе), дающихъ происхожденіе этой зависимости, она и носитъ названіе проективнаго соотвѣтствія.

§ 7.

Соотвѣтствіе это обладаетъ слѣдующими тремя свойствами, которыя весьма легко обнаруживаются изъ указаннаго его геометрическаго происхожденія и сами суть чисто геометрическія.

1. Каждому элементу одной изъ формъ соотвѣтствуетъ единственный элементъ другой (однозначность соотвѣтствія).

---

[1] См. *J. Thomae*, «Ebene geom. Gebilde» etc. p. 11, n⁰ 44. — *L. Cremona* «Elementi di Geometria projettiva». p. 20—21, n⁰ 34.

2. Непрерывно перемѣщающемуся элементу одной формы соотвѣтствуетъ въ другой также непрерывно перемѣщающійся элементъ (непрерывность соотвѣтствія).

3. Всякимъ четыремъ элементамъ, составляющимъ гармоническую группу въ одной формѣ, соотвѣтствуетъ также гармоническая группа элементовъ въ другой (гармоничность соотвѣтствія).

Эти свойства не зависятъ ни отъ числа геометрическихъ операцій, употребляемыхъ для установленія соотвѣтствія, ни отъ рода ихъ. Изъ нихъ первыя два обнаруживаются, такъ сказать, непосредственно. Послѣднее же легко доказывается при помощи такъ называемаго полнаго четыреугольника (или четырехсторонника), изъ котораго и получается геометрическое понятіе о гармонической группѣ, и такъ называемой теоремы о гомологическихъ треугольникахъ, которая въ свою очередь легко доказывается на основаніи только понятія о совмѣщеніи элементовъ[1].

Намъ кажется, что приведенныя три свойства можно считать основными свойствами проективнаго соотвѣтствія, такъ-какъ, пользуясь только ими одними, можно вывести всѣ остальныя геометрическія свойства этой зависимости; напр., изъ двухъ первыхъ свойствъ слѣдуетъ, что если вообразимъ, что элементъ одной формы движется, не измѣняя направленія, то и соотвѣтствующій элементъ другой формы долженъ двигаться такимъ-же образомъ. Отсюда заключаемъ, что если соотвѣтственныя формы суть однородныя и совмѣщенныя (напр. два ряда точекъ на одной прямой), то возможны два случая: 1) когда элементы обѣихъ формъ перемѣщаются въ одномъ и томъ-же направленіи, и 2) когда они перемѣщаются въ противоположныхъ направленіяхъ. Штейнеръ называетъ въ первомъ случаѣ формы согласно

---

[1] *J. V. Poncelet*, «Traité des propriétés projectives des figures». 2-e éd. T. I. 1865, p. 85—86, n° 168. — *См. ниже* § 14.

направленными (gleichlaufende), а во второмъ противоположно направленными (ungleichlaufende) [1]. Извѣстно, что въ рукахъ этого искуснаго геометра различеніе этихъ двухъ случаевъ и подробное ихъ разсмотрѣніе является весьма плодовитымъ геометрическимъ пріемомъ.

Кромѣ указанныхъ свойствъ проективнаго соотвѣтствія существуютъ еще такія, которыя также имѣютъ значеніе основныхъ свойствъ, но должны быть исключены изъ области геометріи положенія, такъ-какъ представляютъ зависимости метрическія (основанныя на измѣреніи). Таково равенство такъ называемыхъ **сложныхъ** или **ангармоническихъ отношеній** каждой произвольно взятой группы четырехъ элементовъ одной формы и четырехъ соотвѣтственныхъ элементовъ другой.

Шаль принимаетъ это свойство за опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія, которое онъ называетъ **гомографическимъ** [2].

Штейнеръ и затѣмъ Кремона хотя и не возводятъ это свойство въ опредѣленіе, но тѣмъ не менѣе находятъ необходимымъ подробно его разсматривать, и основываютъ на немъ доказательство основного предложенія проективной геометріи, т. е. опредѣляемости проективнаго соотвѣтствія посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ.

Нужно думать, что Штейнеръ не нашелъ возможности доказать это предложеніе чисто геометрически, такъ-какъ сложное отношеніе не находитъ во всемъ дальнѣйшемъ развитіи его ученія никакого болѣе или менѣе важнаго примѣненія къ выводу метрическихъ свойствъ, какъ это имѣетъ мѣсто у Шаля, а служитъ не болѣе какъ символомъ для обозначенія проективной зависимости.

---

[1] *J. Steiner*, «Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch.». 2-е Aufl., 1876, p. 39, § 14.

[2] *M. Chasles*, «Traité de Géométrie supérieure». 2-e éd., Paris, 1880, p. 64, nº 103.

§ 8.

Штаудту принадлежитъ первое и, можно сказать, единственное имѣющееся до сихъ поръ геометрическое доказательство основного предложенія. Но прежде, чѣмъ дать это доказательство, онъ счелъ нужнымъ принять за опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія третье изъ указанныхъ нами основныхъ свойствъ его.

«Двѣ формы первой степени, говоритъ онъ, называются проективными, когда онѣ связаны такимъ соотвѣтствіемъ, что всякой гармонической группѣ одной формы соотвѣтствуетъ гармоническая же группа въ другой»[1].

Это-то опредѣленіе, которое г. Рейе повторяетъ буквально въ обоихъ изданіяхъ своей названной выше книги, г. Клейнъ находитъ недостаточнымъ и, намъ кажется, имѣетъ для этого основаніе. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы опредѣленіе Штаудта было достаточно, то изъ него одного должны бы были получаться всѣ остальныя свойства проективнаго соотвѣтствія, а въ томъ числѣ и основное предложеніе объ опредѣляемости этого соотвѣтствія посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ. Но если мы имѣемъ, напр., два ряда точекъ, при чемъ даны три пары соотвѣтственныхъ точекъ, то на основаніи опредѣленія Штаудта можно заключить о соотвѣтствіи только тѣхъ точекъ обоихъ рядовъ, которыя какъ въ томъ, такъ и въ другомъ рядѣ могутъ быть получаемы какъ четвертыя гармоническія къ тремъ даннымъ или къ какимъ-либо уже опредѣленнымъ этимъ способомъ точкамъ. Всѣ эти точки г. Клейнъ называетъ *раціональными*, и мы видѣли, что не существуетъ никакихъ геометрическихъ основаній признать совокупность всѣхъ такихъ точекъ тождественною съ непрерывнымъ рядомъ положеній перемѣщающейся по прямой точки. Аналитическія соображенія по-

---

[1] *Staudt*, «Geometrie der Lage», p. 49, § 9.

казываютъ, напротивъ, что должны существовать на прямыхъ *нераціональныя* точки, т. е. такія, которыя послѣдовательными построеніями четвертыхъ гармоническихъ, исходя изъ трехъ данныхъ, получены быть не могутъ, сколько бы разъ и въ какой бы послѣдовательности эти построенія ни повторялись.

Объ этихъ-то точкахъ на основаніи одного только опредѣленія Штаудта и нельзя сдѣлать никакого заключенія, т. е. нельзя сказать, что тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ устанавливается соотвѣтствіе и между нераціональными относительно ихъ точками. Слѣдовательно, исходя изъ опредѣленія Штаудта, нельзя доказать основного предложенія во всей его общности.

§ 9.

Г. Клейнъ полагаетъ, что недостаточность опредѣленія Штаудта можетъ быть восполнена введеніемъ въ геометрію понятія о предѣлахъ, при чемъ каждая нераціональная точка должна быть разсматриваема какъ предѣлъ, къ которому стремится послѣдовательность раціональныхъ точекъ, получаемыхъ опредѣленнымъ періодически повторяющимся построеніемъ, и хотя при конечномъ числѣ повтореній этого построенія предѣльная точка получена быть не можетъ, тѣмъ не менѣе она должна считаться опредѣленною и извѣстною, какъ скоро будетъ таковымъ законъ повторяемости построенія.

Такое дополненіе, заимствованное прямо изъ отвлеченнаго анализа, едва-ли можетъ быть допущено въ геометріи положенія и притомъ безъ доказательства, какъ того требуетъ г. Клейнъ. Для того, чтобы быть аксіоматическимъ, оно слишкомъ искусственно и сложно. Да и самое раздѣленіе точекъ на раціональныя и нераціональныя не имѣетъ достаточно основаній въ однихъ лишь геометрическихъ соображеніяхъ.

Поэтому естественно, что геометры, обсуждавшие тотъ-же вопросъ (Луротъ, Цейтенъ и Дарбу), старались обойтись безъ этого дополненія. Но въ-замѣнъ того они вводятъ въ свои разсужденія, не дѣлая явнаго на то указанія, другое дополнительное допущеніе, которое также молча дѣлаетъ и Штаудтъ, но котораго г. Клейнъ въ первоначальныхъ своихъ воззрѣніяхъ систематически избѣгаетъ. Это допущеніе есть не что иное, какъ признаніе второго изъ указанныхъ выше основныхъ свойствъ проективнаго соотвѣтствія, т. е. его непрерывности.

По-видимому, Штаудтъ считалъ это свойство на-столько необходимымъ и естественнымъ, что не нашелъ нужнымъ даже упоминать о немъ, а между-тѣмъ именно это-то умалчиваніе и подало поводъ считать недостаточнымъ данное имъ доказательство основного предложенія [1].

§ 10.

Что доказательство Штаудта при допущеніи непрерывности проективнаго соотвѣтствія становится совершенно строгимъ, можно видѣть изъ слѣдуюшихъ соображеній.

Извѣстно, что опредѣляемость проективнаго соотвѣтствія посредствомъ трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ есть прямое и необходимое слѣдствіе слѣдующаго предложенія, имѣющаго болѣе частный характеръ.

Если два ряда точекъ, связанные проективнымъ соотвѣтствіемъ, находятся на одной прямой и имѣютъ три точки двойныя, т. е. такія, которыя суть сами себѣ соотвѣтствующія, то и всѣ остальныя точки прямой должны быть также двойныя.

Положимъ, что A есть двойная точка, и вообразимъ, что точка одного ряда движется непрерывно по прямой, начиная отъ

---

[1] Говоря объ этомъ предложеніи въ письмѣ къ г. Клейну, г. Darboux замѣчаетъ: C'est de ce théorème que v. Staudt donne, dans sa *Geometrie der Lage*, une démonstration que tout le monde avec vous s'accorde à regarder comme incomplète.—Mathematische Annalen. T. XVII, p. 53.

A. Соотвѣтствующая ей точка другого ряда будетъ двигаться также непрерывно, начиная отъ *A*. При этомъ возможны, очевидно, только два случая; 1) когда обѣ соотвѣтственныя точки, выйдя изъ положенія *A*, будутъ двигаться, не расходясь, т. е. оставаясь совпавшими, до нѣкоторой точки *B*; такъ что всѣ точки отрѣзка *AB* будутъ двойныя, и 2) когда обѣ соотвѣтственныя точки, въ какихъ бы направленіяхъ онѣ ни двигались, раздѣлятся, выйдя изъ *A*, и сойдутся вновь въ нѣкоторой точкѣ *B*; такъ-что внутри отрѣзка *AB* не будетъ ни одной двойной точки. Точки *A* и *B* будутъ въ послѣднемъ случаѣ двѣ послѣдовательныя двойныя точки.

Такъ-какъ при движеніи точки отъ *A* до *B* внутри этого отрѣзка точка, дѣлящая съ нею этотъ отрѣзокъ гармонически, принимаетъ послѣдовательно всѣ возможныя положенія внѣ его, то заключаемъ, что въ первомъ изъ названныхъ случаевъ всѣ точки прямой будутъ двойныя, а во второмъ кромѣ точекъ *A* и *B* не будетъ существовать двойныхъ точекъ ни внутри, ни внѣ отрѣзка *AB*; слѣдовательно при существованіи трехъ различныхъ двойныхъ точекъ можетъ имѣть мѣсто только первый случай, что и требовалось доказать.

Разсужденія эти представляютъ не что иное какъ воспроизведеніе доказательства Штаудта съ тою только разницей, что въ нашемъ изложеніи указано, какимъ образомъ возможность только двухъ случаевъ проистекаетъ изъ непрерывности перемѣщенія обѣихъ соотвѣтственныхъ точекъ, а въ изложеніи Штаудта эта непрерывность подразумѣвается. Что это дѣйствительно такъ, слѣдуетъ изъ того, что Штаудтъ называетъ во второмъ случаѣ двойныя точки *A* и *B* *послѣдовательными*; признаніе же ихъ таковыми можетъ имѣть мѣсто не иначе какъ при допущеніи возможности прослѣдить оба ряда отъ *A* до *B* непрерывно[1].

---

[1] *Staudt*, «Geometrie der Lage» p. 50, n. 106.

То-же самое различіе съ доказательствомъ Штаудта представляетъ и доказательство г. Томе, которое, какъ замѣчено выше, г. Рейе предпочитаетъ во второмъ изданіи своей геометріи положенія. Только у г. Томе слѣдствія, проистекающія изъ разсмотрѣнія соотвѣтственныхъ точекъ въ состояніи непрерывнаго перемѣщенія, обсуждаются еще съ большею подробностью, чѣмъ это сдѣлано нами[1].

Изъ сказаннаго можемъ заключить, что основное предложеніе геометріи положенія есть необходимое слѣдствіе двухъ послѣднихъ основныхъ свойствъ проективнаго соотвѣтствія, и допущеніе несправедливости этого предложенія должно быть въ противорѣчіи по крайней мѣрѣ съ однимъ изъ нихъ. Такъ-какъ сверхъ того оба эти свойства между собою нисколько независимы, то и понятно, что упущеніе изъ вида одного изъ нихъ не можетъ не отозваться вреднымъ образомъ на строгости вывода самаго слѣдствія.

§ 11.

Чтобы объяснить, какимъ образомъ могло произойти, что г. Клейнъ, находя сперва необходимымъ восполнить недостаточность опредѣленія Штаудта особымъ дополненіемъ аксіоматическаго характера, впослѣдствіи пришелъ къ заключенію о возможности замѣнить это дополненіе разсужденіями гг. Лурота, Цейтена и Дарбу, которыя такого характера не имѣютъ, позволимъ себѣ выразить слѣдующія соображенія.

Первоначально г. Клейнъ, какъ мы замѣтили выше, совершенно отвлекался въ своихъ сужденіяхъ отъ непрерывности проективнаго соотвѣтствія, и потому понятно, что неполнота въ опредѣленіи Штаудта не могла быть имъ незамѣчена. Но, придерживаясь того направленія, которое дается пріемами аналитической геометріи, онъ тѣмъ самымъ создалъ кругъ идей, въ

---

[1] J. *Thomae*, «Ebene geometrische Gebilde» etc. p. 12, n° 48.

которомъ самый вопросъ о проективномъ соотвѣтствіи становился уже на второй планъ. На первомъ же планѣ являлся вопросъ о разъясненіи соотношенія между раціональными и нераціональными точками съ точки зрѣнія геометріи положенія.

Оставаясь въ этомъ кругѣ идей, гг. Луротъ и Цейтенъ доказали, принимая во вниманіе непрерывность зависимости между двумя перемѣщающимися точками одной и той-же гармонической группы, что между всякими двумя точками прямой можетъ быть взята раціональная *точка, или, другими словами, что посредствомъ* построенія ряда четвертыхъ гармоническихъ, исходя изъ трехъ данныхъ точекъ, можно получить точку внутри всякаго произвольно взятаго отрѣзка. Отсюда, однако, доказательство основного предложенія еще не получается *непосредственно. Остается* сдѣлать одинъ шагъ, который, хотя и не совсѣмъ вѣрно, дѣлаетъ г. Дарбу, прибѣгая при этомъ также къ геометрической непрерывности[1].

Какъ ни трудно вообще указать тѣ данныя, изъ которыхъ слагается направленіе идей каждаго мыслителя, но въ настоящемъ случаѣ, *намъ кажется,* можно предполагать съ большою вѣроятностью, что перемѣна мнѣнія г. Клейна на основаніи разсужденій гг. Лурота, Цейтена и Дарбу произошла только потому, что эти разсужденія *основываются* на понятіи о непрерывности соотвѣтствія, котораго недоставало въ прежнихъ сужденіяхъ г. Клейна. Признавая правильность этихъ дополнительныхъ соображеній, г. Клейнъ съ тѣмъ вмѣстѣ вноситъ въ свои сужденія то, отъ чего отвлекался прежде. Если-бы онъ съ са-

---

[1] Неточность въ разсужденіяхъ г. Дарбу заключается въ томъ, что онъ совершенно произвольно принимаетъ двѣ соотвѣтственныя точки x и x', изъ которыхъ x принадлежитъ первому ряду, а x' второму, за соотвѣтственныя и въ обратномъ смыслѣ, т. е. полагая, что x' есть точка перваго ряда, а x второго (См. «Mathem. Annalen», T. XVII, p. 59). Посредствомъ незначительнаго измѣненія доказательства неточность эта можетъ быть устранена.

маго начала принялъ во вниманіе неизбѣжность понятія о геометрической непрерывности, то всѣ остальныя дополненія оказались бы излишними, такъ-какъ относительно строгости доказательства Штаудта не могло бы и возникнуть сомнѣнія.

Во второй своей статьѣ г. Клейнъ хотя и признаетъ, что то, чего недостаетъ въ опредѣленіи Штаудта, есть, собственно говоря, констатированіе непрерывности проективнаго соотвѣтствія, но придаетъ этому свойству слѣдующую весьма искусственную формулировку. *Четыремъ элементамъ, расположеннымъ въ одной формѣ въ опредѣленномъ порядкѣ, должны соотвѣтствовать въ другой формѣ четыре элемента, расположенные въ такомъ-же порядкѣ*[1]. Очевидно, что это есть только слѣдствіе того понятія о непрерывности, которое внушается намъ при разсмотрѣніи соотвѣтствующихъ элементовъ въ состояніи движенія, и при томъ слѣдствіе не на-столько полное, чтобы могло совершенно замѣнять это понятіе. Вмѣстѣ съ тѣмъ оно не достаточно просто и наглядно, чтобы быть принятымъ за аксіому.

§ 12.

Было замѣчено выше, что гг. Томе и Кремона принимаютъ за опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія самое геометрическое происхожденіе этой зависимости, т. е. называютъ проективною ту зависимость, которая устанавливается между двумя формами первой степени посредствомъ ряда элементарныхъ геометрическихъ операцій. Намъ кажется, что такая точка зрѣнія есть наиболѣе правильная. Въ самомъ дѣлѣ, прямой смыслъ слова «опредѣленіе» вовсе не требуетъ, чтобы оно давалось всегда посредствомъ фразъ и притомъ въ болѣе или менѣе закругленной формѣ. Въ отвлеченномъ анализѣ мѣсто фразъ могутъ заступать символы, въ геометріи — построенія. Вообще самое необхо-

[1] См. «Mathemat. Annalen». T. VII, p. 537.

димое и важное въ опредѣленіи—это, чтобы въ немъ указывалось точно и ясно, какимъ образомъ новое понятіе получается какъ комбинація понятій уже принятыхъ.

Опредѣленіе гг. Томе и Кремона этому требованію удовлетворяетъ вполнѣ. Сверхъ того оно имѣетъ преимущество въ смыслѣ естественности и наглядности и изъ него самымъ простымъ образомъ обнаруживаются три основныя свойства проективнаго соотвѣтствія и усматривается независимость этихъ свойствъ отъ рода и числа элементарныхъ операцій, посредствомъ которыхъ соотвѣтствіе устанавливается. Лишь позднѣе, когда изъ двухъ послѣднихъ основныхъ свойствъ выводится способомъ Штаудта основное предложеніе проективной геометріи и чрезъ то обнаруживается, что изъ нихъ однихъ могутъ быть выводимы всѣ остальныя свойства проективнаго соотвѣтствія,—является возможность и на совокупность этихъ двухъ свойствъ смотрѣть такъ-же, какъ на опредѣленіе этой зависимости, ибо одно и то-же понятіе можетъ, какъ мы замѣчали выше, имѣть нѣсколько опредѣленій.

Намъ кажется, что именно уклоненіе Штаудта отъ этого естественнаго пути, котораго онъ строго держался въ своей книгѣ до 9 параграфа, и породило то недоразумѣніе, которое служитъ предметомъ настоящаго разъясненія.

§ 13.

Изъ всего сказаннаго видимъ, на-сколько важно при изложеніи началъ проективной или чистой геометріи, чтобы каждое понятіе было указано въ своемъ мѣстѣ и каждое опредѣленіе давалось въ извѣстной, обусловливаемой послѣдовательнымъ развитіемъ идей, формѣ. Даже самыя простыя и естественныя понятія не должны быть проходимы молчаніемъ, ибо уже то одно, что такія понятія не всегда возможно устранить, требуетъ, чтобы къ проявленію ихъ въ нашихъ разсужденіяхъ мы относились самымъ внимательнымъ образомъ.

Въ общихъ чертахъ вотъ та послѣдовательность, которой по нашему мнѣнію было бы полезно держаться при изложеніи началъ проективной геометріи.

Прежде всего слѣдуетъ указать съ возможною точностью и опредѣленностью на тѣ основныя понятія, которыя допускаются безъ опредѣленія. Таковы суть: 1) геометрическіе элементы; 2) ихъ совмѣщеніе и взаимная опредѣляемость; 3) перемѣщеніе элементовъ и его непрерывность.

Затѣмъ даются опредѣленія: 1) основныхъ формъ; 2) гармоническихъ группъ; 3) элементарныхъ геометрическихъ операцій.

Всѣ эти понятія представляютъ уже достаточный матеріалъ, съ которымъ можно приступить къ изученію проективнаго соотвѣтствія. Послѣднее должно быть опредѣляемо сперва посредствомъ элементарныхъ геометрическихъ операцій, и на основаніи этого опредѣленія выводятся три основныя свойства этой зависимости.

Выводъ основного предложенія объ опредѣляемости проективнаго соотвѣтствія тремя парами соотвѣтственныхъ элементовъ долженъ окончательно подготовить почву для изученія этой зависимости, для чего должна быть также обнаружена возможность нѣсколькихъ ея опредѣленій.

Все дальнѣйшее изложеніе посвящается раскрытію и сопоставленію свойствъ проективной зависимости и обусловливается, конечно, тѣми требованіями, какія могутъ быть поставлены въ отношеніи къ объему излагаемаго предмета.

§ 14.

Все сказанное выше даетъ намъ поводъ сдѣлать одно замѣчаніе о видимомъ сходствѣ и въ то - же время существенномъ различіи двухъ предложеній, изъ которыхъ каждое играетъ въ геометріи положенія чрезвычайно важную роль. Первое изъ этихъ предложеній есть упомянутая выше теорема о гомологическихъ треугольникахъ. Она дается обыкновенно въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

1) *Если два треугольника расположены на плоскости такъ, что три прямыя, соединяющія по-парно ихъ вершины, сходятся въ одной точкѣ, то три точки, въ которыхъ пересѣкаются соотвѣтственно ихъ стороны, лежатъ на одной прямой.*

2) *Если два треугольника расположены на плоскости такъ, что три точки, въ которыхъ пересѣкаются по-парно ихъ стороны, лежатъ на одной прямой, то три прямыя, соединяющія соотвѣтственно ихъ вершины, сходятся въ одной точкѣ.*

Въ обоихъ этихъ видахъ предложеніе относится къ одной и той-же фигурѣ, составленной изъ десяти прямыхъ и десяти точекъ. Эти прямыя суть шесть сторонъ треугольниковъ, три прямыя, соединяющія ихъ вершины, и одна прямая, проходящая чрезъ точки пересѣченія сторонъ. Точки же суть пересѣченія этихъ прямыхъ по три и сами лежатъ по три на каждой прямой. Самое свойство фигуры, о которомъ идетъ рѣчь въ предложеніи, состоитъ собственно въ существованіи однообразія въ расположеніи элементовъ фигуры по отношенію другъ къ другу, однообразія, выражающагося въ томъ, что каждый элементъ одного рода находится въ совмѣщеніи съ тремя элементами другого рода.

Справедливость этого предложенія обнаруживается проще всего изъ того, что на фигуру, къ которой оно относится, можно смотрѣть какъ на проекцію на плоскости подобной же пространственной фигуры, состоящей изъ десяти прямыхъ, въ которыхъ пять произвольно взятыхъ плоскостей пересѣкаются между собою сочетаясь всѣми способами по двѣ, и десяти точекъ, въ которыхъ эти плоскости пересѣкаются, сочетаясь по три. Для этой-же пространственной фигуры названное выше свойство обнаруживается само собою, какъ необходимое слѣдствіе однихъ только понятій о совмѣщеніи геометрическихъ элементовъ и ихъ взаимной опредѣляемости.

Итакъ, теорема о гомологическихъ треугольникахъ, которую можно также назвать теоремою о десяти точкахъ и десяти прямыхъ, доказывается на основаніи самыхъ первичныхъ понятій геометріи, не прибѣгая даже къ понятію о перемѣщеніи и его непрерывности.

Обратимся теперь къ другому интересующему насъ предложенію. Оно есть частный случай извѣстной теоремы Паскаля и состоитъ въ слѣдующемъ:

Если вершины шестиугольника расположены на двухъ прямыхъ, при чемъ ни одна изъ сторонъ не совпадаетъ съ этими прямыми, то три точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ шестиугольника лежатъ на одной прямой.

Предложеніе взаимное съ этимъ, которое есть частный видъ извѣстной теоремы Бріаншона, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если стороны шестиугольника проходятъ по три чрезъ двѣ точки, при чемъ ни одна изъ вершинъ не совпадаетъ съ этими точками, то три прямыя, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника, проходятъ чрезъ одну точку.

Въ обоихъ этихъ предложеніяхъ рѣчь идетъ объ одной и той-же фигурѣ и объ одномъ и томъ-же ея свойствѣ. Фигура эта состоитъ изъ девяти прямыхъ и девяти точекъ. Въ первой теоремѣ прямыя суть стороны шестиугольника, двѣ прямыя, на которыхъ лежатъ вершины, и прямая, соединяющая точки пересѣченія сторонъ; а точки суть вершины шестиугольника и тѣ три точки, въ которыхъ пересѣкаются противоположныя стороны. Во второй же теоремѣ прямыя суть стороны шестиугольника и три прямыя, соединяющія противоположныя вершины, а точки суть вершины шестиугольника, двѣ точки, въ которыхъ сходятся стороны, и точка, чрезъ которую проходятъ прямымъ, соединяющія вершины. Что касается самаго свойства этой фигуры, выражаемаго обѣими этими теоремами, то оно тоже самое какъ и въ предыдущемъ предложеніи о десяти прямыхъ и десяти точкахъ.

Сходство обоихъ предложеній поразительно, такъ-какъ все различіе между ними состоитъ только въ числѣ элементовъ, составляющихъ разсматриваемыя въ нихъ фигуры. Послѣднее предложеніе можетъ быть названо также теоремою о девяти точкахъ и девяти прямыхъ.

Мы не будемъ приводить доказательства этой теоремы и замѣтимъ только, что она всегда выводится весьма легко какъ слѣдствіе основного предложенія проективной геометріи и притомъ слѣдствіе на-столько полное, что, исходя изъ него и ведя разсужденія въ обратномъ порядкѣ, можно получить снова основное предложеніе.

Судя по сходству обоихъ разсмотрѣнныхъ предложеній, можно было бы ожидать, что и средства для ихъ доказательства должны быть одинаковы. На самомъ же дѣлѣ этого нѣтъ, такъ-какъ не существуетъ еще строго геометрическаго доказательства второго предложенія (о девяти), которое подобно доказательству перваго (о десяти) не основывалось бы на понятіи о перемѣщеніи и его непрерывности; и намъ кажется, что отъ самой мысли отыскать такое доказательство слѣдуетъ отказаться. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы было найдено такое доказательство, то съ тѣмъ вмѣстѣ и само основное предложеніе было бы доказано, не прибѣгая къ понятію о перемѣщеніи. Слѣдовательно, второе изъ указанныхъ нами основныхъ свойствъ проективной зависимости не было бы существеннымъ дополненіемъ къ третьему, а это значитъ, что опредѣленіе проективнаго соотвѣтствія, данное Штаудтомъ, могло бы быть понимаемо въ буквальномъ смыслѣ и безъ всякаго дополненія. Все это не согласно, однако, съ тѣмъ, что мы видѣли въ предыдущемъ (см. § 8).