IV

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ

1881 ГОДА.

I.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1882.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *Г. Цѣхановецкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ, 22 ЯНВАРЯ 1881 ГОДА.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, Д. М. Деларю, Ю. И. Морозовъ, М. Ѳ. Ковальскій, С. А. Раевскій, А. П. Грузинцевъ, И. К. Шейдтъ, Г. В. Левицкій, Б. И. Снарскій, А. А. Клюшниковъ, И. Д. Штукаревъ.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Доложены письма: секретаря французскаго математическаго общества, секретаря вашингтонской обсерваторіи, редактора журнала Fortschritte der Mathematique и ректора кіевскаго университета касательно обмѣна изданій.

Г. предсѣдательствующій предложилъ обществу обсудить вопросъ объ учительскихъ экзаменахъ.

Постановлено: разсмотрѣть этотъ вопросъ въ ближайшемъ засѣданіи общества.

В. Г. Имшенецкій сообщилъ обществу полученную имъ отъ г. профессора кіевскаго университета В. П. Ермакова замѣтку подъ заглавіемъ: «Замѣна перемѣнныхъ, какъ способъ для разысканія интегрирующаго множителя и какъ средство для понижения порядка дифференціальныхъ уравненій».

Затѣмъ *В. Г. Имшенецкій* изложилъ свои соображенія по поводу замѣтки В. П. Ермакова.

К. А. Андреевъ сообщилъ некрологъ французскаго геометра Шаля.

М. Θ. Ковальскій сообщилъ замѣтку: О характерѣ интеграла $\int e^{-bxi} \operatorname{Sin} bx.dx.$

ЗАМѢНА ПЕРЕМѢННЫХЪ,

КАКЪ СПОСОБЪ ДЛЯ РАЗЫСКАНІЯ ИНТЕГРИРУЮЩАГО МНОЖИТЕЛЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ И КАКЪ СРЕДСТВО ДЛЯ ПОНИЖЕНІЯ ПОРЯДКА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Проф. *В. П. Ермакова**.

I.

Кіевъ. 14 Декабря 1880.

«.... Часто приходится преобразовывать дифференціальныя уравненія къ новымъ перемѣннымъ. Случается иногда, что формулы преобразованія содержатъ произвольныя постоянныя, которыя не входятъ ни въ данныя, ни въ преобразованныя уравненія. Этимъ обстоятельствомъ всегда можно воспользоваться для уменьшенія числа перемѣнныхъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда дано или уравненіе съ частными производными, или система какихъ бы то ни было совокупныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка».

«Общее правило, съ нѣкоторыми, впрочемъ, ограниченіями для уравненій съ частными производными, слѣдующее: *число пере-*

* Настоящее сообщеніе извлечено мною изъ нѣсколькихъ писемъ ко мнѣ профессора университета Св. Владиміра *В. П. Ермакова* и изъ моихъ отвѣтовъ на эти письма. Изложеніе, принадлежащее г. Ермакову, въ отличіе моего собственнаго, отмѣчено знаками «....»

В. Имшенецкій.

мѣнныхъ всегда можетъ быть уменьшено на столько единицъ, сколько произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія».

«Система обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка можетъ быть приведена къ квадратурамъ, если число уравненій равно числу произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія».

«Что касается дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$Mdx + Ndy = 0,$$

то положимъ, что это уравненіе, послѣ преобразованія по формуламъ:

$$\varphi(x, y, c) = z, \quad \psi(x, y, c) = s,$$

не будетъ содержать произвольнаго постояннаго c. Въ такомъ случаѣ можно показать, что интегральный множитель даннаго уравненія будетъ:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}}{M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial c}\right) + N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial c} - \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}».$$

«Такъ, напримѣръ, однородное уравненіе не измѣняется послѣ преобразованія по формуламъ:

$$cx = z, \; cy = s;$$

слѣдовательно интегральный множитель однороднаго уравненія будетъ:

$$\frac{c}{Mx + Ny}».$$

«Если дифференціальное уравненіе не измѣняется при поворачиваніи прямоугольныхъ осей на произвольный уголъ, то его интегральный множитель будетъ:

$$\frac{1}{My - Nx}».$$

II.

Харьковъ. 27 Декабря 1880.

...Прежде чѣмъ отвѣчать на Ваше письмо отъ 14 декабря я попытался найти доказательство данной Вами формулы множителя интегрируемости уравненія

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

которое, послѣ преобразованія по формуламъ:

$$\varphi(x, y, c) = z \text{ и } \psi(x, y, c) = s, \tag{2}$$

не должно содержать въ себѣ произвольнаго постояннаго c.

Для этого полагая, что

$$f(x, y, c) = \text{Const}. \tag{3}$$

есть интегралъ (1), будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu . M \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = \mu . N, \tag{4}$$

если μ означаетъ множитель интегрируемости уравненія (1).

Но если, согласно предположенію, послѣ преобразованія уравненія (1), помощію формулъ (2), въ преобразованное уравненіе не войдетъ c, то оно не должно входить также и въ интегралъ этого уравненія. Интегралъ же этотъ можно получить посредствомъ исключенія x и y изъ уравненій (2) и (3), при чемъ, въ силу только-что сдѣланнаго замѣчанія, должно исключиться также и c. Слѣдовательно, функція f, входящая въ (3), должна имѣть способность выражаться посредствомъ однихъ только перемѣнныхъ z и s, безъ помощи c, или, что то-же — посредствомъ функцій φ и ψ, входящихъ во (2). Для этого, какъ извѣстно, необходимо должно быть выполнено тождественно условіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial c} \end{vmatrix} = 0,$$

которое, на основании уравнений (4), принимаетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} \mu M, & \mu N, & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial c} \end{vmatrix} = 0,$$

а отсюда находимъ:

$$\mu = -\frac{\frac{\partial f}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{M\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial c} - \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)}. \quad (5)$$

Формула множителя интегрируемости (5) отличается отъ данной Вами только множителемъ $\frac{\partial f}{\partial c}$, который однако, кажется, препятствуетъ по извѣстнымъ φ и ψ вычислять μ a priori, т. е. не зная f.

Правда, что обѣ формулы для μ сдѣлаются совершенно одинаковыми, если уравненіе (4) предположимъ вида:

$$f(x, y) + c = \text{Const},$$

что представляется, по-видимому, возможнымъ, если c не входитъ въ M и N. Но противъ этого можно возразить, что самый интегрирующій множитель μ, опредѣленный по данной Вами формулѣ, можетъ вводить c въ интегралъ уравненія (1) неизвѣстно какимъ образомъ, такъ что интегралъ этотъ все таки необходимо предполагать вида (3).

III.

Кіевъ. 30 Декабря 1880.

«.... Въ математическихъ изслѣдованіяхъ сомнѣніе — великое дѣло, точность — тоже; виноватъ предъ Вами въ неточной формулировкѣ моего сообщенія. Позвольте здѣсь изложить какъ точное содержаніе самой теоремы, такъ и ея доказательство».

«Положимъ, что уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

не содержитъ произвольнаго постояннаго c.

Положимъ, что это уравненіе, послѣ преобразованія по формуламъ:

$$\varphi(x, y, c) = z,\ \psi(x, y, c) = s, \qquad (2)$$

содержащимъ произвольное постоянное c, и послѣ умноженія или сокращенія на нѣкотораго множителя, также не будетъ содержать постояннаго c. Въ такомъ случаѣ уравненіе (1) имѣетъ извѣстный Вамъ интегральный множитель».

«Прежде чѣмъ приступить къ доказательству, припомнимъ, что если μ есть интегральный множитель уравненія (1), то всякій другой интегральный множитель приметъ форму $\mu f(v)$, гдѣ

$$dv = \mu Mdx + \mu Ndy. \qquad (3)$$

Положимъ, что уравненіе (1), послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ (2) и по сокращеніи или умноженіи на нѣкотораго множителя, приметъ форму:

$$Pdz + Qds = 0. \qquad (4)$$

Это уравненіе, по предположенію, также не содержитъ постояннаго c.

Принимая не только x и y, но и c за перемѣнное, дифференцируя въ этомъ предположеніи уравненія (2) и подставляя найденныя значенія для dz и ds въ уравненіе (4), получимъ:

$$\left(P\frac{d\varphi}{dx}+Q\frac{d\psi}{dx}\right)dx+\left(P\frac{d\varphi}{dy}+Q\frac{d\psi}{dy}\right)dy+$$
$$+\left(P\frac{d\varphi}{dc}+Q\frac{d\psi}{dc}\right)dc=0. \quad (5)$$

Если мы въ этомъ послѣднемъ уравненіи положимъ $dc=0$, то полученное уравненіе должно быть тождественно съ уравненіемъ (1) или отличаться отъ него на нѣкоторый множитель, слѣдовательно:

$$P\frac{d\varphi}{dx}+Q\frac{d\psi}{dx}=MR, \quad P\frac{d\varphi}{dy}+Q\frac{d\psi}{dy}=NR.$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій P и Q, подставивъ найденныя значенія въ уравненіе (5) и сокративъ на R, получимъ:

$$Mdx+Ndy+\omega dc=0, \quad (6)$$

гдѣ для краткости положено:

$$-\frac{M\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dc}-\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dy}\right)+N\left(\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dc}\right)}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}}=\omega.$$

Пусть μ интегральный множитель уравненія (1), не содержащій постояннаго c; умножая уравненіе (6) на μ и принимая во вниманіе уравненіе (3), получимъ:

$$dv+\mu\omega dc=0. \quad (7)$$

Извѣстно, что линейное уравненіе съ тремя дифференціалами не всегда можетъ быть проинтегрировано при помощи одной зависимости между тремя перемѣнными. Въ настоящемъ случаѣ уравненіе (6), какъ происшедшее изъ (4), содержащаго двѣ перемѣнныя, можетъ быть проинтегрировано при помощи одной зависимости между x, y и c. Это возможно только въ томъ случаѣ, когда въ уравненіи (7) коэффиціентъ при dc есть нѣкоторая функція v и c,

$$\mu\omega=f(v,c),$$

откуда

$$\frac{\mu}{f(v,c)}=\frac{1}{\omega}.$$

Первая часть этого уравненія есть интегральный множитель уравненія (1) [если c постоянная величина], слѣдовательно $\frac{1}{\omega}$ есть также интегральный множитель уравненія (1), что и требовалось доказать[1].

---

[1] Въ дополненіе къ аргументаціи автора можно прибавить, что такъ-какъ уравненіе (6) должно интегрироваться посредствомъ одной зависимости между x, y и c, то должно быть выполнено извѣстное Эйлерово условіе интегрируемости:

$$M\left(\frac{\partial N}{\partial c}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)+N\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial c}\right)+\omega\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0.$$

Но по условію $\frac{\partial M}{\partial c}=0$ и $\frac{\partial N}{\partial c}=0$; слѣдовательно имѣемъ:

$$N\frac{\partial \omega}{\partial x}-\omega\frac{\partial N}{\partial x}=M\frac{\partial \omega}{\partial y}-\omega\frac{\partial M}{\partial y},$$

откуда, умноживъ обѣ части равенства на $-\frac{1}{\omega^2}$, получимъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{N}{\omega}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{M}{\omega}\right)}{\partial y},$$

что и показываетъ, что $\frac{1}{\omega}$ есть множитель интегрируемости уравненія (1).

Отсюда обнаруживается еще слѣдующее интересное заключеніе: вообще, если трехчленное уравненіе

$$\varphi(x,y)\,dx+\psi(x,y)\,dy+\omega(x,y,z)\,dz=0$$

допускаетъ интегралъ вида $\chi(x,y,z)=\text{const}$; то $\frac{1}{\omega}$ есть множитель интегрируемости дифференціальнаго уравненія

$$\varphi(x,y)\,dx+\psi(x,y)\,dy=0.$$

(В. И.)

Примѣръ 1. Уравненіе

$$\{x\varphi(x^2+y^2)+y\psi(x^2+y^2)\}\,dx+\{y\varphi(x^2+y^2)-x\psi(x^2+y^2)\}\,dy=0$$

при поворачиваніи осей на произвольный уголъ, т. е. послѣ преобразованія по формуламъ:

$$x\,\mathrm{Cos}\,c+y\,\mathrm{Sin}\,c=z,\quad x\,\mathrm{Sin}\,c-y\,\mathrm{Cos}\,c=s$$

не только не содержитъ постояннаго c, но даже не измѣняетъ формы. Его интегральный множитель

$$\frac{1}{My-Nx}=\frac{1}{(x^2+y^2)\,\psi(x^2+y^2)}.$$

Примѣръ 2. Уравненіе

$$\{\varphi(x+y)+y^2\}\,dx+\{\varphi(x+y)+x^2\}\,dy=0$$

послѣ преобразованія по формуламъ:

$$x+y=z,\ xy+c(x+y)=s$$

не содержитъ постояннаго c. Его интегральный множитель:

$$\frac{y-x}{(N-M)(x+y)}=\frac{-1}{(x+y)^2}.$$

«Позвольте исправить неточность въ прежнемъ моемъ письмѣ. Я писалъ Вамъ, что въ дифференціальныхъ уравненіяхъ число перемѣнныхъ можетъ быть уменьшено на столько единицъ, сколько произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія. Это— невѣрно. Если число произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія означимъ черезъ n, то число перемѣнныхъ, которыя можно исключить изъ уравненій, равно или больше $\frac{n}{2}$ и меньше или равно n. Каноническія уравненія допускаютъ нѣкоторыя исключенія. Если формулы преобразованія каноническихъ уравненій содержатъ n произвольныхъ постоянныхъ, которыя не входятъ явно ни въ данныя, ни въ преобразованныя уравненія, то можно найти n интеграловъ каноническихъ уравненiй. Число перемѣнныхъ, которыя можно исключить изъ уравненiй, всегда четное и равно или больше n и меньше или равно $2n$. Это исключенiе всегда можно сдѣлать такъ, чтобы уравненiя съ уменьшеннымъ числомъ перемѣнныхъ были также каноническiя. Это доказано (т. е. исключенiе помощiю извѣстныхъ интеграловъ) *Майеромъ* и *Ли*.

«P. S. Я имѣю еще другое доказательство, различное отъ предъидущаго. Это доказательство относится впрочемъ къ уравненiямъ со многими перемѣнными и къ уравненiямъ съ частными производными; изъ него, какъ частный случай, слѣдуетъ доказанное (выше) предложенiе».

Примѣчанiе. Если M и N содержатъ постоянное c, то теорема не имѣетъ мѣста, ибо тогда уравненiе (7) превратилось бы въ слѣдующее:

$$dv + \left(\mu\omega - \frac{dv}{dc}\right) dc = 0».$$

IV.

Харьковъ. 6 Января 1881 г.

Я вполнѣ убѣдился Вашимъ доказательствомъ и вмѣстѣ съ тѣмъ замѣтилъ, что и мое доказательство Вашей теоремы также приводитъ къ цѣли съ помощiю слѣдующаго дополненiя.

Въ множителя интегрируемости μ даннаго уравненiя

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

всегда можно ввести произвольное постоянное c, не входящее въ M и N. Для этого, зная какой-нибудь множитель интегрируемости λ уравненiя (1), достаточно положить $\mu = \pi(\lambda, c)$, гдѣ π произвольная функцiя.

Слѣдовательно можно полагать:

$$\mu(Mdx + Ndy) = d.f(x, y, c), \qquad (2)$$

т. е. предполагать интегралъ уравненія (1) подъ видомъ:

$$f(x, y, c) = \mathrm{Const} = a. \qquad (3)$$

Но дифференцируя (2) частнымъ образомъ въ отношеніи c, найдемъ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial c}(Mdx + Ndy) = d \, . \, \frac{\partial f}{\partial c}. \qquad (4)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{\partial \mu}{\partial c}$ есть также интегрирующій множитель уравненія (1) и что

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \mathrm{Const} = b$$

есть также интегралъ уравненія (1).

Поэтому необходимо функціи f и $\frac{\partial f}{\partial c}$ должны выражаться одна посредствомъ другой; это видно изъ того, что выраженіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \, . \, \frac{\partial f}{\partial c}}{\partial x}, & \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial c}}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu M, & \mu N \\ \frac{\partial \mu}{\partial c} . M, & \frac{\partial \mu}{\partial c} N \end{vmatrix} = M . N \begin{vmatrix} \mu, & \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial c}, & \frac{\partial \mu}{\partial c} \end{vmatrix}$$

тождественно равно нулю.

И такъ, если $\frac{\partial f}{\partial c} = \theta(f)$, то полученное въ первомъ моемъ письмѣ (II) выраженіе для

$$\frac{\mu}{\frac{\partial f}{\partial c}} \text{ или } \frac{\mu}{\theta(f)}$$

есть интегрирующій множитель уравненія (1), что и доказываетъ вашу теорему.

Мнѣ кажется, не лишено интереса слѣдующее упрощеніе какъ доказательства разсматриваемой теоремы, такъ и выраженія интегрирующаго множителя.

Данное дифференціальное уравненіе, не уменьшая его общности, можно взять подъ видомъ:

$$Mdx + dy = 0$$

и, предполагая, что въ его множителя интегрируемости μ введено произвольное постоянное c, не входящее въ M, положить:

$$\mu\,(Mdx + dy) = d.\,f\,(x, y, c).$$

Теперь допустимъ, что помощію зависимости

$$\varphi\,(x, y, c) = z$$

можно въ данномъ уравненіи замѣнить y на z, не вводя c въ преобразованное уравненіе

$$Pdx + Qdz = 0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія, не содержащій c, получится изъ интеграла

$$f\,(x, y, c) = \text{Const}.$$

предложеннаго уравненія, если изъ него можно исключить y вмѣстѣ съ c помощію зависимости $\varphi\,(x, y, c) = z$.

Для этого необходимо тождество

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu, & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имѣемъ

$$\frac{\mu}{\frac{\partial f}{\partial c}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}.$$

Такъ какъ $\frac{\partial f}{\partial c} = \Theta\,(f)$, то $\dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}$ есть интегрирующій множитель даннаго дифференціальнаго уравненія.

Эту упрощенную форму множителя можно конечно получить изъ данной выше, взявъ $x = s$ вмѣсто $\psi(x, y, c) = s$; но прямое доказательство гораздо проще.

Помощію упрощенной формулы множителя можно попытаться рѣшить общую задачу, какъ по данному M найдти φ, или по крайней мѣрѣ обратную задачу: опредѣлить M по данному φ.

Первая задача приводитъ къ очень сложному уравненію въ частныхъ производныхъ втораго порядка, интегрированіе котораго не выполнимо; напротивъ, обратная задача легко разрѣшается. Это показываетъ, что можно дать неограниченное число примѣровъ дифференціальныхъ уравненій интегрируемыхъ по этому способу; можно даже всякое дифференціальное уравненіе перваго порядка съ 2-мя перемѣнными, уже проинтегрированное, подготовить потомъ такъ, чтобы оно интегрировалось также и по предъидущему способу.

Примѣчаніе. Въ моемъ письмѣ я ограничился предыдущими указаніями, по этому и здѣсь я не привожу доказательства моихъ послѣднихъ утвержденій, выводъ которыхъ впрочемъ довольно простъ.

V.

Кіевъ. 13 Января 1881.

«Весьма радъ, что Вы заинтересованы моимъ сообщеніемъ. Совершенно вѣрно, что Вашъ пріемъ приводитъ также къ искомому доказательству. Удивительно, какъ раньше ни Вы въ первомъ письмѣ, ни я, прочитавши его, не догадались, что если

$$f\ (x, y, c) = \text{постоянному}$$

есть интегралъ дифференціальнаго уравненія не содержащаго c, то

$$\frac{df}{dc} = \text{постоянному}$$

есть также интегралъ того-же уравненія».

«Досадно становится на самого себя, что я, будучи уже увѣренъ въ вѣрности теоремы, забылъ о томъ, что каковъ бы ни былъ путь, выбранный нами для доказательства извѣстной истины, разъ этотъ путь строгъ и вѣренъ, онъ долженъ непремѣнно привести къ искомому доказательству».

«Ваше доказательство привело меня къ мысли о существованіи еще новаго третьяго доказательства. Спѣшу сообщить это доказательство. Оно передъ извѣстными двумя имѣетъ то преимущество, что весьма легко можетъ быть примѣнено и къ системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка».

«Положимъ, какъ и прежде, что дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

не содержащее постояннаго c, послѣ преобразованія по формуламъ

$$\varphi(x, y, c) = z, \psi(x, y, c) = s \tag{2}$$

не будетъ также содержать постояннаго c. Пусть

$$f(x, y) = \text{постоянному}$$

есть интегралъ уравненія (1), положимъ, что $f(x, y)$ не содержитъ c. Если мы въ это уравненіе подставимъ вмѣсто x и y ихъ значенія изъ уравненій (2), то получимъ интегралъ преобразованнаго уравненія; такъ-какъ по условію преобразованное уравненіе не содержитъ постояннаго c, то

$$\frac{df}{dc} = \text{постоянному}$$

есть также интегралъ преобразованнаго уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{df}{dc} = \theta(f).$$

Взявъ на самомъ дѣлѣ производную по c въ томъ предположеніи, что x и y суть функціи c, получимъ послѣднее уравненіе въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dc}=\Theta(f). \qquad (3)$$

Если мы положимъ, что

$$\int\frac{df}{\Theta(f)}=\phi,$$

то уравненіе (3) можно привести къ виду:

$$\frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{d\phi}{dy}\frac{dy}{dc}=1. \qquad (4)$$

Легко видѣть, что ϕ = постоянному есть интегралъ уравненія (1); слѣдовательно функція ϕ должна удовлетворять уравненію:

$$N\frac{d\phi}{dx}-M\frac{d\phi}{dy}=0.$$

Рѣшая послѣднее уравненіе совмѣстно съ (4), получимъ:

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{M}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}},\quad \frac{d\phi}{dy}=\frac{N}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}},$$

откуда:

$$d\phi=\frac{Mdx+Ndy}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}}.$$

Отсюда мы видимъ, что

$$\frac{1}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}} \qquad (5)$$

есть интегральный множитель уравненія (1); въ этомъ выраженіи вмѣсто $\frac{dx}{dc}$ и $\frac{dy}{dc}$ нужно подставить ихъ значенія изъ уравненій (2), т. е. изъ уравненій:

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{d\varphi}{dc}=0,\quad \frac{d\psi}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{d\psi}{dc}=0.$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій на самомъ дѣлѣ $\frac{dx}{dc}$ и $\frac{dy}{dc}$ и подставивъ найденныя значенія въ выраженіи (5), получимъ интегральный множитель въ извѣстной уже формѣ.

Наша теорема не имѣетъ мѣста въ томъ случаѣ, когда знаменатель

$$M\left(\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dc}\right)+N\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dc}-\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dx}\right)$$

тождественно обращается въ нуль. Можно легко показать, что въ этомъ случаѣ искомый интегралъ уравненія (1) получается, если мы изъ уравненій (2) исключимъ c и въ результатѣ исключенія вмѣсто z и s подставимъ произвольныя постоянныя».

«Легко видѣть, что формулы (2), если только при помощи ихъ нѣкоторое дифференціальное уравненіе, не содержащее c, можетъ быть преобразовано въ другое, также не содержащее c, не могутъ быть произвольны; какимъ-же условіемъ они ограничены? Хотя въ математикѣ и неприлично проводить теоремы, не зная ихъ доказательствъ, но на этотъ разъ я отступаю отъ законовъ приличій. Я полагаю, что вѣроятно формулы (2) могутъ быть приведены къ виду:

$$f_1(x,y)+\Phi(c)=\Phi_1(z,s),\quad f_2(x,y)=\Phi_2(z,s).$$

Легко примѣнить данное выше доказательство къ системѣ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots$$

Положимъ, что эти уравненія не содержатъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ и формулами преобразованія, содержащими эти постоянныя, приводятся къ новымъ уравненіямъ, которыя постоянныхъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ не заключаютъ.

Подобно тому, какъ прежде, вопросъ можно привести къ опредѣленію функціи Φ, удовлетворяющей уравненію

$$X_1\frac{d\Phi}{dx_1}+X_2\frac{d\Phi}{dx_2}+X_3\frac{d\Phi}{dx_3}+\ldots=0 \tag{6}$$

и одному изъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\Phi}{dx_1}\dfrac{dx_1}{dc_1}+\dfrac{d\Phi}{dx_2}\dfrac{dx_2}{dc_1}+\ldots=a_1\\[2ex]\dfrac{d\Phi}{dx_1}\dfrac{dx_1}{dc_2}+\dfrac{d\Phi}{dx_2}\dfrac{dx_2}{dc_2}+\ldots=a_2\\[2ex]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(7)$$

каждое изъ послѣднихъ уравненій въ отдѣльности имѣетъ общее рѣшеніе съ (6), но всѣ вмѣстѣ уравненія таковаго рѣшенія могутъ не имѣть. Основываясь на извѣстномъ методѣ Якоби для интегрированія уравненія съ частными производными (Пятая глава Вашего сочиненія: Sur l'integration des équations aux derivées partielles du premier ordre) можно составить нѣсколько новыхъ линейныхъ уравненій съ частными производными, число которыхъ всегда больше половины числа уравненій (7), такимъ образомъ, что эти новыя уравненія совмѣстно съ уравненіемъ (6) будутъ имѣть общее рѣшеніе. И такъ, задача приведется къ интегрированію нѣсколькихъ линейныхъ уравненій съ частными производными. Относительно этихъ уравненій Mayer доказалъ въ Mathematische Annalen (томъ V, 1872 года) слѣдующее:

«Система n линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка съ m перемѣнными можетъ быть приведена къ интегрированію одного линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка съ $m-n+1$ перемѣнными».

«Это послѣднее уравненіе въ свою очередь приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій; число перемѣнныхъ въ этой новой системѣ на $n-1$ меньше числа перемѣнныхъ данной системы».

P. S. Это новое доказательство по идеѣ и по сущности мало чѣмъ отличается отъ Вашего.

VI*.

Кіевъ. 8 Февраля 1881.

«Послѣ моего третьяго письма къ Вамъ профессоръ лейпцигскаго университета *Майеръ* въ письмѣ ко мнѣ указалъ на тѣсную связь моей теоремы съ изслѣдованіемъ *Ли* въ XI томѣ Mathematische Annalen (Infinitisimale Transformationen, стр. 490). Сущность теоремы Ли можно выразить слѣдующимъ образомъ».

«Если при варіированіи по формуламъ

$$\delta x = \xi \delta t, \quad \delta y = \eta \delta t,$$

въ которыхъ ξ и η суть нѣкоторыя функціи x и y, варіяція первой части дифференціальнаго уравненія

$$Mdx + Ndy = 0$$

исчезаетъ, т. е. само дифференціальное уравненіе не измѣняется, то

$$\frac{1}{M\xi + N\eta}$$

есть интегральный множитель уравненія».

«Эту теорему Ли тамъ-же распространилъ на уравненія со многими перемѣнными и на уравненія съ частными производными перваго порядка».

---

* Это письмо получено во время печатанія предыдущихъ. (*В. И.*).

Протоколъ засѣданія 9-го февраля 1881 года.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, Д. М. Деларю, И. К. Шейдтъ, А. П. Грузинцевъ А. А. Клюшниковъ, П. М. Рудневъ, И. Д. Штукаревъ, М. С. Косенко, Г. В. Левицкій.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

По открытіи засѣданія г. предсѣдатель предложилъ обществу обсудить вопросъ объ учительскихъ экзаменахъ.

Замѣчанія, высказанныя по этому вопросу гг. членами общества, вкратцѣ, заключались въ слѣдующемъ:

До введенія нынѣ существующихъ правилъ объ учительскихъ экзаменахъ, молодые люди, желающіе имѣть званіе учителя, получали спеціальную педагогическую подготовку или въ теченіи университетскаго курса подъ руководствомъ особенно назначеннаго для того профессора, или, какъ введено было въ послѣдствіи, по окончаніи университетскаго курса должны были посвящать еще два года на эту подготовку. По теперешнимъ правиламъ, права на званіе учителя пріобрѣтаются не кандидатскимъ дипломомъ или аттестатомъ дѣйствительнаго студента, а особеннымъ учительскимъ экзаменомъ по нѣкоторымъ предметамъ университетскаго курса, въ меньшемъ, притомъ, объемѣ, чѣмъ на университетскомъ экзаменѣ. Такимъ образомъ, къ званію учителя, наравнѣ съ воспитанниками высшихъ учебныхъ заведеній, получали доступъ и лица, не получившія вовсе высшаго образованія, причемъ какъ отъ тѣхъ, такъ и отъ другихъ никакой спеціальной педагогической подготовки не спрашивается, если не считать двухъ пробныхъ лекцій, дающихъ весьма мало возможности судить о готовности будущаго преподавателя къ избранной имъ дѣятельности.

Математическое общество полагаетъ, что многіе недостатки дѣйствующихъ нынѣ постановленій объ учительскихъ экзаменахъ могутъ быть устранены, если студенты университета, желающіе впослѣдствіи быть учителями, въ теченіи 2-го, 3-го и 4-го курсовъ, кромѣ обычныхъ университетскихъ занятій, будутъ получать еще спеціальную педагогическую подготовку, которая, на основаніи одного изъ параграфовъ нынѣ существующихъ правилъ объ учительскихъ экзаменахъ, даетъ имъ право на полученіе званія учителя безъ всякихъ дальнѣйшихъ экзаменовъ. Упомянутая подготовка, получаемая подъ руководствомъ профессоровъ, должна заключаться въ ознакомленіи съ существующими учебниками для среднихъ учебныхъ заведеній, съ исторіей наукъ и съ педагогикой. Кромѣ того, по опытнымъ наукамъ, студенты должны упражняться въ производствѣ демонстративныхъ опытовъ. Такія занятія, будучи распредѣлены на три года, не обременятъ учащихся, дадутъ имъ значительный запасъ свѣдѣній, непосредственно примѣняемыхъ въ учительской дѣятельности, будутъ способствовать успѣшному прохожденію студентами университетскаго курса и, кромѣ того, несравненно болѣе, чѣмъ экзамены и пробныя лекціи, дадутъ университету возможность судить о степени подготовки будущихъ преподавателей. Что касается, затѣмъ, до лицъ, вовсе не бывшихъ въ университетѣ, и до студентовъ, не участвовавшихъ въ добавочныхъ занятіяхъ, но тѣмъ не менѣе желающихъ получить право на званіе учителя, то такія лица должны подвергаться экзамену, по программѣ, соотвѣтствующей курсу добавочныхъ занятій.

По порученію общества Д. М. Деларю и К. А. Андреевъ приняли на себя трудъ составить къ будущему засѣданію болѣе подробную записку по этому вопросу.

МИШЕЛЬ ШАЛЬ.

(Некрологъ).

Профессора К. А. Андреева.

Въ засѣданiи 20-го декабря 1880 года парижская академiя наукъ была извѣщена чрезъ своего предсѣдателя о тяжелой утратѣ, которую ей пришлось понести. 18-го числа умеръ одинъ изъ наиболѣе уважаемыхъ и любимыхъ членовъ этой ученой коллегiи, одинъ изъ наиболѣе знаменитыхъ представителей науки, геометръ *Мишель Шаль* (Michel Chasles).

Въ знакъ глубокой скорби, постигшей академiю, засѣданiе, по обычаю, было немедленно закрыто и академики разошлись, съ тѣмъ чтобы на другой же день собраться снова у гроба всѣми чтимаго товарища, воздать его праху подобающiя почести и сказать послѣднее прощальное слово.

Въ нѣсколькихъ краткихъ, но задушевныхъ рѣчахъ, произнесенныхъ надъ гробомъ маститаго ученаго, его товарищи и друзья, представители ученыхъ учрежденiй и обществъ, изобразили правдиво и просто высокiя качества его души и указали на то великое наслѣдiе, которое Шаль въ своихъ трудахъ оставилъ ученому мiру.

Придетъ, конечно, время, когда люди, знавшiе близко эту свѣтлую личность и призванные стоять во главѣ научныхъ движенiй, запечатлѣютъ въ памяти потомства, посредствомъ подробнаго жизнеописанiя и всесторонней оцѣнки трудовъ, высокiй образецъ ученаго дѣятеля, представляемый Мишелемъ Шалемъ. Въ ожиданіи этого достойнаго монумента позволимъ себѣ принести и съ своей стороны на свѣжую еще могилу посильное приношеніе, предлагая вниманію русскихъ читателей нѣсколько словъ о великомъ человѣкѣ, изученіе трудовъ котораго было для насъ излюбленнымъ предметомъ занятій и, мы увѣрены, предметомъ наиболѣе полезнымъ.

Мишель Шаль родился въ Эпернонѣ (въ департаментѣ Эры и Луары) 15-го ноября 1793 года. Еще въ лицеѣ, гдѣ онъ получилъ начальное математическое образованіе, обнаружилась его особенная склонность къ точнымъ наукамъ, выразившаяся главнымъ образомъ пристрастіемъ къ самостоятельному розысканію изящныхъ и простыхъ рѣшеній различныхъ трудныхъ задачъ, которыми онъ обмѣнивался съ нѣкоторыми своими сверстниками. Въ 1812 году, будучи 19-ти лѣтъ, онъ вступилъ въ политехническую школу. Оставивши ее въ 1814 году, когда она была распущена, Шаль, подобно другому знаменитому геометру, Понселе, готовъ былъ посвятить себя военно-инженерному дѣлу, какъ одно случайное обстоятельство отклонило его отъ этой карьеры. Отецъ одного изъ его товарищей по школѣ, который былъ первымъ изъ неполучившихъ мѣста воспитанниковъ ихъ выпуска, обратился къ нему съ просьбой отказаться отъ предстоящей ему государственной службы и тѣмъ дать возможность его сыну получить мѣсто. Шаль былъ человѣкъ обезпеченный и не упускалъ случая подать своимъ товарищамъ руку помощи. Не колеблясь нимало, онъ отказался отъ эполетъ инженернаго офицера и въ 1815 году вторично поступилъ въ политехническую школу. Послѣ полнаго окончанія въ ней курса онъ удалился въ Шартръ къ своей матери и нѣсколько лѣтъ былъ, по-видимому, чуждъ быстраго научнаго движенія того времени. На самомъ же дѣлѣ въ это время подготовлялись лучшія изъ его изобрѣтеній, долженствовавшія обезсмертить его имя.

Преданность свою чисто геометрическимъ изслѣдованіямъ Шаль выказалъ еще въ свое пребываніе въ политехнической школѣ, когда помѣстилъ въ журналѣ «Correspondance sur l'Ecole Polytechnique»[1], издававшемся Гашетомъ (Hachette), нѣсколько интересныхъ замѣтокъ и одинъ мемуаръ, содержащій геометрическое доказательство теоремъ Монжа о поверхностяхъ втораго порядка, доказанныхъ самимъ Монжемъ аналитически. Предметы этихъ первыхъ опытовъ могутъ показаться теперь слишкомъ простыми и элементарными, но не нужно забывать, что изслѣдованію свойствъ общихъ поверхностей втораго порядка положено было начало, собственно говоря, Монжемъ и въ то время первостепенные геометры посвящали свои силы этому предмету.

Послѣ десятилѣтняго молчанія въ теченіе времени, проведеннаго въ уединеніи на родинѣ и посвященнаго тщательному изученію любимыхъ научныхъ предметовъ, Шаль, благодаря существовавшимъ тогда спеціально-математическимъ журналамъ Жергона[2] и Кетле[3], выпустилъ въ свѣтъ рядъ мемуаровъ, относящихся по преимуществу къ геометріи. Къ тому времени относятся его изслѣдованія о стереографическихъ проекціяхъ, о параболическомъ преобразованіи, о фокусахъ и фокальныхъ линіяхъ конусовъ и поверхностей втораго порядка, теоремы, относящіяся къ статикѣ, а также первыя изслѣдованія о конечномъ и безконечно маломъ перемѣщеніи твердыхъ тѣлъ.

Вслѣдъ затѣмъ Шаль былъ избранъ корреспондентомъ брюссельской академіи наукъ и продолжалъ публиковать свои изслѣдованія въ ея изданіяхъ. Но въ родной странѣ его научныя заслуги не были признаны столь же скоро.

---

[1] Tomes II et III (1812—1815).

[2] «Annales de Mathématiques» de M. Gergonne (1810—1831), Nismes.

[3] «Correspondance mathématique et physique» de M. Quetelet (1825—1839), Gand et Bruxelles.

Нужно замѣтить, что время, когда Шаль начиналъ свою научную дѣятельность, было временемъ преобладанія трансцендентнаго анализа. Великіе таланты, украшавшіе тогда парижскую академію наукъ, употребляли свои гигантскія силы на развитіе теорій безконечно малыхъ и ихъ приложеній къ астрономіи, механикѣ и физикѣ. За ними старались слѣдовать и люди посредственныхъ способностей. Геометрическія же теоріи, каковы - ученіе о коническихъ сѣченіяхъ, о поверхностяхъ втораго порядка и вообще о линіяхъ и поверхностяхъ алгебраическихъ, были совершенно оставлены въ сторонѣ и считались предметомъ лишь элементарныхъ упражненій. Казалось, что всѣ вѣрили на слово Декарту, что въ этой области онъ не оставилъ болѣе потомству дѣлать изобрѣтеній, такъ-какъ всякій успѣхъ здѣсь долженъ достигаться лишь болѣе или менѣе терпѣливымъ выполненіемъ вычисленій по правиламъ и принципамъ, имъ уже установленнымъ. Такое предубѣжденіе не было поколеблено даже изящнымъ и въ высшей степени поучительнымъ трактатомъ Понселе «О проективныхъ свойствахъ фигуръ», изданнымъ въ 1822 году. Извѣстно, что послѣдующія работы Понселе, сдѣланныя въ томъ же направленіи и представленныя въ академію наукъ, встрѣтили тамъ весьма холодный пріемъ со стороны тогдашнихъ корифеевъ математики.

Нельзя отрицать, что это послужило однимъ изъ поводовъ къ переходу Понселе съ научно-геометрическаго поприща въ область механическихъ изысканій. Но, оставляя знамя геометріи, говоритъ Жозефъ Бертранъ, онъ передалъ его Шалю, который въ теченіе болѣе полувѣка не покидалъ его и съумѣлъ поставить на надлежащую высоту.

Первый капитальный трудъ Шаля, послужившій къ защитѣ и возвышенію геометрическихъ методовъ, было изданное въ 1837 году большое сочиненіе подъ заглавіемъ: «Историческій очеркъ происхожденія и развитія геометрическихъ методовъ» (Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie). Вотъ при какихъ обстоятельствахъ появилось это сочиненіе.

Брюссельскою академіею наукъ былъ предложенъ вопросъ о философскомъ разслѣдованіи различныхъ методовъ, употребляемыхъ въ новѣйшей геометріи вообще и въ-частности метода взаимныхъ поляръ. Въ началѣ 1830 года Шаль представилъ на эту тему обширный мемуаръ, носящій заглавіе: «Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie», которому было предпослано историческое введеніе. Въ то время какъ печатаніе этого мемуара было уже начато, авторъ возъимѣлъ счастливую мысль пополнить и расширить историческое введеніе, и съ этою цѣлью взялъ свое сочиненіе обратно. Въ теченіе семи лѣтъ Шаль трудился надъ поставленною себѣ задачей. Кетле, бывшій тогда секретаремъ брюссельской академіи, неоднократно обращался къ нему отъ имени послѣдней, прося поторопиться изданіемъ столь интереснаго сочиненія; но Шаль медлилъ, продолжалъ трудиться надъ усовершенствованіемъ своего произведенія, знакомился съ историческими документами и изучалъ древніе и восточные языки, чтобы имѣть возможность говорить объ этихъ документахъ съ полною компетентностью. Въ результатѣ такого усерднаго многолѣтняго труда получился большой томъ, состоящій изъ трехъ отдѣльныхъ частей, общее заглавіе котораго мы привели выше. Названный выше мемуаръ составилъ третью часть всего сочиненія; двѣ же остальныя замѣнили прежнее историческое введеніе. Изъ нихъ первая содержитъ собственно исторію геометріи въ Европѣ, начиная отъ Өалеса и кончая ближайшими послѣдователями Монжа, а вторая состоитъ изъ ряда болѣе или менѣе подробныхъ примѣчаній научно-историческаго характера. Эти двѣ части книги составляютъ безспорно наиболѣе важные ея отдѣлы и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе драгоцѣнный вкладъ въ науку.

Говоря объ «Историческомъ очеркѣ» Шаля, Бертранъ замѣчаетъ, что это есть наиболѣе ученое, наиболѣе глубокое и наиболѣе оригинальное изъ сочиненій, появлявшихся когда-либо по исторіи математики.

Основною задачею, которую поставилъ себѣ Шаль, разрабатывая это сочиненіе, было, по его собственнымъ словамъ, показать, что геометрія, считавшаяся въ теченіе послѣднихъ вѣковъ безсильною сама по себѣ и долженствующею извлекать свои средства для развитія изъ пособія алгебраическаго анализа, способна, напротивъ, имѣть свои собственные общіе принципы, свои особые методы могущественные и плодовитые, какъ и методы анализа; что геометрическіе методы имѣютъ даже иногда особыя преимущества, такъ-какъ позволяютъ проникать до общихъ началъ истинъ и обнаруживать таинственныя связи, соединяющія математическія истины, на первый взглядъ совершенно различныя.

Историческая часть книги раздѣляется на нѣсколько главъ, изъ которыхъ каждая посвящена обзору отдѣльной эпохи въ научной жизни народовъ. Первая глава имѣетъ предметомъ исторію древней греческой геометріи и оканчивается пятымъ столѣтіемъ нашей эры, т. е. временемъ комментаторовъ, передавшихъ намъ драгоцѣнныя свѣдѣнія о геометріи древнихъ. Слѣдующая, т. е. вторая глава начинается съ эпохи возрожденія, когда начали слагаться условія для чуждаго древнимъ направленія въ геометріи, выразившагося сближеніемъ ея съ количественнымъ анализомъ и приведшаго въ концѣ концовъ къ великому изобрѣтенію Декарта. Такимъ образомъ тысячелѣтній періодъ времени, протекшій между этими двумя эпохами и характеризуемый вообще какъ время застоя наукъ въ Европѣ, оказывается неотмѣченнымъ никакимъ научнымъ фактомъ изъ области геометріи. Собственно говоря, это не совсѣмъ справедливо, такъ-какъ и въ этотъ періодъ, преимущественно къ концу его, были въ западной Европѣ люди, преданные геометріи и оказавшіе ей несомнѣнныя, хотя и второстепенныя, услуги. Разсмотрѣнію этихъ услугъ Шаль отводитъ въ своей книгѣ особое мѣсто; именно въ 12-мъ примѣчаніи, занимающемъ около половины всей 2-й части книги и представляющемъ само по себѣ очень важный научно-историческій мемуаръ. Кромѣ названнаго предмета въ этомъ примѣчаніи находится обзоръ успѣховъ геометріи у арабовъ, и излагаются самостоятельныя научныя открытія и разслѣдованія, сдѣланныя Шалемъ относительно нѣкоторыхъ пунктовъ въ исторіи геометріи у индусовъ и у римлянъ. Изслѣдованія эти тѣмъ болѣе важны для интересующихся научною дѣятельностью Шаля, что ими положено только начало цѣлаго ряда работъ его въ томъ же направленіи, бывшихъ предметомъ многихъ его сообщеній академіи. Вотъ къ какимъ вопросамъ они относятся.

Въ началѣ настоящаго столѣтія нѣсколько англійскихъ оріенталистовъ (Edv. Strachey, 1813; J. Taylor, 1816, и H. T. Colebrooke, 1817) познакомили ученый міръ съ успѣхами, которые были сдѣланы въ математикѣ индусами, передавши содержаніе двухъ математическихъ сочиненій, написанныхъ на санскритскомъ языкѣ, авторами которыхъ были *Брамегупта*, жившій въ VI-мъ вѣкѣ, и *Баскара Ачарія*, въ XII-мъ вѣкѣ нашего лѣтосчисленія. Заключенія, которымъ давали поводъ эти документы, сводились къ тому, что индусами были сдѣланы значительные самостоятельные успѣхи въ математикѣ и преимущественно въ неопредѣленномъ анализѣ. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой и второй степени было ими разработано съ большими тонкостями, и сверхъ того были разобраны и разъяснены нѣкоторые общіе вопросы, не встрѣчающіеся ни у Діофанта, ни у Фермата и получившіе разрѣшеніе только въ трудахъ Эйлера. Что касается геометріи, то по отчетамъ упомянутыхъ оріенталистовъ приходилось дѣлать заключеніе, что познанія индусовъ изъ ея области стояли несравненно ниже ихъ свѣдѣній изъ алгебры, такъ-какъ элементы геометріи, находящіеся у Брамегупты и Баскары, представляютъ матеріалъ весьма скудный. Именно на этотъ пунктъ Шаль и обратилъ свое особенное вниманіе. Разобравши подробно и тщательно тѣ мѣста въ сочиненіяхъ Брамегупты и Баскары, которыя относятся къ геометріи, онъ пришелъ къ выводамъ совершенно иного рода. Изъ сочиненія Брамегупты онъ усмотрѣлъ, что геометрическая часть его вовсе не имѣетъ цѣлью изложеніе элементовъ, а относится цѣликомъ къ одной особой геометрической теоріи. Изложеніе этой теоріи настолько мастерское, что предложенія, входящія въ нее, тѣсно и разумно связаны между собою и въ нихъ нѣтъ ни одного излишняго. Вслѣдствіе этого на отдѣльныя элементарныя предложенія, находящіяся у Брамегупты, нѣтъ никакого основанія смотрѣть какъ на полный сводъ свѣдѣній индусовъ изъ элементовъ геометріи; скорѣе это были только тѣ, выбранныя изъ этой области, свѣдѣнія, которыя оказывались необходимыми для рѣшенія главнаго вопроса, поставленнаго какъ цѣль всей теоріи. Вопросъ этотъ есть слѣдующая чисто геометрическая задача. *Построить четыреугольникъ вписанный въ кругъ, въ которомъ всѣ части, какъ-то: площадь, діагонали, перпендикуляры, ихъ отрѣзки и діаметръ круга, выражались бы числами раціональными.*

Замѣчательно, что до Шаля никто не могъ усмотрѣть, что именно эта задача есть цѣль всего геометрическаго отдѣла книги Брамегупты. Причина этому, кажется, та, что выраженія, входящія въ эту часть, чрезвычайно сжаты и вслѣдствіе множества опущенныхъ и подразумѣвающихся словъ являются для большинства читающихъ весьма неопредѣленными и загадочными. Только Шалю, благодаря его таланту и пріобрѣтенной упорнымъ трудомъ эрудиціи, удалось найдти ключъ къ этимъ загадкамъ.

Итакъ, въ мѣстахъ сочиненія Брамегупты, посвященныхъ геометріи, Шаль усмотрѣлъ лишь образчикъ изслѣдованій индусовъ въ этой наукѣ, образчикъ мастерской, заставляющій предполагать, что эта наука разрабатывалась ими уже давно и въ значительно большемъ объемѣ, чѣмъ думали прежде. Намъ кажется, что именно эллиптичность выраженій въ геометрическихъ разсужденіяхъ Брамегупты служитъ подтвержденіемъ этому, такъ-какъ извѣстно, что въ наукѣ, какъ и въ языкѣ вообще, эллиптическія выраженія тѣмъ болѣе получаютъ мѣста и укореняются, чѣмъ болѣе разрабатывается область, къ которой они относятся.

Разобравши сочиненіе Баскары, жившаго на шесть столѣтій послѣ Брамегупты, Шаль допускаетъ, что этотъ геометръ могъ имѣть намѣреніе представить въ своемъ сочиненіи элементы индійской геометріи, но попытку эту слѣдуетъ признать весьма несовершенною. Кромѣ того, воспроизводя сочиненіе Брамегупты и комментируя его, Баскара называетъ неточными тѣ мѣста этого сочиненія, которыя оказываются вполнѣ строгими и справедливыми. Другія разсужденія Брамегупты Баскара находитъ слишкомъ трудными и не всегда примѣнимыми, между тѣмъ какъ Шаль не имѣетъ сомнѣнія относительно ихъ общности.

Эти обстоятельства, а также то, что значительно позднѣйшіе индійскіе комментаторы, примѣчанія которыхъ находятся въ концѣ книги Баскары, не исправляютъ заблужденій этого геометра, приводитъ Шаля къ заключенію, что въ теченіе времени отъ Брамегупты до Баскары и позднѣе математическія науки въ Индіи быстро клонились къ упадку. Было ли время Брамегупты временемъ дѣйствительнаго процвѣтанія математики въ Индіи, или же его сочиненіе есть само только случайно сохранившійся остатокъ болѣе древняго научнаго богатства? Вопросъ этотъ чрезвычайно интересенъ, но въ имѣющихся документахъ Шаль не усматриваетъ данныхъ ни для какого относительно его предположенія.

Другой весьма важный историческій вопросъ, на которомъ Шаль доказалъ свое остроуміе и ученость, есть находящееся въ томъ же 12-мъ примѣчаніи истолкованіе двухъ мѣстъ въ сочиненіи Боэція, римскаго ученаго и писателя, извѣстнаго подъ названіемъ «послѣдняго римлянина». Скажемъ нѣсколько словъ только объ одномъ изъ этихъ мѣстъ.

Боэцій жилъ въ началѣ VI-го столѣтія при остготскомъ королѣ Теодорихѣ и былъ послѣднимъ очень уважаемъ за свою ученость[1]. Онъ изложилъ на латинскомъ языкѣ многія произведенія греческихъ философовъ и геометровъ и оставилъ намъ драгоцѣнныя свидѣтельства по исторіи наукъ. Въ его геометріи есть указаніе на происхожденіе нашей письменной нумераціи и исторію введенія знаковъ, которые принято теперь называть арабскими цифрами. Указанія эти долго оставались совершенно непонятыми, и, въ силу другихъ позднѣйшихъ свидѣтельствъ, признавалось обыкновенно, что употребляемое теперь письменное счисленіе, существенную особенность котораго составляетъ прогрессивное возрастаніе значеній одной и той-же цифры, смотря по занимаемому ею мѣсту, перешло въ Европу отъ арабовъ, которые въ свою очередь заимствовали его у индусовъ. Шаль, пользуясь спискомъ геометріи Боэція, находящимся въ библіотекѣ Шартра, далъ строго-научное разъясненіе указаніямъ Боэція, въ результатѣ котораго оказалось, что еще во времена этого ученаго наше письменное счисленіе, хотя и въ весьма несовершенномъ видѣ, употреблялось для вычисленія площадей поверхности и что честь изобрѣтенія этого превосходнаго орудія нужно съ большою вѣроятностью приписывать пиѳагорейцамъ. Вотъ подлинныя слова Боэція.

«Пиѳагорейцы, чтобы избѣжать ошибокъ при умноженіяхъ, дѣленіяхъ и измѣреніяхъ (такъ-какъ они во всѣхъ вещахъ отличались изобрѣтательностью и утонченностью), изобрѣли для своего употребленія *таблицу*, которую они въ честь своего учителя назвали *таблицею Пиѳагора;* потому что первую мысль о написанномъ ими они получили отъ этого философа»....

[1] Впослѣдствіи, подозрѣваемый въ измѣнѣ, онъ былъ заключенъ по повелѣнію Теодориха въ тюрьму и казненъ.

Обыкновенно полагали, что эта таблица есть таблица умноженія, которая въ большинствѣ списковъ и была помѣщена вскорѣ за приведенными сейчасъ словами. Но въ шартрскомъ спискѣ (XI-го вѣка), которымъ пользовался Шаль, таблицы умноженія нѣтъ. На основаніи же слѣдующихъ мѣстъ текста, Шаль выражаетъ мнѣніе, подтверждая его обстоятельно и категорически, что таблица, о которой говоритъ Боэцій, была не что иное, какъ рядъ столбцовъ или полосокъ (paginula), образуемыхъ при раздѣленіи плоскости вертикальными чертами, и назначавшихся для помѣщенія въ нихъ цифръ (apices), означающихъ послѣдовательные десятичные разряды числа.

Если это справедливо, то оказывается, что основной принципъ нашего письменнаго счисленія былъ извѣстенъ еще древнимъ и примѣнялся на практикѣ во времена Боэція. Переходъ же отъ таблицы Пиѳагора, какъ ее понимаетъ Шаль, къ нынѣшнему способу изображенія чиселъ нужно уже считать естественнымъ и необходимымъ упрощеніемъ. Главнымъ шагомъ при этомъ переходѣ было, конечно, введеніе въ число цифръ нуля, употребленіе котораго встрѣчается, какъ извѣстно, лишь въ сравнительно позднѣйшее время.

Мнѣніе свое по этому предмету Шаль неоднократно провѣрялъ впослѣдствіи по другимъ историческимъ документамъ и находилъ ему весьма вѣскія подтвержденія.

Всѣ эти историческія истолкованія Шаля и еще его возстановленіе сочиненія Эвклида о Поризмахъ (о которомъ будемъ говорить ниже) изобличаютъ въ немъ такой тонкій умъ и такое глубокое знакомство съ общимъ складомъ и направленіемъ геометрическихъ идей въ человѣчествѣ, что ему болѣе чѣмъ кому-либо было доступно ясное пониманіе геометрическихъ произведеній, не смотря на различіе эпохъ и національностей, которымъ принадлежатъ ихъ авторы.

Въ первой части «Историческаго очерка» особенное вниманіе читателя привлекаетъ, между прочимъ, обзоръ пятой и послѣдней эпохи, гдѣ получаютъ справедливую оцѣнку и надлежащее освѣщеніе труды и изобрѣтенія ближайшихъ предшественниковъ Шаля и гдѣ разъясняются общіе принципы, связывающіе новѣйшіе научные успѣхи и какъ-бы господствующіе надъ ними.

Во второй части кромѣ названнаго уже большаго историческаго примѣчанія (12-го) находятся еще 33 примѣчанія самаго разнообразнаго содержанія и болѣе или менѣе значительнаго объема. Всѣ они въ совокупности представляютъ богатый научный матеріалъ и въ нихъ можно найти начала большинства капитальныхъ изслѣдованій Шаля, получившія широкое и систематическое развитіе въ теченіе послѣдующихъ сорока лѣтъ его ученой дѣятельности. При необыкновенной простотѣ изложенія эти примѣчанія возбуждаютъ высокій научный интересъ въ читающемъ, наводя его на множество важныхъ и полезныхъ вопросовъ. Въ этомъ смыслѣ они могутъ быть рекомендованы по преимуществу какъ въ высшей степени полезное чтеніе для начинающихъ геометровъ, ищущихъ предмета для испытанія своихъ силъ.

Мы не безъ основанія позволили себѣ нѣкоторыя подробности, говоря объ «Историческомъ очеркѣ». Во-первыхъ, это есть безспорно наилучшій памятникъ, какой оставилъ по себѣ Шаль въ наукѣ, памятникъ, удивленіе передъ которымъ не уменьшилось въ теченіе почти пятидесяти лѣтъ быстраго научнаго прогресса. Во-вторыхъ, появленіе въ свѣтъ этой книги составило несомнѣнно эпоху въ научной жизни Шаля. Съ этого времени репутація его, какъ замѣчательнаго ученаго, могла считаться прочно установившеюся.

Даже тѣ первоклассные представители математики, благоволеніемъ которыхъ не пользовались геометрическіе методы, не могли не признать въ немъ талантливаго ученаго и полезнаго научнаго дѣятеля.

Одно возраженіе встрѣчалось съ ихъ стороны. Зачѣмъ растрата такого таланта на столь элементарныя и простыя вещи. Духъ времени, когда изобрѣтеніе незначительной теоремы интегральнаго исчисленія или разрѣшеніе простѣйшаго вопроса изъ области математической физики привлекало къ себѣ болѣе вниманія чѣмъ разъясненіе основныхъ законовъ въ ученіи о пространствѣ, не былъ благопріятенъ направленію идей Шаля.

Не опечаливаясь этимъ и не отчаяваясь въ успѣхѣ, Шаль продолжалъ свое дѣло на излюбленной имъ почвѣ и скромно шелъ тою дорогой, которую указывалъ ему его собственный геній.

Но всѣ пути къ математическимъ истинамъ рано или поздно сходятся, такъ-какъ всѣ эти истины покоятся на одномъ общемъ основаніи. Случилось поэтому, говоритъ Жозефъ Бертранъ, что, когда одинъ изъ первыхъ математиковъ вѣка, желая достигнуть одного изъ возвышенныхъ пунктовъ науки, недосягаемыхъ, повидимому, при помощи простыхъ средствъ, спустился къ нему изъ неизмѣримыхъ высотъ анализа, то встрѣтился съ Шалемъ, пришедшимъ туда ранѣе своимъ скромнымъ путемъ. Бертранъ разумѣетъ здѣсь вопросъ о притяженіи эллипсоидовъ.

Трудность этого вопроса, измѣренная усиліями Лапласа, Лагранжа, Пуассона и Гаусса, казалось, превышала тѣ средства, какими могла располагать геометрія. Въ нѣсколькихъ мемуарахъ, публикованныхъ въ 30-хъ годахъ, Шаль показалъ, однако, что тѣ-же самые результаты въ этомъ вопросѣ, къ какимъ приводитъ анализъ посредствомъ сложныхъ и продолжительныхъ вычисленій, могутъ быть получены синтетическимъ путемъ при помощи изящныхъ и простыхъ геометрическихъ соображеній.

Но, возражали на это, если доказывать извѣстныя теоремы и можно различными способами, то тѣмъ не менѣе открывать ихъ есть преимущество анализа. Геометрія же не можетъ быть въ такой же степени руководительницею изобрѣтательнаго таланта.

Какъ-бы въ отвѣтъ на это, Шаль въ началѣ 1839 года сообщилъ академіи наукъ результаты своего новаго труда, въ которомъ, исходя изъ ученія о сложеніи силъ, вноситъ въ область изслѣдованій о притяженіи тѣлъ новыя предложенія столь же общія какъ и изящныя. Всѣ возраженія падали, такъ сказать, сами собою.

Главный результатъ этого замѣчательнаго сообщенія есть распространеніе предложеній, относящихся къ притяженію эллипсоидовъ на случай, когда притягивающее матеріальное тѣло имѣетъ какую-нибудь форму.

Около всякаго матеріальнаго тѣла можно вообразить безчисленное множество окружающихъ его замкнутыхъ поверхностей, характеризующихся тѣмъ свойствомъ, что нормаль въ каждой точкѣ любой изъ этихъ поверхностей совпадаетъ съ направленіемъ равнодѣйствующей притяженій этой точки всѣми матеріальными частицами тѣла. Это суть такъ-называемыя *поверхности уровня*. Если вообразимъ, что одна изъ этихъ поверхностей уровня покрыта безконечно тонкимъ однороднымъ матеріальнымъ слоемъ, толщина котораго въ различныхъ точкахъ обратно пропорціональна разстояніямъ этихъ точекъ отъ слѣдующей безконечно близкой поверхности уровня, то слой этотъ долженъ обладать такими двумя свойствами: 1) Онъ вовсе не притягиваетъ точку внутреннюю относительно поверхности уровня, на которой онъ помѣщается. 2) Притяженіе этимъ слоемъ внѣшней точки направлено такъ-же какъ и притяженіе ея самимъ тѣломъ и относится къ нему по величинѣ какъ масса слоя къ массѣ тѣла.

Не смотря на свою кажущуюся искусственность это предложеніе важно не только собственно въ ученіи о притяженіи, но также и по приложенію къ теоріи теплоты и электричества. Шаль, какъ было сказано, сообщилъ его академіи въ 1839 г.; доказательство же его онъ публиковалъ только въ 1842 году въ приложеніи къ «Connaissance des temps pour 1845». Правда, что въ томъ же 1842 году Штурмъ доказалъ это предложеніе аналитически и что по отношенію къ теоріи электричества результаты, данные Шалемъ, представляютъ частный выводъ изъ изслѣдованій англійскаго ученаго Джоржа Грина; но все это нисколько не уменьшаетъ ученыхъ заслугъ Шаля въ теоріи притяженія, въ рукахъ котораго геометрическій методъ являлся орудіемъ, обладающимъ такою силою, какой никто не предвидѣлъ.

Въ слѣдующемъ извлеченіи изъ доклада Пуансо академіи объ одномъ изъ названныхъ выше мемуаровъ Шаля всего лучше характеризуется значеніе этого метода.

«Мемуаръ этотъ, говоритъ Пуансо, представляетъ новый примѣръ той изящности и ясности, какія вносятся геометріей въ вопросы наиболѣе трудные и темные. Прекрасный геометрическій методъ древнихъ, называемый не совсѣмъ точно *синтезомъ*, уже неоднократно опережалъ алгебраическій методъ, именуемый нынѣ *анализомъ*. Доказательство этому представляютъ въ особенности безсмертныя творенія Ньютона, а также удивительный трудъ Маклорена по вопросу, о которомъ теперь идетъ рѣчь, трудъ, представляющій образцовое геометрическое изслѣдованіе, сравниваемое Лагранжемъ со всѣмъ тѣмъ, что оставилъ намъ Архимедъ наиболѣе прекраснаго и геніальнаго. Хотя въ этомъ знаменитомъ вопросѣ анализъ, искусно примѣняемый Лагранжемъ, Лапласомъ, Лежандромъ и наилучшими аналистами нашего времени, представляетъ теперь преимущества и, какъ говорятъ, не оставляетъ желать ничего болѣе, тѣмъ не менѣе этотъ примѣръ нельзя еще возводить въ доказательство высшаго значенія анализа сравнительно съ методомъ древнихъ. И дѣйствительно, авторъ настоящаго мемуара показываетъ намъ, что методъ, состоящій изъ ряда разсужденій, руководимыхъ синтезомъ, равнымъ образомъ приводитъ къ полному рѣшенію вопроса и даже болѣе легкимъ способомъ. Вопросъ не превышаетъ, слѣдовательно, силъ синтеза, какъ это могли думать до сего времени»......

«Какъ бы то ни было, продолжаетъ Пуансо, не подлежитъ сомнѣнію, что не слѣдуетъ пренебрегать ни тѣмъ, ни другимъ методомъ. Въ сущности они почти всегда соединяются въ нашихъ произведеніяхъ и совокупность ихъ представляетъ наиболѣе совершенное орудіе человѣческаго разума. Нашъ умъ дѣйствуетъ лишь при помощи знаковъ и образовъ, и когда онъ старается проникнуть въ вопросы новые и трудные, то не можетъ быть излишнимъ ни одно изъ этихъ средствъ; напротивъ, онъ часто получаетъ особенную силу отъ ихъ взаимной помощи. Это всякій можетъ на себѣ испытывать и это обнаруживается ясно въ настоящемъ мемуарѣ».

Въ 1839 году талантъ и энергія Шаля, выразившіеся столь блистательно въ пунктахъ соприкосновенія геометріи и анализа, были наконецъ поощрены избраніемъ его въ члены-корреспонденты парижской академіи наукъ. Ему было тогда 46-ть лѣтъ отъ роду.

Въ теченіе послѣдующаго десятилѣтія научная дѣятельность Шаля была раздѣлена между двумя поприщами—академическимъ и педагогическимъ, такъ какъ въ 1841 году онъ былъ назначенъ профессоромъ политехнической школы и преподавалъ въ ней геодезію и теорію машинъ до 1850 года.

Его ученые труды за это время были публикованы частію въ «Comptes Rendus de l'Académie», частію же въ «Journal des Mathématiques pures et appliquées», изданіе котораго начато Ліувилемъ въ 1836 году. Наиболѣе замѣчательные изъ нихъ суть тѣ, которые относятся къ геодезическимъ линіямъ и линіямъ кривизны на поверхностяхъ втораго порядка, а также къ ученію о перемѣщеніи свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ.

Дѣлать хотя бы краткія указанія на содержаніе ученыхъ сочиненій Шаля значило бы входить въ спеціальныя научныя подробности не для всѣхъ интересныя; да сверхъ того намъ пришлось бы для этого слишкомъ широко раздвинуть рамки настоящаго очерка. Научная дѣятельность Шаля была весьма плодовита, мемуары и ученыя сообщенія его приходится считать сотнями. Не теряя поэтому изъ виду, что главная цѣль наша дать указанія на то значеніе, которое принадлежитъ Шалю въ наукѣ по отношенію къ ея прогрессу, мы отмѣтимъ нѣсколькими чертами главнымъ образомъ тѣ его произведенія, которыя уже съиграли въ этомъ отношеніи болѣе или менѣе выдающуюся роль.

Такого рода сочиненія можно раздѣлить по ихъ значенію на двѣ категоріи. Во первыхъ тѣ, которые представляютъ уже готовые систематическіе научные своды, какъ бы цѣльные научные монументы, имѣющіе значеніе общаго фундамента для дальнѣйшаго развитія науки. Таковы книги: «Traité de Géométrie supérieure» и «Traité des sections coniques». Сочиненія второй категоріи представляютъ, напротивъ, точки отправленія и начала особыхъ путей въ наукѣ, которые знаменитый ученый открылъ и указалъ своимъ послѣдователямъ и эксплуатація которыхъ требуетъ уже сравнительно менѣе проницательности, чѣмъ открытіе.

Шаль, какъ опытный мастеръ своего дѣла, какъ оригинальный учитель, около котораго группируется цѣлая школа послѣдователей, намѣтилъ нѣсколько такихъ точекъ отправленія. Сюда относится, во первыхъ, только что названное ученіе о перемѣщеніи твердаго тѣла, положившее начало цѣлой отрасли геометріи, такъ называемой *геометріи кинематической* (Géométrie cinématique), имѣющей важное значеніе не только по своему собственному содержанію, но и по приложеніямъ какъ методъ. Сюда же принадлежитъ и знаменитая *теорія характеристикъ*, о которой подробнѣе будемъ говорить ниже и которая тоже составляетъ важнѣйшую часть особой вѣтви геометрическаго ученія, названной *числовою геометріей* (Abzählende Geometrie).

Вопросами кинематическими Шаль занимался въ теченіе почти всей своей ученой карьеры, и Дарбу въ своемъ о немъ воспоминаніи справедливо или нѣтъ ставитъ это въ связь съ его преподаванiемъ теорiи машинъ. Первое публикованное по этому предмету его изслѣдованiе помѣщено въ бюллетенѣ барона Ферюсака въ 1830 году, но главное значенiе для науки принадлежитъ конечно мемуару, появившемуся въ «Comptes Rendus» въ 1843 году подъ заглавiемъ: «Геометрическiя свойства безконечно малаго движенiя свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ». Позднѣе въ 1860 и 1861 годахъ Шаль напечаталъ также въ «Comptes Rendus» большое изслѣдованiе, относящееся къ той же области и присовокупилъ къ нему историческую замѣтку по вопросу о перемѣщенiи неизмѣняемой фигуры. Наконецъ уже въ концѣ своей жизни (1875 — 1876) онъ сдѣлалъ нѣсколько приложенiй къ этому вопросу своего принципа соотвѣтствiя (principe de correspondance).

Подъ кинематической геометрiей подразумѣвается обыкновенно тотъ отдѣлъ геометрическаго ученiя, въ которомъ геометрическiя фигуры или тѣла разсматриваются въ состоянiи движенiя, причемъ послѣднее разсматривается независимо не только отъ производящихъ его причинъ, но и отъ времени. Этимъ устраненiемъ времени кинематическая геометрiя существенно отдѣляется отъ кинематики и составляетъ какъ бы первую переходную ступень отъ геометрiи вообще къ механикѣ.

Хотя честь установленiя основанiй этого ученiя должна быть раздѣлена между Шалемъ, Пуансо и Мöбiусомъ, но тѣмъ не менѣе указанные мемуары Шаля носятъ неоспоримый характеръ оригинальности и имѣли существенное и преобладающее значенiе на дальнѣйшую судьбу ученiя.

Изъ послѣдователей Шаля въ этомъ направленiи особенно почтенное мѣсто принадлежитъ г. Мангейму, нынѣ профессору въ политехнической школѣ, давшему въ своихъ изслѣдованiяхъ значительное развитiе первоначальныхъ идей Шаля и представившему академiи наукъ въ 1868 году большой мемуаръ о перемѣщенiи фигуръ, одобренный академiей и напечатанный въ Recueil des savants étrangers. Передъ самой смертью Шаля Мангеймъ издалъ въ 1880 году обширный курсъ начертательной геометріи, въ которомъ методу кинематической геометріи дано широкое примѣненіе.

На первомъ планѣ въ кинематической геометріи стоитъ теорія сопряженныхъ осей вращенія.

Извѣстно, и это доказалъ между прочимъ Шаль, что всякое безконечно малое измѣненіе положенія твердаго тѣла можетъ быть произведено безконечнымъ множествомъ способовъ посредствомъ двухъ послѣдовательныхъ вращеній тѣла около двухъ осей. Одна изъ этихъ осей можетъ быть взята произвольно въ пространствѣ; другая чрезъ то вполнѣ опредѣляется. Эти то оси вращенія и называются сопряженными. Зависимость между ними приводитъ ко множеству интересныхъ и важныхъ свойствъ фигуръ какъ по отношенію къ самому перемѣщенію, такъ и въ чисто геометрическомъ смыслѣ.

Всѣ оси сопряженныя съ осями, лежащими въ одной и той же данной плоскости, проходятъ чрезъ одну и ту же точку этой плоскости. Точку эту Шаль назвалъ *фокусомъ* данной плоскости.

По отношенію къ перемѣщенію фокусъ является такою точкою данной плоскости, траекторія которой нормальна къ послѣдней.

Точки данной плоскости, траекторіи которыхъ соприкасаются съ нею, лежатъ на одной прямой, которую Шаль называетъ *характеристикой* этой плоскости.

Фокусы плоскостей, проходящихъ чрезъ одну и ту же прямую D, лежатъ на одной и той же прямой Δ; и обратно, плоскости, которыхъ фокусы расположены на прямой, пересѣкаются между собою по одной и той же прямой. Прямыя D и Δ суть двѣ сопряженныя оси вращенія.

Вообще зависимость между сопряженными осями вращенія есть особый видъ взаимнаго или коррелятивнаго соотвѣтствія между элементами пространства (*Nullsystem* Möbius'а).

Особенный интересъ представляютъ сопряженныя оси вращенія, совпадающія между собою. Такова всякая прямая, пересѣкающая одновременно двѣ какія-нибудь другія сопряженныя оси вращенія. Каждая такая прямая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что траекторіи всѣхъ ея точекъ нормальны къ ней.

Всѣ точки, которыхъ траекторіи направлены къ одной и той же точкѣ пространства, расположены на кривой двоякой кривизны третьяго порядка, проходящей чрезъ эту точку.

Всякія двѣ пары сопряженныхъ осей вращенія представляютъ четыре прямолинейныя образующія одного и того же однополаго гиперболоида, и т. д., и т. д.

Изъ приведенныхъ свойствъ уже видно, какое интересное и обильное для изслѣдованій поле представляетъ область кинематической геометріи. Не менѣе интересны и важны приложенія ея къ вопросамъ чистой геометріи или механики.

Не лишнее замѣтить, что съ чисто геометрической точки зрѣнія теорія сопряженныхъ осей вращенія оказывается тождественною съ ученіемъ о линейныхъ комплексахъ Plücker'a, такъ какъ самый общій видъ линейнаго комплекса лучей всегда можетъ быть разсматриваемъ какъ совокупность такихъ осей вращенія по отношенію къ приличнымъ образомъ выбранному безконечно-малому перемѣщенію твердаго тѣла, которыя совпадаютъ съ своими сопряженными.

Мы сказали выше, что въ теченіи десяти лѣтъ (1841—1850) Шаль былъ профессоромъ въ политехнической школѣ. Съ этимъ великимъ учрежденіемъ Франціи онъ былъ связанъ самыми интимными нравственными узами, самою нѣжною сыновнею, такъ сказать, преданностью. Въ политехнической школѣ онъ получилъ основанія своего научнаго образованія и задатки своей ученой карьеры; въ ней появились его первыя научныя произведенія; въ ея же изданіи были напечатаны, составившіе ему такую извѣстность, первые мемуары о притяженіи эллипсоидовъ. Не безъ удовольствія, конечно, онъ принялъ предложеніе занять каѳедру въ дорогомъ для него заведеніи и вступилъ руководителемъ подъ старое, хорошо знакомое ему знамя, на которомъ стоитъ девизъ: «Для отечества, науки и славы» (Pour la Patrie, les Sciences et la Gloire).

Курсъ преподаванія Шаля отличался оригинальностью и строго научнымъ характеромъ. Достаточно перелистать литографированныя записки этого курса, говоритъ Дарбу, чтобы убѣдиться, что въ немъ Шаль оставался прежде всего геометромъ.

Въ то время какъ Шаль продолжалъ трудиться надъ своимъ курсомъ, слѣдуя въ развитіи ученія о машинахъ за быстрымъ рядомъ механическихъ изобрѣтеній и усовершенствованій, политехническую школу постигъ внезапный и, по его собственнымъ словамъ, весьма прискорбный переворотъ. Программы курсовъ по настоянію администраціи были значительно сокращены и преподаваніе втиснуто въ сравнительно узкія рамки, въ которыя не давалось доступа ничему, что могло бы относиться къ прогрессу науки или оригинальности преподавателя. И все это произошло вопреки постановленію совѣта самой школы и заявленіямъ тѣхъ спеціальныхъ заведеній[1], слушатели для которыхъ въ ней приготовлялись.

Находя вреднымъ такое преобразованіе и способнымъ лишь принизить то высокое значеніе и извѣстность, какими пользовалась школа съ самаго своего основанія, но не видя въ то же время надежды на близкую перемѣну въ положеніи вещей, Шаль счелъ за лучшее отказаться отъ преподаванія.

Въ этомъ не слѣдуетъ однако видѣть равнодушія къ судьбѣ школы; Шаль былъ далекъ отъ этого. Всегда и во всемъ искалъ онъ случая, чтобы придти на помощь дорогой ему школѣ и ея ученой и учащейся семьѣ. Въ этихъ видахъ онъ съ полною го-

[1] Ecole des Ponts et Chaussées, Ecole des Mines, Ecole d'application de l'Artillerie et du Génie.

товностью принялъ на себя предсѣдательство въ дружескомъ обществѣ бывшихъ учениковъ политехнической школы; въ этихъ же видахъ онъ уже въ старости принялъ участіе въ работахъ по преобразованію и усовершенствованію школы.

Не задолго до своей смерти Шаль задумалъ написать исторію политехнической школы. Этому намѣренію не пришлось осуществиться. Напечатана была только небольшая замѣтка, въ которой документально изображается судьба преподаванія теоріи машинъ въ школѣ. Въ замѣткѣ этой всего лучше выразилось то чувство, съ которымъ относился Шаль къ горячо любимому учрежденію. На-ряду со скорбію, съ которой описываются измѣненія преподаванія, происшедшія въ 1850 году, передъ нами выступаетъ чувство гордости и удовлетворенія при воспоминаніи о томъ, какъ въ 1829 году Якоби, повѣствуя о политехнической школѣ въ торжественномъ засѣданіи въ Берлинѣ, называетъ ее первою школой въ мірѣ, предметомъ зависти всей Европы и учрежденіемъ, не имѣющимъ себѣ подобнаго.

Въ 1846 году по распоряженію министра Сальванди, побуждаемаго совѣтами Пуансо, были учреждены въ парижскомъ факультетѣ наукъ двѣ новыя каѳедры: каѳедра небесной механики, предоставленная Леверье, и каѳедра высшей геометріи, предназначавшаяся для Шаля.

Вступая на эту каѳедру 22-го декабря того-же года, Шаль произнесъ въ публичномъ засѣданіи факультета (séance d'ouverture) вступительную рѣчь, посвященную обзору тѣхъ источниковъ, изъ которыхъ онъ считалъ необходимымъ почерпать матеріалъ для своего будущаго преподаванія. Обзоръ этотъ является сжатымъ, но въ то же время въ высшей степени изящнымъ очеркомъ развитія различныхъ геометрическихъ ученій, начиная съ древнихъ греческихъ школъ и кончая трудами геометровъ послѣднихъ двухъ столѣтій, вызвавшихъ, какъ извѣстно, къ новой жизни геометрію древности. Нѣкоторыя мѣста этой рѣчи представляютъ высокіе образцы научно-историческихъ сближеній и разъясненій, образцы, въ которыхъ ученость Шаля и полное развитіе его таланта, какъ мыслителя, выказываются во всей своей силѣ.

Для примѣра приведемъ то разъясненіе, которое даетъ Шаль взаимному отношенію двухъ главныхъ направленій въ геометріи. Это разъясненіе проливаетъ много свѣта на геометрію какъ единое, стройное научное зданіе. Послѣдняя, по замѣчанію Шаля, должна быть опредѣляема какъ наука, имѣющая предметомъ *измѣреніе* и *свойства* представляемаго нами пространства.

Самымъ этимъ опредѣленіемъ намѣчаются уже два направленія въ наукѣ, направленія, выразившіяся еще въ трудахъ древнихъ геометровъ. Въ то время какъ одни изъ нихъ, представителемъ которыхъ является Архимедъ, преслѣдуютъ главнымъ образомъ *задачи объ измѣреніи*, другіе, какъ Эвклидъ и Аполлоній, создаютъ *ученіе объ общихъ свойствахъ фигуръ*, свойствахъ, которыя хотя и выражаются иногда подъ видомъ метрическихъ соотношеній (напр. подобіе) между частями фигуръ, но прямаго отношенія къ задачамъ объ измѣреніи не имѣютъ.

Въ настоящее время незамѣнимымъ и могущественнымъ орудіемъ для рѣшенія этихъ задачъ является анализъ безконечно малыхъ, и Шаль весьма остроумно усматриваетъ въ этомъ характеристическое различіе между двумя частями науки, на которыя она распадается въ силу названныхъ направленій. Въ то время, какъ анализъ безконечно малыхъ, примѣняемый къ вопросамъ, составляющимъ первую часть, дѣлаетъ возвращеніе къ пріемамъ Архимеда ненужнымъ и безполезнымъ, свойства фигуръ, составляющія вторую часть, въ настоящее время имѣютъ въ большинствѣ случаевъ то же значеніе какъ и въ древности. Основныя предложенія знаменитыхъ произведеній Паскаля, Дезарга и Карно были таковыми же и въ геометрическомъ анализѣ древнихъ.

Не нужно думать, однако, что оба эти отдѣла геометріи составляютъ двѣ части науки, въ равной мѣрѣ независящія одна отъ другой. Если, съ одной стороны, *геометрія измѣренія* и обособляется тѣмъ, что преслѣдуетъ особыя цѣли, и есть, такъ сказать, геометрія извѣстнаго рода задачъ, то съ другой—*геометрія, изучающая свойства фигуръ*, разрабатываетъ фундаментъ всего геометрическаго ученія, къ разрѣшенію какихъ бы задачъ это ученіе затѣмъ ни направлялось. Вслѣдствіе этого она имѣетъ прямое и естественное примѣненіе и къ геометріи измѣренія, такъ что успѣхъ въ разрѣшеніи задачъ послѣдней находится въ тѣсной зависимости отъ развитія первой.

Чтобы пояснить это, Шаль замѣчаетъ, что при опредѣленіи геометрическихъ величинъ того или другаго вида (площадей, объемовъ, длины линій и т. п.) основнымъ и почти неизбѣжнымъ пріемомъ служитъ раздробленіе этихъ величинъ на *элементы*, которые разсматриваются какъ безконечно малые и затѣмъ суммируются или сравниваются. При этомъ понятно, что быстрота и легкость въ рѣшеніи такихъ задачъ должна зависѣть отъ формы и свойствъ элементовъ, которые въ свою очередь обусловливаются способомъ раздѣленія величины на элементы. Но выборъ того или другаго способа разложенія долженъ основываться на геометрическихъ свойствахъ разсматриваемой и измѣряемой фигуры. Слѣдовательно, эти свойства должны быть изучаемы предварительно, и отъ достаточнаго ихъ знанія зависитъ въ большинствѣ случаевъ весь успѣхъ рѣшенія.

Начавъ, какъ было сказано, свое преподаваніе въ Сорбоннѣ въ 1846 году, Шаль продолжалъ его около тридцати лѣтъ. Общія основанія преподававшейся имъ науки были имъ изложены въ особомъ трактатѣ, публикованномъ въ 1852 году подъ заглавіемъ: «Traité de Géométrie supérieure». Это обширное сочиненіе имѣетъ своей цѣлью установить начала науки, которая, пользуясь частію извѣстными еще древнимъ, частію же новыми чисто геометрическими методами, служила бы къ расширенію нашихъ свѣдѣній о свойствахъ пространства безъ помощи метода координатъ. Въ этомъ смыслѣ высшая геометрія Шаля носитъ также названіе чистой или синтетической геометріи въ противоположность съ аналитическою геометріей Декарта, въ которой понятіе о координатахъ составляетъ, такъ сказать, краеугольный камень.

Трактатъ по высшей геометріи Шаля состоитъ изъ четырехъ отдѣловъ. Первый отдѣлъ посвященъ установленію и подробному развитію трехъ основныхъ понятій: 1) о сложномъ или ангармоническомъ отношеніи, 2) о проективномъ или гомографическомъ соотвѣтствіи рядовъ и пучковъ и 3) объ инволюціи.

Понятіе о сложномъ отношеніи или по крайней мѣрѣ основное его свойство сохранять свою величину въ перспективѣ было извѣстно еще въ древности. Понятіе объ инволюціи введено въ XVII столѣтіи Дезаргомъ. Что же касается понятія о соотвѣтствіи, то по нашему мнѣнію оно составляетъ главную и существеннѣйшую особенность всѣхъ новѣйшихъ геометрическихъ ученій и въ частномъ случаѣ высшей геометріи Шаля.

Можно сказать, что введеніе этого понятія имѣетъ значеніе для науки сходное съ значеніемъ въ чистой математикѣ перемѣнныхъ величинъ и аналитическихъ между ними зависимостей. Соотвѣтствіе проективное есть простѣйшее изъ тѣхъ соотвѣтствій, которыя устанавливаются геометрически, т. е. построеніемъ; къ нему приводитъ насъ самымъ прямымъ и естественнымъ образомъ построеніе перспективы или центральной проекціи.

Совокупность методовъ и предложеній, основывающихся на проективномъ соотвѣтствіи или, что все то же, на построеніи центральныхъ проекцій, получило въ послѣднее время названіе *проективной геометріи*, названіе, которымъ характеризуется приблизительно то же ученіе, которое Шаль назвалъ высшею геометріей. Собственно творцемъ или основателемъ проективной геометріи слѣдуетъ считать Понселе, хотя примѣненіе центральной проекціи къ выводу свойствъ фигуръ, названныхъ Понселе проективными, беретъ свое начало еще отъ Дезарга.

Шалю принадлежитъ безспорно заслуга выдѣленія проективнаго соотвѣтствія, какъ предмета особаго элементарнаго изученія, и всесторонняго разъясненія той важной роли, какую играетъ въ немъ сложное или ангармоническое отношеніе. Послѣднее есть, собственно говоря, элементарная составная часть всѣхъ возможныхъ метрическихъ или количественныхъ проективныхъ свойствъ фигуръ, т. е. тѣхъ количественныхъ соотношеній между частями фигуры, которыя остаются неизмѣнными въ перспективѣ. На эти свойства Шаль обращаетъ, вообще говоря, больше вниманія чѣмъ Понселе и нѣкоторые нѣмецкіе геометры, какъ Штейнеръ и Штаудтъ, и подвергаетъ ихъ болѣе многостороннему разсмотрѣнію и оцѣнкѣ. Поэтому и понятно, что въ его геометріи сложное отношеніе является имѣющимъ такое преобладающее значеніе.

Въ послѣднее время нѣкоторыми нѣмецкими учеными возбужденъ былъ вопросъ: кому принадлежитъ первенство относительно введенія въ новую геометрію понятія о сложномъ или ангармоническомъ отношеніи, какъ общаго принципа доказательствъ и изслѣдованій?[1]. Если въ этомъ вопросѣ имѣть въ виду исключительно время публикованія сочиненія, въ которомъ для сложнаго отношенія указывается такая роль, то безспорно это первенство принадлежитъ Мöбіусу (Barycentrische Calcul, 1827). Но винить Шаля въ незнаніи и неупоминаніи заслугъ Мöбіуса было бы во всякомъ случаѣ несправедливостью.

Дѣло въ томъ, что въ самой Германіи сочиненіе Мöбіуса, въ которомъ мы находимъ теперь такое обиліе общихъ и совершенно новыхъ для того времени идей, оставалось долго почти незамѣченнымъ и неоцѣненнымъ, и лишь послѣ того, какъ тѣ же идеи получили свое обширное примѣненіе въ изслѣдованіяхъ Штей-

---

[1] См. *F. Klein*'а рецензію на сочиненіе Шаля «Rapport sur les progrès de Géométrie» въ Göttingische gelehrte Anzeigen, 1872, p. 1—12, и *H. Hankel*'я «Die Elemente der projectivischen Geometrie». Leipzig, 1875, p. 28—29.

нера и Плюкера, въ особенности же когда у Шаля эти идеи выступили съ такою ясностью и преобладающимъ значеніемъ какъ основанія стройной и цѣльной науки, стали воздавать должное и заслугамъ Мобіуса.

Какъ бы то ни было, нельзя сомнѣваться, что то глубокое убѣжденіе въ пользѣ понятія о ангармоническомъ отношеніи для успѣховъ новой геометріи, которое Шаль постоянно выражалъ и подтверждалъ во многихъ своихъ сочиненіяхъ, начиная съ «Историческаго очерка», есть результатъ его собственнаго всесторонняго изученія геометріи древнихъ и трудовъ французскихъ геометровъ XVII вѣка (Дезаргъ и Паскаль) и никакой связи съ развитіемъ идей нѣмецкихъ ученыхъ не имѣло.

Второй отдѣлъ книги «Traité de Géometrie supérieure» содержитъ ближайшія примѣненія трехъ основныхъ ученій, изложенныхъ въ первомъ. Этотъ отдѣлъ безъ сомнѣнія есть наиболѣе интересный и въ немъ болѣе всего выразилась та характерная особенность, которою отличается большинство сочиненій Шаля отъ сочиненій другихъ геометровъ, содѣйствовавшихъ развитію новой геометріи. Эта особенность состоитъ въ томъ, что Шаль никогда не игнорируетъ историческихъ традицій науки и никогда не порываетъ той нити, которою его новое геометрическое ученіе связывается съ геометріею древнихъ.

Этой особенности нѣтъ ни у Монжа, ни у Понселе, ни у Штейнера, не говоря уже о такихъ геометрахъ, какъ Штаудтъ, книга котораго представляетъ глазамъ читателя сразу новую схему геометрическихъ воззрѣній. Между тѣмъ эта особенность имѣетъ весьма дорогую цѣну для читателя, изучающаго вновь науку. Она не только дѣлаетъ изученіе книги болѣе оживленнымъ и привлекательнымъ, но и позволяетъ оцѣнивать по достоинству какъ новые успѣхи науки, такъ и основной фондъ ея, завѣщанный намъ минувшими вѣками.

Мнѣніе, что историческія традиціи могутъ послужить стѣсненіемъ при изложеніи новыхъ обобщенныхъ взглядовъ, опровергается всего лучше высшею геометріей Шаля.

Въ разсматриваемомъ отдѣлѣ мы встрѣчаемся прежде всего съ классическою задачей объ *опредѣленномъ сѣченіи* (sectio determinata). Мы видимъ, съ какою легкостью, быстротою и общностью эта задача рѣшается пріемами новой геометріи. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы узнаемъ, что она была въ древности предметомъ особаго обширнаго сочиненія Аполлонія, такъ какъ, съ одной стороны, недостаточность общности въ методахъ древнихъ дѣлала рѣшеніе этой задачи чрезвычайно труднымъ, съ другой же—строгость и точность этихъ методовъ, а также, можетъ быть, существованіе особыхъ путей изслѣдованія, которые до насъ не сохранились, позволяли распознавать съ необыкновенною ясностью и осязательностью всѣ возможные частные случаи задачи и находить для каждаго особое строгое рѣшеніе.

Далѣе, передъ нами излагается общій геометрическій пріемъ для рѣшенія, такъ называемыхъ, задачъ втораго порядка, т. е. такихъ, рѣшеніе которыхъ сводилось бы въ аналитической геометріи къ уравненію 2-й степени. Вмѣстѣ съ тѣмъ указывается на аналогію этого общаго пріема съ ариѳметическимъ правиломъ ложнаго положенія, имѣющимъ громадную историческую древность и дошедшимъ до насъ отъ индусовъ чрезъ посредство арабовъ, и т. д., и т. д.

Главное содержаніе третьяго отдѣла книги составляетъ ученіе о коллинеарномъ и коррелятивномъ соотвѣтствіяхъ между плоскостями или, выражаясь терминами самого Шаля, о гомографическихъ и коррелятивныхъ фигурахъ. Сравнительно съ другими отдѣлами этотъ послѣдній оказывается весьма сжатымъ и многія стороны названнаго предмета въ немъ лишь едва затронуты. Это объясняется, быть можетъ, тѣмъ, что тотъ же предметъ былъ уже разработанъ и чрезвычайно подробно, и притомъ съ болѣе общей точки зрѣнія, изложенъ Шалемъ въ упомянутомъ выше большомъ мемуарѣ, составляющемъ часть книги «Aperçu historique»...

Четвертый отдѣлъ содержитъ примѣненіе основныхъ теорій высшей геометріи къ изслѣдованію свойствъ круга и системъ круговъ. Этотъ отдѣлъ составляетъ какъ бы переходную ступень отъ общей или элементарной части высшей геометріи къ спеціальному изученію коническихъ сѣченій. Послѣднему посвящено особое сочиненіе Шаля, публикованное въ 1865 году, т. е. 13-ть лѣтъ спустя послѣ появленія трактата о высшей геометріи, подъ названіемъ: «Traité des sections coniques».

Содержаніе этой книги есть также сводъ нѣкоторыхъ отдѣловъ многолѣтняго преподаванія съ университетской каѳедры. Представляя эту книгу академіи, Шаль выразился, что одною изъ его цѣлей при ея изданіи было восполнить пробѣлъ, существующій въ современной научной литературѣ по отношенію къ систематическому ученію о коническихъ сѣченіяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, хотя, съ одной стороны, большинство курсовъ аналитической геометріи и содержитъ изслѣдованіе этихъ кривыхъ, но это изслѣдованіе дѣлается въ нихъ не столько въ видахъ самой теоріи коническихъ сѣченій, сколько ради разъясненія общихъ пріемовъ аналитической геометріи. Съ другой же стороны, со времени Аполлонія, опытовъ изложенія геометрической теоріи коническихъ сѣченій и притомъ въ интересахъ лишь ея полноты и многосторонности совершенно не было. Исключеніемъ являются развѣ только сочиненіе Делагира (De la Hire, 1685) и ему подобныя, представляющія лишь подражанія Аполлонію.

Нечего и говорить, что книга Шаля вполнѣ соотвѣтствуетъ такимъ намѣреніямъ ея автора. Основываясь лишь на тѣхъ элементарныхъ геометрическихъ ученіяхъ, которыя подробно изложены въ его «Высшей геометріи», и исходя изъ древняго классическаго опредѣленія коническихъ сѣченій, она не оставляетъ желать ничего болѣе относительно оригинальности изложенія и чистоты геометрическихъ пріемовъ.

Что касается полноты ученія, то и въ этомъ едва ли кто счелъ бы себя неудовлетвореннымъ книгою Шаля, а между тѣмъ она представляетъ лишь первую часть всего намѣченнаго авторомъ плана. Вторая часть, основнымъ фондомъ для которой должны были, по видимому, послужить нѣкоторые его мемуары о системахъ коническихъ сѣченій, не была къ сожалѣнію публикована вовсе.

Какъ бы ни было желательно указать здѣсь хотя въ сжатыхъ словахъ на содержаніе «Трактата о коническихъ сѣченіяхъ», какъ одной изъ наиболѣе замѣчательныхъ книгъ Шаля, мы должны отказаться отъ этого по слѣдующей причинѣ. Главныя достоинства и привлекательность книги заключаются не въ тѣхъ истинахъ, которыя она намъ раскрываетъ, а въ той послѣдовательности и непрерывности, которую она между ними устанавливаетъ. Бертранъ вполнѣ справедливо сравниваетъ эту книгу съ произведеніями нѣкоторыхъ классическихъ поэтовъ, какъ Лукрецій, о которыхъ говорилось, что выдѣлить изъ нихъ для примѣра одинъ стихъ такъ-же невозможно, какъ невозможно для составленія понятія о волнующемся морѣ выдѣлить изъ него одну волну.

Это качество книги дѣлаетъ безполезнымъ приводить изъ нея цитаты или разъяснять ея общій характеръ по отдѣльнымъ главамъ. Въ виду этого для ознакомленія съ книгой можно только рекомендовать прочитать ее отъ начала до конца. При этомъ, замѣчаетъ Бертранъ, читающій съ самаго же начала чувствуетъ необходимость вникать въ мельчайшія подробности и, отдавшись съ первой же главы вполнѣ руководительству автора, не пожалѣетъ объ этомъ, когда дойдетъ до послѣдней.

Въ 1851 году Шаль былъ избранъ въ члены академіи наукъ.

Рядъ мемуаровъ и сообщеній, представленныхъ имъ академіи въ теченіе послѣдующаго десятилѣтія, посвящается главнымъ образомъ ученію о геометрическихъ линіяхъ высшаго порядка. Изслѣдованія эти, какъ представляющія дальнѣйшее развитіе геометріи на началахъ, изложенныхъ въ «Traité de Géométrie Supérieure», были во многихъ своихъ частяхъ продолженіемъ факультетскаго преподаванія Шаля.

Начало этому ряду изслѣдованій было положено небольшимъ, но изящнымъ мемуаромъ о построеніи кривой третьяго порядка по девяти даннымъ ея точкамъ.

Небольшое историческое введеніе, которымъ начинается мемуаръ, очерчиваетъ въ краткихъ словахъ прошедшее этого вопроса. Онъ былъ намѣченъ еще Ньютономъ и охарактеризованъ имъ какъ одинъ изъ труднѣйшихъ. Два знаменитые англійскіе геометра начала прошедшаго столѣтія Маклоренъ и Брейкенриджъ, слѣдуя по пути, указанному Ньютономъ, сдѣлали очень многое для разъясненія свойствъ высшихъ геометрическихъ кривыхъ, преимущественно по отношенію къ способамъ ихъ геометрическаго образованія (органическаго описанія), и имѣли постоянно въ виду задачу Ньютона, но рѣшить ее въ общемъ видѣ имъ не удалось[1].

Изслѣдованія свойствъ кривыхъ третьяго порядка, предпринимавшіяся въ послѣдующія времена различными учеными, между которыми Шаль въ особенности отмѣчаетъ имена Краммера и Эйлера, приготовили мало по малу данныя для рѣшенія этой задачи. На основаніи этихъ то данныхъ Шалю и удалось наконецъ найдти рѣшеніе вполнѣ точное и общее.

Чтобы уяснить, чѣмъ обусловливается успѣхъ Шаля въ задачѣ, не поддававшейся столь долгое время усиліямъ первоклассныхъ геометровъ, замѣтимъ, что исходнымъ пунктомъ для отысканія ея рѣшенія служило какъ для самого Шаля, такъ и для

[1] Терминъ *органическое описаніе* (descriptio organica) былъ въ первый разъ употребленъ Ньютономъ въ его «Enumeratio linearum tertii ordinis» (1704), гдѣ и намѣчена эта задача. Сочиненіе Маклорена, развивающее первоначальную мысль Ньютона, названо имъ *органической геометріей:* «Geometria organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis» (1720).

его предшественниковъ, то или другое геометрическое образованіе или органическое описаніе кривой, которое въ чистой геометріи имѣетъ такое же значеніе, какъ ея уравненіе въ геометріи аналитической. Было предложено нѣсколько такихъ способовъ образованія кривыхъ третьяго порядка, но ни одинъ изъ нихъ неудовлетворялъ условію, чтобы данными, на которыхъ основывается это образованіе, были девять произвольно взятыхъ точекъ кривой. Въ этомъ и заключалось единственное, но весьма важное препятствіе для нахожденія искомаго рѣшенія.

Вмѣсто того, чтобы стремиться къ преодолѣнію этого препятствія, придумывая все новые и новые способы образованія, какъ это дѣлали его предшественники, Шаль съумѣлъ устранить его, идя совершенно инымъ путемъ, а именно слѣдующимъ.

За опредѣленіе кривой третьяго порядка онъ принималъ образованіе ея посредствомъ двухъ проективно-соотвѣтственныхъ пучковъ, изъ которыхъ одинъ есть пучекъ прямыхъ, а другой пучекъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія точки. Затѣмъ данныя девять точекъ онъ раздѣлялъ произвольно на двѣ группы, одну въ четыре и другую въ пять точекъ. Вообразивъ затѣмъ пять коническихъ сѣченій, изъ которыхъ каждое проходитъ чрезъ всѣ четыре точки первой группы и одну изъ точекъ второй, онъ сталъ отыскивать на плоскости такую точку, которая, будучи соединена прямыми линіями съ точками второй группы, давала бы пучекъ пяти прямыхъ проективно-соотвѣтственный съ пучкомъ этихъ коническихъ сѣченій. Нахожденіе такой точки оказалось всегда возможнымъ и построеніе ея по девяти даннымъ точкамъ выполнимымъ всегда помощію одной только линейки.

Эту десятую точку, которая, такъ сказать, дополняетъ девять данныхъ, Шаль называетъ *ключемъ* для рѣшенія задачи, такъ какъ послѣ нахожденія ея построеніе самой кривой не представляетъ уже особенныхъ трудностей.

Дѣйствительно, кривая третьяго порядка, образуемая названными двумя пучками прямыхъ и коническихъ сѣченій, должна, по самому способу образованія, проходить черезъ всѣ эти десять точекъ, а слѣдовательно и быть искомою. Чтобы найдти затѣмъ сколько угодно и притомъ какъ угодно близкихъ между собою точекъ этой кривой, остается на всякомъ произвольно взятомъ лучѣ пучка прямыхъ отыскивать тѣ точки кривой, въ которыхъ этотъ лучъ пересѣкается съ соотвѣтствующимъ ему коническимъ сѣченіемъ втораго образующаго пучка. Отысканіе этихъ точекъ пересѣченія составляетъ, какъ извѣстно, задачу втораго порядка и, на основаніи правилъ, извѣстныхъ изъ элементовъ высшей геометріи, достигается безъ вычерчиванія самихъ коническихъ сѣченій весьма простымъ построеніемъ при помощи линейки и циркуля.

Вскорѣ послѣ напечатанія этого мемуара Шаль предложилъ еще нѣсколько способовъ для рѣшенія той же задачи, но всѣ они основываются на одной общей мысли, которая ускользала отъ всѣхъ предшественниковъ Шаля, именно на мысли найдти сперва *ключъ* къ рѣшенію, который въ различныхъ пріемахъ можетъ быть или точкой, или прямою линіей, дополняющею данныя девять точекъ кривой и составляющею вмѣстѣ съ ними группу данныхъ, устанавливающихъ какъ самые образующіе кривую пучки, такъ и соотвѣтствіе между ними.

Большинство другихъ мемуаровъ Шаля, принадлежащихъ этой же серіи, содержитъ дальнѣйшее развитіе идей, уже положенныхъ въ первомъ мемуарѣ, и преслѣдуютъ рѣшеніе той же задачи, но уже въ обобщенномъ видѣ, а именно въ примѣненіи къ кривымъ, порядокъ которыхъ выше третьяго.

Занявшись вопросомъ объ этихъ кривыхъ, Шаль легко замѣтилъ, что ключемъ для нахожденія ихъ построенія должна уже быть не одна точка или прямая, а цѣлая группа ихъ. Такъ, въ случаѣ кривой четвертаго порядка эта группа можетъ состоять или изъ двухъ, или изъ трехъ точекъ. Нахожденіе такой группы, если число составляющихъ ее элементовъ болѣе двухъ, а также нахожденіе при такомъ же условіи группъ точекъ искомой кривой, въ которыхъ пересѣкаются линіи образующихъ ее пучковъ, уже не можетъ быть достигаемо элементарнымъ построеніемъ, т. е. помощію линейки и циркуля. Затрудненіе, которое такимъ образомъ возникало, вызвало мемуаръ о построеніи корней уравненій третьей и четвертой степени. Тѣми же изслѣдованіями были вызваны первыя идеи Шаля о его *принципѣ соотвѣтствія*.

Въ заключеніи разсматриваемаго ряда мемуаровъ должны быть поставлены два сообщенія академіи (1857) о тѣхъ условіяхъ геометрическихъ и числовыхъ, которыми связаны группы точекъ пересѣченія нѣсколькихъ линій или поверхностей какихъ бы то ни было высшихъ порядковъ.

Всѣ эти изслѣдованія, носящія общій чисто геометрическій характеръ, привлекли вниманіе и другихъ геометровъ, которые, подражая отчасти Шалю и придерживаясь созданнаго имъ круга идей, тѣмъ не менѣе подвергли ту же научную область дальнѣйшей болѣе подробной разработкѣ. Къ числу этихъ геометровъ слѣдуетъ отнести прежде всего Жонкьера (E. de Jonquières), который въ 1856 году представилъ академіи большой мемуаръ подъ заглавіемъ: «Опытъ изслѣдованія образованія геометрическихъ кривыхъ и въ частности кривыхъ четвертаго порядка». Разсмотрѣвъ этотъ трудъ по порученію академіи, Шаль отозвался о немъ съ большою похвалою и выразился между прочимъ слѣдующимъ образомъ. «Этотъ мемуаръ представляетъ, какъ намъ кажется, удачный опытъ разработки вопросовъ, заключающихъ въ себѣ большія трудности, передъ которыми приходится останавливаться, такъ сказать, на первомъ же шагу. Трудъ этотъ изобличаетъ въ авторѣ выходящую изъ ряда способность къ отвлеченнымъ представленіямъ чистой геометріи и вполнѣ заслуживаетъ поощренія».

Продолжая трудиться на поприщѣ, требующемъ прежде всего научной изобрѣтательности, Шаль не оставлялъ въ то же время и своихъ научно-историческихъ изслѣдованій. Мы уже сказали, что онъ неоднократно представлялъ академіи соображенія и доказательства по поводу своихъ прежнихъ выводовъ. Кромѣ того онъ всегда живо интересовался всякимъ новымъ фактомъ или истолкованіемъ изъ исторіи геометріи, почему-либо выступавшимъ впередъ, или благодаря счастливому открытію памятниковъ науки, или по поводу трудовъ другихъ ученыхъ. Можно сказать, что не было ни одного сообщенія или представленія, сдѣланнаго кѣмъ-либо академіи изъ этой области, которое не возбудило бы его особеннаго вниманія и соревнованія и не вовлекло бы его или въ самостоятельныя глубокія изслѣдованія, или въ ученыя состязанія и споры.

Но надъ всѣми этими изслѣдованіями или случайными замѣтками должно быть поставлено, какъ образцовое произведеніе и результатъ многолѣтняго труда опытнаго и геніальнаго ученаго, его возстановленіе недошедшаго до насъ сочиненія Эвклида о поризмахъ, о которомъ мы слегка упомянули выше.

Этотъ прекрасный трудъ изданъ Шалемъ въ 1860 году подъ заглавіемъ: «Три книги поризмъ Эвклида, возстановленныя на основаніи замѣчанія Паппа и согласно мнѣнію Р. Симсона». (Les trois livres de Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions).

Вопросомъ о поризмахъ Шаль занимался очень долго и еще въ «Aperçu historique» касался его какъ въ самой исторической части книги, такъ и въ особомъ примѣчаніи.

Слово *поризма* (porisma, *πόρισμα*) есть названіе особаго рода геометрическихъ предложеній. Въ элементахъ Эвклида это слово употребляется въ смыслѣ тождественномъ съ словомъ слѣдствіе или корроларій, но въ другихъ сочиненіяхъ древнихъ и между прочимъ въ сочиненіи Эвклида, возстановленномъ Шалемъ, этимъ именемъ называются предложенія, имѣющія свой спеціальный характеръ и отличныя отъ другихъ какъ по формѣ, такъ и по содержанію.

Нужно замѣтить, что древніе геометры дѣлали весьма тонкое различеніе между предложеніями разныхъ родовъ и характеризовали каждый видъ предложеній особымъ названіемъ. Впослѣдствіи это различеніе утратило свое значеніе вѣроятно какъ болѣе или менѣе формальное и неимѣющее прямого отношенія къ самой, такъ сказать, сущности науки, и теперь представляется весьма труднымъ не только отнести какое-либо предложеніе къ тому или другому виду, но и узнать хотя приблизительно, въ чемъ видѣли древніе отличительные признаки предложеній, которыя они называли общимъ именемъ. Это какъ-разъ имѣетъ мѣсто и по отношенію къ поризмамъ.

Краткія указанія на особенности этихъ предложеній, а также нѣкоторыя свѣдѣнія о посвященномъ имъ сочиненіи Эвклида, сохранились для насъ у Паппа александрійскаго, геометра комментатора, жившаго въ концѣ IV-го столѣтія, и у Прокла Діадоха, философа V-го столѣтія. Послѣдній даетъ только опредѣленіе поризмъ какъ особыхъ предложеній, у Паппа же въ 7-й книгѣ его сочиненія «Collectiones mathematicae» мы находимъ болѣе подробныя по этому предмету указанія. Тамъ мы встрѣчаемъ, во первыхъ, два опредѣленія поризмъ, изъ которыхъ одно принадлежитъ древнимъ, а другое новѣйшимъ по отношенію къ той эпохѣ геометрамъ. Затѣмъ кромѣ общихъ указаній на характеръ сочиненія Эвклида о поризмахъ замѣтка Паппа содержитъ 29-ть поризмъ, приведенныхъ безъ доказательства лишь какъ примѣры изъ числа всѣхъ 171-й поризмы, содержащихся въ книгахъ Эвклида. Для поясненія этихъ примѣровъ Паппъ даетъ 38-мь леммъ. Всѣ эти предложенія изложены, однако, у Паппа въ выраженіяхъ столь сжатыхъ и темныхъ, что Галлей, извѣстный англійскій астрономъ прошедшаго столѣтія, чрезвычайно свѣдущій въ геометріи древнихъ грековъ, признается, что ничего въ нихъ не понимаетъ.

Не смотря на эту скудость и темноту историческихъ указаній относительно поризмъ, желаніе возстановить по этимъ указаніямъ сочиненіе Эвклида возбуждало къ упорному труду очень многихъ геометровъ новаго времени, начиная почти съ эпохи возрожденія. Одною изъ побудительныхъ причинъ къ этому служило кромѣ самого имени Эвклида, представляющаго безъ сомнѣнія лучшее ручательство за достоинство сочиненія, служило общее сужденіе высказанное о немъ Паппомъ. По его словамъ, это было обширное и геніально составленное собраніе чрезвычайно важныхъ предложеній, служащихъ необходимымъ пособіемъ для рѣшенія наиболѣе трудныхъ задачъ. Далѣе Паппъ говоритъ, что поризмы Эвклида представляютъ ученіе замѣчательное по своей общности и чрезвычайно пріятное для тѣхъ, кто умѣетъ видѣть и находить.

Въ числѣ ученыхъ, старавшихся возстановить это ученіе, мы встрѣчаемъ имена Альберта Жирара (нач. XVII стол.), Фермата (1590—1663), Галлея (1656—1742) и др. Усиліямъ ихъ не удалось однако, сколько до сихъ поръ извѣстно, побѣдить трудности вопроса и дать хотя бы частное вполнѣ удовлетворительное его рѣшеніе.

Первый, имѣвшій въ этомъ отношеніи успѣхъ, былъ Робертъ Симсонъ, профессоръ въ Глазго (1687—1768). Ему принадлежитъ честь разъясненія многихъ изъ этихъ загадочныхъ предложеній и въ особенности той общей формы, которая была имъ свойственна. Объясненіе поризмъ, данное этимъ геометромъ, слѣдующее.

«Поризма есть предложеніе, въ которомъ высказывается, что нѣкоторыя геометрическія величины могутъ быть опредѣлены и дѣйствительно опредѣляются, если даны ихъ соотношенія съ величинами постоянными и извѣстными, а также съ такими величинами, которыя могутъ быть измѣняемы до безконечности; эти послѣднія величины связываются сверхъ того однимъ или нѣсколькими условіями, опредѣляющими законъ ихъ измѣняемости».

Къ числу поризмъ, предлагаемыхъ Симсономъ въ подтвержденіе этого объясненія, принадлежатъ семь или восемь изъ 29-ти поризмъ Эвклида, переданныхъ Паппомъ. Кромѣ того въ разныхъ мѣстахъ своего сочиненія Симсонъ воспроизводитъ 38-мь леммъ Паппа съ доказательствами часто упрощенными и пополненными.

Идеи Симсона о поризмахъ возбудили большое вниманіе геометровъ и болѣе всего содѣйствовали его ученой извѣстности, хотя нѣкоторые изъ ученыхъ и не вполнѣ соглашались съ его объясненіями. Какъ бы то ни было, несомнѣнно то, что Симсонъ сдѣлалъ рѣшительный и крупный шагъ къ разъясненію знаменитой научно-исторической загадки, которую представляло для новыхъ геометровъ сочиненіе Эвклида о поризмахъ. Болѣе важную услугу оказалъ въ этомъ отношеніи одинъ только Шаль, разрѣшившій эту загадку окончательно.

Вниманіе Шаля было обращено на этотъ вопросъ еще съ самыхъ первыхъ дней его научной дѣятельности. Въ третьемъ примѣчаніи къ «Историческому очерку» онъ говоритъ: «Размышленія объ этомъ предметѣ долгое время занимали насъ исключительно и часто отвлекали отъ занятій, которымъ мы хотѣли себя посвятить; интересъ былъ сильнѣе воли».

Раздѣляя вполнѣ воззрѣнія Симсона, Шаль находитъ, что въ трудѣ его еще очень многаго не достаетъ для того, чтобы загадка могла считаться вполнѣ разрѣшенною. Для этого, по его мнѣнію, необходимо найдти удовлетворительные и точные отвѣты на слѣдующіе вопросы.

1) Какова была форма выраженій поризмъ?

2) Каковы были предложенія, заключавшіяся вообще въ сочиненіи Эвклида, въ особенности же тѣ изъ нихъ, относительно которыхъ Паппъ оставилъ намъ весьма неполныя указанія?

3) Какія намѣренія и философскія соображенія заставили Эвклида изложить это сочиненіе въ совершенно особой формѣ?

4) Почему это сочиненіе заслуживало то особое предпочтеніе, какое даетъ ему Паппъ предъ всѣми другими произведеніями древнихъ?

5) Какіе въ наше время методы и операціи, хотя бы и въ иной формѣ, ближе всего подходятъ къ поризмамъ Эвклида и что нынѣ замѣнило ихъ въ рѣшеніи задачъ?

6) Наконецъ, было бы необходимо объясненіе отдѣльныхъ мѣстъ у Паппа, напримѣръ того мѣста, гдѣ онъ осуждаетъ опредѣленіе, данное поризмамъ позднѣйшими геометрами.

Книга Шаля о поризмахъ Эвклида представляетъ въ своей первой вводной части тщательное изысканіе элементовъ для составленія отвѣтовъ на эти вопросы. Чрезвычайно остроумный синтезъ, употребляемый Шалемъ для созданія изъ этихъ элементовъ стройныхъ и вполнѣ удовлетворительныхъ объясненій, которыя, будучи свѣрены со свидѣтельствами Паппа и другими документами, не оставляютъ никакого сомнѣнія въ справедливости заключеній и строгости метода, дѣлаютъ трудъ Шаля высокимъ образцомъ научно-историческихъ изслѣдованій.

Главною руководящею нитью въ этомъ трудѣ является разысканіе тѣхъ мельчайшихъ признаковъ, которыми различались или въ которыхъ сходствовали предложенія, носившія у древнихъ разныя наименованія. Данныя для этого Шаль усматриваетъ въ самыхъ различныхъ мѣстахъ какъ у древнихъ писателей, такъ и у разныхъ ихъ комментаторовъ и переводчиковъ.

У Паппа, напримѣръ, находится слѣдующее указаніе на положеніе, занимаемое поризмой относительно теоремы и проблемы.

Теорема есть предложеніе, въ которомъ требуется доказать то, что предложено.

Проблема есть предложеніе, въ которомъ требуется построить то, что предложено.

Поризма есть предложеніе, въ которомъ требуется найдти то, что предложено.

Другія указанія Паппа относятся къ соотношенію между поризмами и теоремами о мѣстахъ.

Мѣстомъ называется въ геометріи послѣдовательность точекъ (или другихъ геометрическихъ предметовъ), удовлетворяющихъ общимъ условіямъ, выражаемымъ построеніемъ или соотношеніями между величинами. Слѣдовательно, всякая линія есть мѣсто точекъ. Древніе раздѣляли мѣста на нѣсколько родовъ или классовъ. Такъ, прямую линію и окружность они называли *плоскими мѣстами*, коническія сѣченія — *тѣлесными мѣстами;* нѣкоторыя же линіи высшихъ порядковъ, какъ напримѣръ конхоида, циссоида, квадратрикса, назывались у нихъ *линейными мѣстами*.

Теоремою о геометрическомъ мѣстѣ должна быть, слѣдовательно, такая теорема, въ которой выражается и доказывается какое-либо свойство общее всѣмъ точкамъ (элементамъ) этого мѣста. Паппъ говоритъ, что геометрическія мѣста суть частные виды поризмъ и что по опредѣленію позднѣйшихъ греческихъ геометровъ то, что составляетъ поризму, недостаетъ въ гипотезѣ теоремы о мѣстѣ.

Изъ произведеній Эвклида до насъ дошла вполнѣ книга, носящая названіе «Данныя». Слово *данное* имѣло у геометровъ древности особое значеніе и означало, можно сказать, то же самое, что мы теперь выражаемъ словами *нѣкоторое-опредѣленное.* Предложенія, находящіяся въ названной сейчасъ книгѣ Эвклида, выражаютъ, что если будутъ извѣстны и опредѣлены (даны) нѣкоторые геометрическіе предметы, то чрезъ нихъ будутъ таковыми же и нѣкоторые другіе. Нужно думать, что книга эта составляла непосредственное продолженіе элементовъ и служила также пособіемъ для рѣшенія задачъ.

Сопоставляя всѣ эти дошедшія до насъ свѣдѣнія и множество другихъ, которыми обладалъ Шаль, благодаря его громадной исторической эрудиціи, онъ пришелъ къ заключенію, что поризмы были тѣмъ же по отношенію къ теоремамъ о мѣстахъ, чѣмъ данныя по отношенію къ обыкновеннымъ теоремамъ элементовъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ поризмахъ говорилось не объ одномъ или нѣсколькихъ предметахъ, а о безконечномъ множествѣ предметовъ, подчиненныхъ общему условію, или, что все то-же, о предметахъ перемѣнныхъ; да сверхъ того то, что говорилось о нихъ, состояло главнымъ образомъ лишь въ констатированіи возможности опредѣлять одни перемѣнные предметы или свойства по другимъ. Цѣль поризмъ, по мнѣнію Шаля, состояла въ замѣнѣ одного выраженія (или опредѣленія) геометрическаго мѣста другимъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что отличительный характеръ поризмъ состоялъ въ наибольшей степени общности, каковою не обладалъ ни одинъ изъ другихъ видовъ предложеній древности. Можно даже сказать, что общность этихъ предложеній ни въ чемъ не уступаетъ той общности, которую до послѣдняго времени было принято считать присущею исключительно пріемамъ аналитическимъ. Шаль даже прямо говоритъ, что ученіе о поризмахъ было нѣкоторымъ образомъ аналитическою геометріей древнихъ и если-бы оно дошло до насъ, то мы можетъ быть усмотрѣли бы въ немъ зачатки Декартова метода[1].

Что касается вопроса, какіе изъ современныхъ намъ научныхъ пріемовъ и геометрическихъ методовъ ближе всего подходятъ къ

[1] См. «Aperçu historique», 2-e éd., 1875, p. 276.

поризмамъ Эвклида по своему содержанію и значенію для науки вообще, то Шаль твердо держится мнѣнія, что это суть пріемы новѣйшей или проективной геометріи. Понятіе о сложномъ отношеніи и гомографическомъ соотвѣтствіи, положенныя, какъ мы видѣли, Шалемъ въ основаніе его «Высшей геометріи», играютъ преобладающую роль и въ поризмахъ Эвклида, какъ это видно по тѣмъ ихъ образчикамъ, которые даетъ Паппъ. А изъ 38-ми леммъ Паппа нѣкоторыя суть не что иное, какъ различныя выраженія свойства ангармоническаго отношенія не мѣнять своего значенія въ перспективѣ; другія же суть слѣдствія этого свойства.

Главное отличіе ученія о поризмахъ отъ современной намъ проективной геометріи заключается, по всей вѣроятности, въ томъ, что въ поризмахъ тѣ же самые принципы являются не въ столь явной и очищенной, такъ сказать, формѣ, а скрыты въ пріемахъ и построеніяхъ, свойственныхъ по преимуществу геометріи элементарной.

Сочиненіе Эвклида о поризмахъ состояло, по свидѣтельству Паппа, изъ трехъ книгъ, изъ которыхъ въ первыхъ двухъ рѣчь идетъ только о прямыхъ линіяхъ, а въ третьей говорится также и о кругѣ. Эти три книги Шаль возстановилъ вполнѣ и изложеніе ихъ въ стилѣ древнихъ геометровъ составляетъ вторую и главную часть его трактата «Les trois livres de Porismes d'Euclide». Конечно, нельзя быть увѣреннымъ, что это изложеніе можетъ оказаться болѣе или менѣе точнымъ переводомъ оригинала, если бы онъ отыскался, но тѣмъ не менѣе, сообразивъ всѣ доводы Шаля, слѣдуетъ признать, что различіе между утраченнымъ классическимъ оригиналомъ и его возсозданіемъ не можетъ быть въ существенномъ.

Въ началѣ шестидесятыхъ годовъ Шаль представилъ академіи рядъ сообщеній, относящихся къ ученію о линіяхъ двоякой кривизны. На первомъ планѣ здѣсь стоятъ, конечно, линіи 3-го порядка, занимающія среди линій въ пространствѣ, по своей простотѣ, столь же важное мѣсто, какъ коническія сѣченія среди линій плоскихъ. Извѣстно даже, что многія свойства двояко-кривыхъ линій 3-го порядка находятся въ полнѣйшей аналогіи со свойствами коническихъ сѣченій. Этимъ предметомъ Шаль занимался также очень давно и о названныхъ сейчасъ свойствахъ линій 3-го порядка говорится еще въ его «Историческомъ очеркѣ», гдѣ этимъ линіямъ посвящено особое примѣчаніе[1]. Въ изслѣдованіяхъ, публикованныхъ въ шестидесятыхъ годахъ, особенно важное значеніе для науки представляетъ общій пріемъ для изученія двояко кривыхъ линій, состоящій главнымъ образомъ въ разсмотрѣніи этихъ линій какъ помѣщающихся по поверхностяхъ линейчатыхъ, т. е. описываемыхъ движеніемъ прямой. Пріемъ этотъ представляетъ нѣкоторую аналогію или, вѣрнѣе, обобщеніе декартовыхъ координатъ на плоскости.

Время и преклонные годы не уменьшали ни энергіи, ни научной изобрѣтательности Шаля; въ теченіе 1864 года, будучи 70-ти лѣтъ отъ роду, онъ сообщилъ академіи рядъ своихъ изслѣдованій, положившихъ основаніе цѣлой отрасли геометріи. Однихъ этихъ изслѣдованій было бы достаточно для того, чтобы обезсмертить имя Шаля въ наукѣ. Въ нихъ онъ не имѣлъ себѣ предшественниковъ и блестящее изобрѣтеніе его отличается полнѣйшею оригинальностью. Это изобрѣтеніе есть его *теорія характеристикъ*, за которую лондонское королевское общество присудило ему медаль Коплея, — самое высшее отличіе, какое дается этою знаменитою ученою коллегіей за наиболѣе полезныя практическія и научныя изобрѣтенія.

Вотъ въ общихъ чертахъ главная цѣль и содержаніе этого ученія.

Всякая геометрическая линія на плоскости можетъ быть вполнѣ опредѣлена тѣми или другими геометрическими данными или условіями. Если эти данныя состоятъ изъ достаточнаго числа то-

[1] «Aperçu historique» 2-e ed. Paris, 1875, p. 403—407.

чекъ, чрезъ которыя линія должна проходить, то, какъ извѣстно, эта опредѣляемая линія будетъ единственною. Но при другихъ данныхъ или условіяхъ можетъ существовать нѣсколько вполнѣ ими опредѣляемыхъ линій. Иначе говоря, вопросъ объ опредѣленіи искомой линіи по этимъ даннымъ можетъ имѣть нѣсколько рѣшеній. Такъ, напримѣръ, извѣстно, что пятью точками опредѣляется единственное проходящее чрезъ нихъ коническое сѣченіе. Но коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ четыре точки и касающихся одной данной прямой, должно быть, вообще говоря, два.

Такимъ образомъ естественно возникаетъ вопросъ о числѣ кривыхъ линій, удовлетворяющихъ тѣмъ или другимъ условіямъ, посредствомъ которыхъ онѣ опредѣляются вполнѣ.

Въ аналитической геометріи опредѣленіе этого числа находится въ тѣсной связи съ составленіемъ самаго уравненія, выражающаго кривую относительно какой-либо системы координатъ. При составленіи же этого уравненія приходится въ большинствѣ случаевъ встрѣчаться съ большими трудностями, состоящими въ чрезвычайно сложныхъ алгебраическихъ преобразованіяхъ.

Дѣйствительно, чтобы получить уравненіе кривой, опредѣляемой геометрическими условіями, нужно прежде всего облечь эти условія въ алгебраическую форму и затѣмъ посредствомъ послѣдовательныхъ исключеній вспомогательныхъ величинъ вывести изъ этихъ алгебраическихъ соотношеній связь между коэффиціентами искомаго уравненія и данными задачи. Но какъ та, такъ и другая изъ этихъ операцій требуетъ для каждаго частнаго случая особыхъ усилій ума, и выполнима съ небольшою затратою времени лишь для немногихъ вопросовъ весьма частнаго характера.

Методъ характеристикъ Шаля позволяетъ опредѣлять число искомыхъ кривыхъ линій, обходя всѣ эти трудности, такъ-какъ при употребленіи его уравненія линій не играютъ никакой роли и потому оказывается совершенно ненужнымъ ни облекать условія въ алгебраическую форму, ни производить какія-либо исключенія. Основывается этотъ методъ лишь на немногихъ простыхъ принципахъ, и потому примѣненіе его весьма однообразно и не можетъ представлять большихъ затрудненій.

Прежде чѣмъ указывать на эти принципы замѣтимъ, что существенную важность большинства научныхъ открытій, представляющихъ крупныя пріобрѣтенія на пути научнаго прогресса, составляетъ не столько созданіе новыхъ искусственныхъ орудій изслѣдованія, сколько устраненіе тѣхъ частностей и аксессуаровъ обсуждаемаго предмета, отъ которыхъ обыкновенному уму весьма трудно отдѣлиться или вслѣдствіе укоренившейся привычки и традицій, или по естественной для всѣхъ склонности ухищряться прежде всего въ употребленіи средствъ, находящихся непосредственно подъ руками. Въ этомъ смыслѣ главную важность такого, напримѣръ, изобрѣтенія какъ аналитическая геометрія, слѣдуетъ, намъ кажется, видѣть не столько въ самомъ употребленіи координатъ, которыя въ рукахъ опытнаго геометра почти для всякаго болѣе или менѣе труднаго вопроса должны быть особыя, сколько въ отвлеченіи мысли отъ тѣхъ частностей построенія, съ которыми неразрывно связанъ строгій методъ древнихъ.

Но, отвлекаясь отъ частностей построенія, аналитическая геометрія создала новые конкретные образы — уравненія. Изучать линіи на основаніи ихъ уравненій сдѣлалось такою вкоренившеюся привычкою геометровъ аналистовъ, что можно утверждать съ большою смѣлостью, что для многихъ стало невозможнымъ даже мыслить о линіи и ея свойствахъ, не представляя себѣ ея уравненія. Лишь въ сравнительно недавнее время Бобилье и Плюкеръ введеніемъ такъ называемаго сокращеннаго метода расширили кругозоръ изслѣдователей и первые подали примѣръ разсмотрѣнія уравненій съ общей точки зрѣнія независимо отъ частныхъ видовъ алгебраическихъ формъ, изъ которыхъ они составлены.

Шалю принадлежитъ болѣе важный шагъ на пути дальнѣйшихъ плодотворныхъ отвлеченій. Въ вопросахъ геометрическихъ, въ которыхъ требуемый отвѣтъ долженъ выражаться числомъ и которые въ совокупности составляютъ отдѣльное ученіе, называемое теперь *числовою геометріей*, онъ далъ возможность совершенно устранить изъ разсужденій уравненія и разсуждать только надъ числовыми характеристиками, т. е. надъ числами, которыя имѣютъ непосредственное значеніе для опредѣленія системъ кривыхъ линій или условій и которыхъ оказывается вполнѣ достаточно, помимо всякихъ другихъ аналитико-геометрическихъ символовъ, для нахожденія чиселъ, представляющихъ искомыя рѣшенія.

Въ основаніи метода характеристикъ положенъ между прочимъ упомянутый выше *принципъ соотвѣтствія*. Онъ выражается двумя предложеніями, изъ которыхъ слѣдующее есть первое и главное.

Если на прямой линіи мы имѣемъ два ряда точекъ, связанныхъ между собою такъ, что каждой точкѣ перваго ряда соотвѣтствуетъ m точекъ втораго, а каждой точкѣ втораго n точекъ перваго, то число точекъ на прямой, изъ которыхъ каждая, будучи разсматриваема какъ принадлежащая тому или другому ряду, имѣетъ въ числѣ ей соотвѣтствующихъ точекъ одну съ нею совпадающую, равняется $m+n$.

Предложеніе это остается вѣрнымъ не только тогда, когда ряды точекъ разсматриваются на прямой, но также и тогда, когда прямая замѣнена такъ называемою раціональною или уникурсальною кривою. Для кривыхъ же не раціональныхъ онъ долженъ быть нѣсколько измѣненъ или, вѣрнѣе, обобщенъ, и это обобщеніе сдѣлано было позднѣе другими геометрами.

Извѣстно, что коническія сѣченія, проходящія чрезъ четыре общія точки, представляютъ систему линій, число которыхъ есть простая безконечность, т. е. безконечно большое число того же порядка какъ число точекъ на прямой. Подобныя системы линій, и притомъ линій какого угодно порядка, могутъ быть до безконечности разнообразны. Достаточно сказать, что если въ уравненіи какой либо линіи относительно какой нибудь системы координатъ входитъ кромѣ перемѣнныхъ координатъ еще одна неопредѣленная величина, то, давая ей различныя значенія, мы будемъ имѣть вмѣсто одной линіи цѣлую систему ихъ указаннаго сейчасъ характера.

Для разрѣшенія различныхъ числовыхъ вопросовъ, относящихся къ такой системѣ, имѣютъ особенно важное значеніе, какъ убѣждаетъ насъ Шаль, слѣдующія два числа: 1) число линій, принадлежащихъ системѣ и проходящихъ въ то же время чрезъ одну произвольно взятую точку, и 2) число линій, принадлежащихъ системѣ и касающихся въ то же время одной произвольной прямой. Числа эти Шаль обозначаетъ чрезъ μ и ν и называетъ *характеристиками системы.* Знанія этихъ двухъ чиселъ вполнѣ достаточно, чтобы, пользуясь принципомъ соотвѣтствія, обнаруживать множество свойствъ, принадлежащихъ системѣ.

Въ первыхъ своихъ мемуарахъ, посвященныхъ ученію о характеристикахъ, Шаль разсматриваетъ только системы коническихъ сѣченій.

Каждое коническое сѣченіе опредѣляется пятью простыми условіями, такъ напримѣръ пятью точками, или пятью касательными, или четырьмя точками и одною касательною и т. д. Такія условія для кривой какъ проходить черезъ данную точку или касаться данной прямой называются элементарными; но кромѣ ихъ можетъ быть множество другихъ условій, въ такой же степени опредѣляющихъ линію и потому называющихся также простыми. Таково, напримѣръ, условіе, чтобы коническое сѣченіе касалось не прямой, а кривой линіи того или другаго порядка.

Каждое такое условіе характеризуется также двумя числами, которыя Шаль обозначаетъ чрезъ α и β и называетъ *характеристиками условія.*

Если обозначимъ чрезъ Z какое нибудь простое условіе и положимъ, что p есть число коническихъ сѣченій, удовлетворяющихъ условію Z и проходящихъ черезъ четыре точки, а q — число коническихъ сѣченій, удовлетворяющихъ тому же условію и касающихся четырехъ прямыхъ, то характеристики α и β условія Z опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \frac{2q-p}{3}, \quad \beta = \frac{2p-q}{3}.$$

Въ теоріи характеристикъ особенно важное значеніе принадлежитъ слѣдующему предложенію.

Число линій, принадлежащихъ системѣ, которой характеристики суть μ и ν, и подчиненныхъ сверхъ того условію, котораго характеристики суть α и β, всегда равняется $\alpha\mu + \beta\nu$.

Мы не можемъ приводить здѣсь ни того множества любопытныхъ и простыхъ примѣровъ, которыми это предложеніе подтверждается, ни тѣхъ обильныхъ и важныхъ послѣдствій, которыя изъ него проистекаютъ. Скажемъ только, что, основываясь на этомъ предложеніи, Шаль даетъ весьма остроумный и изящный пріемъ для опредѣленія числа коническихъ сѣченій, подчиненныхъ какимъ бы то ни было пяти простымъ условіямъ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, которыхъ характеристики суть послѣдовательно α_1, β_1, α_2, β_2 и т. д. Пріемъ этотъ состоитъ въ послѣдовательномъ замѣщеніи элементарныхъ условій условіями данными. Помощію его находится, напримѣръ, что число коническихъ сѣченій, касающихся одновременно пяти даннымъ коническимъ сѣченіямъ, есть 3264.

Изъ сказаннаго видно, что подъ простыми условіями нужно понимать такія, которыхъ необходимо и достаточно пять, чтобы опредѣлить вполнѣ коническое сѣченіе. Но могутъ существовать еще условія сложныя, т. е. такія, которыя, по отношенію къ опредѣленію коническихъ сѣченій, слѣдуетъ считать равнозначущими съ двумя, тремя и вообще нѣсколькими простыми условіями. Такъ напримѣръ условіе, чтобы коническое сѣченіе касалось данной кривой въ двухъ неопредѣленныхъ точкахъ, есть двойное; условіе, чтобы оно имѣло съ данной кривой соприкосновеніе третьяго порядка въ неопредѣленной же точкѣ, есть тройное, и т. п. Нахожденіе числа коническихъ сѣченій или характеристикъ системъ въ случаяхъ, когда въ число данныхъ, ихъ опредѣляющихъ, входятъ такія сложныя условія, достигается безъ труда при помощи того же метода Шаля.

Система коническихъ сѣченій, которой характеристики суть μ и ν, можетъ включать въ себѣ особые частные виды этихъ кривыхъ, которые Шаль называетъ *исключительными* (coniques exceptionnelles, quasi-coniques). Это суть: 1) совокупность двухъ совпадающихъ прямыхъ, и 2) совокупность двухъ совпадающихъ точекъ. Между числами этихъ исключительныхъ кривыхъ и характеристиками системы существуютъ, какъ показалъ Шаль, простыя линейныя соотношенія. Именно, если назовемъ числа исключительныхъ коническихъ сѣченій послѣдовательно черезъ a и b, то будемъ имѣть

$$a = 2\nu - \mu, \quad b = 2\mu - \nu$$

откуда

$$a + b = \mu + \nu.$$

Такимъ образомъ видно, что каждая изъ двухъ характеристикъ системы менѣе удвоенной другой и болѣе ея половины, и что сумма обѣихъ характеристикъ равняется числу всѣхъ исключительныхъ коническихъ сѣченій.

Вскорѣ послѣ первыхъ примѣненій своего новаго метода къ ученію о системахъ коническихъ сѣченій на плоскости Шаль распространилъ его на поверхности втораго порядка и коническія сѣченія въ пространствѣ, а затѣмъ и на линіи какого бы ни было высшаго порядка.

Мы уже высказали выше наше мнѣніе о важности метода характеристикъ. Считаемъ не лишнимъ привести еще въ подтвержденіе этого мнѣнія заключеніе президента лондонскаго королевскаго общества въ его отзывѣ о достоинствахъ изобрѣтенія Шаля. «Принимая во вниманіе, говоритъ онъ, какое обширное и совершенно новое поле для изслѣдованій открываетъ ученіе о характеристикахъ, мы думаемъ, что эта новая теорія, какъ особый методъ чистой геометріи, ни въ чемъ не уступаетъ всѣмъ другимъ изобрѣтеніямъ нашего вѣка».

Поле изслѣдованій оказалось не только обширнымъ, но и весьма плодовитымъ. Кэлей, Цейтенъ, Кремона, Клебшъ и многіе другіе геометры развили и дополнили научные выводы Шаля и въ результатѣ получился цѣлый отдѣлъ геометріи, въ которомъ еще многіе ученые могутъ находить матеріалъ для своихъ трудовъ какъ въ смыслѣ систематизаціи и уясненія уже пріобрѣтеннаго, такъ и въ смыслѣ новыхъ открытій или усовершенствованій.

Справедливость требуетъ упомянуть, что одновременно съ Шалемъ вопросами о системахъ геометрическихъ линій занимался еще Жонкьеръ, которому также принадлежитъ извѣстная доля участія въ установкѣ и развитіи новаго ученія. Нѣкоторая разность взглядовъ была причиной возникшей между обоими геометрами полемики, которая продолжалась въ 1866 и 1867 годахъ.

Въ связи съ изслѣдованіями о системахъ линій находятся сообщенія Шаля академіи (въ 1866 г.) о такъ называемыхъ раціональныхъ кривыхъ. Вопросами о этихъ линіяхъ занимались въ различныя эпохи тоже очень многіе ученые и Шаль съ своей стороны внесъ въ эту область нѣсколько свѣтлихъ и изящно выраженныхъ мыслей.

Въ концѣ шестидесятыхъ годовъ Шаль потерпѣлъ одну неудачу на поприщѣ научно-историческихъ изслѣдованій. Какой-то шарлатанъ продалъ ему за очень дорогую цѣну нѣсколько документовъ, доказывавшихъ, что первенство изобрѣтенія дифференціальнаго исчисленія должно быть всецѣло приписано не Ньютону, а Паскалю. Документы эти, состоявшіе главнымъ образомъ изъ писемъ Паскаля, оказались подложными. Эта мистификація была, однако, устроена такъ искусно, что Шаль, увлеченный важностью открытія и возможностью укрѣпить за французскою національностію честь великаго изобрѣтенія Ньютона, занималъ этимъ предметомъ вниманіе академіи въ теченіе всего 1869 года. Искренность этого увлеченія не могла подлежать ни малѣйшему сомнѣнію, такъ-какъ по обнаруженіи подлога Шаль сознавался въ своей ошибкѣ съ полной откровенностью и чистосердечіемъ, соотвѣтствующими вполнѣ его свѣтлому правдивому характеру, для котораго торжество истины и слава любимаго отечества были дороже всего.

Послѣднимъ большимъ трудомъ Шаля по исторіи геометріи была книга, напечатанная въ 1870 году подъ заглавіемъ: «Rapport sur les progrès de la Géométrie en France». Сочиненіе это было написано по слѣдующему поводу.

Министерство народнаго просвѣщенія, въ видахъ содѣйствія процвѣтанію наукъ во Франціи, предложило различнымъ извѣстнымъ ученымъ представить отчеты о состояніи и новѣйшихъ успѣхахъ въ государствѣ тѣхъ наукъ, которыхъ они были представителями. На долю Шаля пришлась геометрія. Онъ взялся за это дѣло съ обычною своею энергіей, и результатомъ его усерднаго и продолжительнаго труда получился большой томъ, содержащій обзоръ научнаго движенія почти за все настоящее столѣтіе. Въ нѣкоторомъ отношеніи эту книгу можно считать продолженіемъ «Историческаго очерка»; но по характеру изложенія между обѣими книгами есть существенное различіе. Такъ какъ въ «Rapport sur les progrès» приходилось вести рѣчь большею частію о новыхъ научныхъ теоріяхъ, развитіе которыхъ еще не могло считаться законченнымъ, и о авторахъ еще живущихъ и продолжающихъ свои изслѣдованія, то Шаль ограничивался здѣсь по возможности сжатою и строго объективною передачею содержанія произведеній каждаго автора, рѣшаясь дѣлать сближенія и сопоставленія лишь тѣхъ произведеній, которыя относились къ одному предмету и находились въ тѣсной между собою связи какъ отдѣльные вклады въ одно общее научное теченіе. Такое воздержаніе отъ научной критики тѣмъ болѣе было необходимо, что Шаль, какъ наиболѣе выдающійся дѣятель на геометрическомъ поприщѣ за цѣлую половину столѣтія, по необходимости долженъ былъ удѣлить значительную часть книги отчету о своихъ собственныхъ трудахъ.

Книга раздѣлена на пять главъ. Начавъ съ указанія на труды Монжа и Карно, какъ положившіе начало новаго направленія въ геометріи, Шаль разсматриваетъ въ первой главѣ труды ихъ ближайшихъ послѣдователей (1800 — 1830) и обнаруживаетъ передъ читателемъ съ достаточною ясностью, какое участіе принадлежитъ каждому въ общемъ прогрессѣ наукъ. Намъ кажется только, что при этомъ сравнительно мало сказано и о геометрическихъ заслугахъ Понселе, уже закончившаго къ тому времени свою дѣятельность и имѣющаго неоспоримое право на первенствующее мѣсто среди ученыхъ, создавшихъ новую или проективную геометрію.

Вторая глава представляетъ отчетъ объ «Историческомъ очеркѣ» Шаля и о другихъ его трудахъ, ближайшихъ по времени и содержанію къ этому сочиненію.

Третья глава обозрѣваетъ произведенія различныхъ геометровъ за періодъ времени отъ 1830 по 1850 годъ.

Четвертая глава начинается съ того времени, когда открыта была въ парижскомъ факультетѣ каѳедра высшей геометріи, и содержитъ описаніе какъ произведеній, относящихся къ преподаванію этого предмета, такъ и другихъ позднѣйшихъ трудовъ Шаля и его сообщеній академіи до 1868 года.

Пятая глава относится къ тому же періоду времени, какъ и предыдущая, но посвящена обзору трудовъ другихъ геометровъ.

Въ общемъ книга Шаля представляетъ драгоцѣнный сборникъ матеріала для исторіи новыхъ геометрическихъ ученій и, для всѣхъ геометровъ, интересующихся новыми научными успѣхами, можетъ служить превосходною справочною книгой и руководствомъ для правильнаго установленія связи между тѣмъ, что новыя усилія ученыхъ могутъ намъ открыть, и тѣмъ, что уже принадлежитъ наукѣ.

Въ послѣднее десятилѣтіе своей жизни неутомимый труженикъ продолжалъ разрабатывать свое ученіе о характеристикахъ, примѣняя этотъ методъ къ самымъ разнообразнымъ геометрическимъ вопросамъ и обнаруживая новые законы, которымъ подчиняются числовыя соотношенія, имѣющія мѣсто при разсмотрѣніи системъ различныхъ геометрическихъ предметовъ.

Обиліе сообщеній, сдѣланныхъ Шалемъ академіи изъ этой области, поразительно. Цѣлыя серіи новыхъ вопросовъ возбуждаются этими сообщеніями; цѣлыми сотнями предлагаются въ нихъ новыя любопытныя теоремы.

Мы считаемъ себя не въ правѣ входить въ нашемъ краткомъ очеркѣ въ разсмотрѣніе этихъ сложныхъ и трудныхъ изслѣдованій и думаемъ, что сказаннаго вполнѣ достаточно, чтобы дать читателю общее понятіе о научной дѣятельности великаго геометра.

Интеллектуальная жизнь знаменитыхъ ученыхъ продолжается еще долго послѣ ихъ смерти. Шаля живущаго и говорящаго не стало, но Шаль мыслящій и научающій еще долго останется съ нами. Новыя научныя идеи, даже сравнительно простыя, рѣдко слагаются въ умахъ учениковъ въ совершенно такой же формѣ и съ такимъ же предвидѣніемъ ихъ послѣдствій какъ въ умахъ геніальныхъ изобрѣтателей и учителей. Еще долго сказанное Шалемъ будетъ усваиваться все болѣе и болѣе; еще долго мы будемъ жить мысленно въ его сообществѣ, возбуждаемые и питаемые его свѣжими плодотворными научными идеями.

Намъ неизвѣстно пока подробностей относительно частной жизни Шаля. По всей вѣроятности, его товарищи и друзья дадутъ впослѣдствіи, въ своихъ воспоминаніяхъ о столь полезномъ для потомства дѣятелѣ, нѣкоторыя указанія на связь между его научною трудовою жизнью и его домашнимъ міромъ. Теперь же можно только сказать, судя по тѣмъ рѣчамъ и замѣткамъ, которыя уже посвящены его памяти, что научная дѣятельность поглощала почти все внутреннее существо Шаля. Онъ никогда не былъ женатъ и не имѣлъ семьи въ тѣсномъ смыслѣ этого слова. Но за-то онъ былъ самымъ нѣжнымъ, самымъ преданнымъ и самымъ полезнымъ семьяниномъ въ кругу людей, связанныхъ узами родства нравственнаго, въ семьѣ своихъ товарищей по наукѣ. Воспоминанія о томъ, какъ онъ любилъ собирать эту семью около своего домашняго стола, приходится читать и слышать изъ весьма многихъ источниковъ.

Впрочемъ гостепріимство Шаля было такою особенностью его характера, которая хорошо была извѣстна далеко не однимъ его ближайшимъ товарищамъ по наукѣ. Готовность его идти навстрѣчу всякому, хотя бы только возможному, научному успѣху была такъ велика, что двери его дома любезно отворялись передъ всѣми, кто желалъ найдти въ его бесѣдѣ руководительство или поощреніе или просто являлся, чтобы засвидѣтельствовать великому геометру свое удивленіе предъ его учеными трудами.

При этомъ не полагалось различія между соотечественниками и иностранцами. Къ послѣднимъ Шаль былъ особенно внимателенъ, какъ къ заѣзжимъ гостямъ, и принималъ у себя, говоритъ

Дарбу, съ одинаковою любезностью и сердечностью какъ знаменитаго ученаго, который пріѣзжалъ во Францію, предшествуемый давно заслуженною славою, такъ и скромнаго молодаго труженика, являвшагося въ Парижъ, чтобы пополнить свое научное образованіе. Въ этомъ послѣднемъ положеніи намъ лично привелось быть у Шаля за нѣсколько лѣтъ до его смерти и испытать на себѣ справедливость свидѣтельствъ о сердечности и любезной обходительности маститаго ученаго.

Упоминаютъ особенно часто еще объ одномъ высокомъ нравственномъ качествѣ Шаля, въ силу котораго онъ являлся горячимъ семьяниномъ, можно даже сказать — отцемъ, въ кругу несравненно болѣе обширномъ, чѣмъ кругъ дѣятелей науки. Это качество — страсть къ благотворительности; этотъ кругъ — всѣ нуждающіеся въ какой либо помощи или поддержкѣ.

Дюма въ своей рѣчи, сказанной надъ гробомъ Шаля отъ имени благотворительнаго общества друзей науки, выражается между прочимъ слѣдующимъ образомъ: «Шаль былъ замѣчателенъ своимъ добрымъ сердцемъ не менѣе чѣмъ своею научною геніальностью. Ученые, которыхъ преклонный возрастъ или болѣзни сдѣлали неспособными къ труду, безпомощныя семейства тѣхъ изъ нихъ, которые были похищены преждевременною смертью, теряютъ въ лицѣ Шаля наиболѣе сочувствующаго свидѣтеля ихъ бѣдствій, защитника наиболѣе проникнутаго желаніемъ облегчить ихъ положеніе, благодѣтеля наиболѣе готоваго подать имъ руку помощи». И эта готовность распространялась не на однихъ только постигнутыхъ несчастіемъ ученыхъ. Всякій, кто искалъ помощи, легко могъ встрѣтить на своемъ пути Шаля; только шедшій благодарить его не имѣлъ столь же быстраго успѣха.

Протоколъ засѣданія 3 марта.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, Д. М. Деларю, М. Ѳ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, Н. М. Флавицкій, А. А. Клюшниковъ, М. С. Косенко и Г. В. Левицкій.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Д. М. Деларю и *К. А. Андреевъ* сообщаютъ записки объ учительскихъ экзаменахъ.

М. Ѳ. Ковальскій сообщаетъ замѣтку о нахожденіи интеграла уравненія $y'' - qy' + y = 0$ черезъ интегралъ уравненія $y'' + qy' + y = 0$.

А. П. Грузинцевъ сообщаетъ аналитическое доказательство основной теоремы теоріи упругости.

Протоколъ засѣданія 16 марта.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, А. П. Грузинцевъ, И. Д. Штукаревъ и Г. В. Левицкій.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

В. Г. Имшенецкій сообщаетъ «объ интегрированіи линейныхъ уравненій произвольнаго порядка посредствомъ послѣдовательныхъ приведеній ихъ къ линейнымъ уравненіямъ того-же порядка».

Протоколъ засѣданія 3-го апрѣля.

Присутствовали: В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, И. К. Шейдтъ, Д. М. Деларю, П. М. Рудневъ, А. А. Клюшниковъ и Г. В. Левицкій.

Предсѣдательствовалъ В. Г. Имшенецкій.

Доложены письма профессора Гуэля и секретаря московскаго политехническаго общества.

А. А. Клюшниковъ сообщилъ замѣтку по поводу предложеннаго г. Грузинцевымъ аналитическаго вывода формулъ для выраженія упругой силы.

Г. В. Левицкій сообщилъ замѣтку о статьѣ, подъ заглавіемъ: «Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie», помѣщенной д-ромъ Гинтеромъ въ Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1 Heft. 1881.

К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе объ основномъ предложеніи проективной геометріи, въ дополненіе къ сообщенію, сдѣланному имъ 27-го ноября 1880 года.

Приложенiе.

ЗАМѢТКА

по поводу статьи г. проф. Гюнтера:

объ одной задачѣ сферической астрономiи (Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1881. 1).

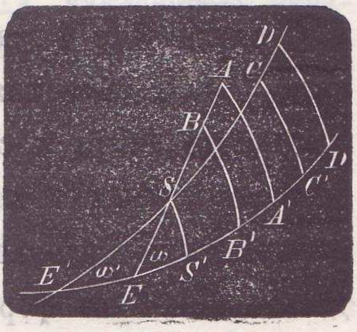
Г. В. Левицкаго.

Въ статьѣ, заглавiе которой выписано выше, авторъ даетъ рѣшенiе слѣдующей задачи сферической тригонометрiи:

«Опредѣлить сферическiя координаты точекъ пересѣченiя двухъ большихъ круговъ, изъ которыхъ первый проходитъ черезъ одну, а второй черезъ другую пару точекъ, сферическiя координаты которыхъ извѣстны».

Задачи, сходныя съ этой, встрѣчаются въ сферической астрономiи и обыкновенно легко рѣшаются по формуламъ сферической тригонометрiи. Но въ данномъ случаѣ, по мнѣнiю г. Гюнтера, формулы эти повели бы къ весьма сложнымъ вычисленiямъ. Поэтому г. Гюнтеръ рѣшилъ вопросъ съ помощью аналитической геометрiи и получилъ формулы, для приведенiя которыхъ къ логариѳмическому виду потребовалось 13 вспомогательныхъ величинъ.

Легко между тѣмъ показать, что и разсматриваемая задача весьма просто рѣшается тригонометрически, причемъ не только выводъ формулъ становится значительно короче, но и результаты получаются прямо въ логариѳмическомъ видѣ.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B, C и D — тѣ извѣстныя точки, черезъ которыя проходятъ упомянутые большіе круги, S — одна изъ точекъ ихъ пересѣченія (причемъ, очевидно, достаточно искать координаты одной изъ двухъ точекъ). Пусть затѣмъ E и E' суть точки пересѣченія большихъ круговъ AB и CD съ фундаментальнымъ большимъ кругомъ $E'D'$ (эклиптикой или экваторомъ и прч.). Назовемъ затѣмъ

для точекъ	A	B	C	D	S	E	E'
ихъ сферич. координаты, напр. долготы и широты,	l_1	l_2	l_3	l_4	l	x	x_1
соотвѣтственно черезъ:	b_1	b_2	b_3	b_4	b	0	0.

Опустивъ изъ точекъ A, B, C, D и S перпендикулярныя дуги на большой кругъ $E'D'$ и называя черезъ ω и ω_1 наклонности большихъ круговъ AB и CD къ $E'D'$, изъ треугольниковъ

AEA', BEB', $CE'C'$, $DE'D'$ получимъ:

$$1)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} b_1 = \sin(l_1 - x)\operatorname{tg}\omega; & \operatorname{tg} b_3 = \sin(l_3 - x_1)\operatorname{tg}\omega_1 \\ \operatorname{tg} b_2 = \sin(l_2 - x)\operatorname{tg}\omega; & \operatorname{tg} b_4 = \sin(l_4 - x_1)\operatorname{tg}\omega_1 \end{cases}$$

Откуда получаемъ:

$$2)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{l_2+l_1}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{l_2-l_1}{2}\right) \cdot \dfrac{\sin(b_2+b_1)}{\sin(b_2-b_1)} \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{l_4+l_3}{2} - x_1\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{l_4-l_3}{2}\right) \cdot \dfrac{\sin(b_4+b_3)}{\sin(b_4-b_3)} \end{cases}$$

Подобнымъ же образомъ изъ треугольниковъ $SE'S'$, SES' получимъ:

$$3)\quad \operatorname{tg} b = \sin(l - x)\operatorname{tg}\omega = \sin(l - x_1)\operatorname{tg}\omega_1$$

откуда:

$$4)\quad \operatorname{tg}\left(l - \frac{x+x_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x_1-x}{2}\,\frac{\sin(\omega_1+\omega)}{\sin(\omega_1-\omega)}.$$

Формулы 3 и 4 даютъ искомыя координаты точки S, а формулы 1 и 2 опредѣляютъ величины x и x_1, ω и ω_1. Хотя послѣднія величины и суть вспомогательныя, но онѣ получаются по самой сущности задачи, а не вводятся лишь для приданія формуламъ логариѳмическаго вида. Численное вычисленіе координатъ l и b по формуламъ 1, 2, 3 и 4-й производится гораздо скорѣе, чѣмъ по формуламъ г. Гюнтера.

Разсмотрѣнная задача разрѣшена была болѣе трехъ столѣтій тому назадъ М. Мэстлиномъ, который, не имѣя никакихъ астрономическихъ инструментовъ, опредѣлилъ положеніе новой звѣзды 1572 года съ точностью, равною точности тогдашнихъ наблюденій, помощью натянутой нити. Вращая передъ глазомъ эту нить такъ, чтобы она закрывала опредѣляемую звѣзду, Мэстлинъ находилъ, одну за другою, двѣ пары извѣстныхъ звѣздъ, покрывающихся нитью одновременно съ опредѣляемою звѣздой. Вычисленіе координатъ звѣзды изъ такихъ наблюденій, при тогдашнихъ средствахъ анализа, было весьма затруднительно, и послѣ продолжительныхъ вычисленій Мэстлинъ нашелъ:

$$l = 37^\circ 3'$$
$$b = 53^\circ 39'^{*}.$$

По приведеннымъ же выше формуламъ вычисленіе производится въ нѣсколько минутъ. Вычисляя съ четырехзначными логариѳмами и интерполируя пятый знакъ, я получилъ:

$$l = 37^\circ\ 2'.3$$
$$b = 53^\circ\ 38'.4$$

что совершенно согласно съ координатами Мэстлина.

Аргеландеръ изъ сравненія всѣхъ наблюденій надъ новою звѣздою 1572 г. нашелъ для эпохи 1573 г.

$$\alpha = 0^\circ\ 28'\ 6''3$$
$$\delta = +61^\circ\ 46'\ 22''8$$

* *Delambre,* Histoire de l'astronomie moderne, T. I, стр. 195.

Принимая, приближенно, для этой эпохи наклонность экватора къ эклиптикѣ равною $23^\circ 30'$, получаемъ:

$$l = \quad 36^\circ 53'$$
$$b = +53^\circ 45'.$$

Разница между этими числами и числами Мэстлина не выходитъ изъ предѣловъ погрѣшностей большинства современныхъ Мэстлину наблюденій.

Примѣчаніе. Болѣе мѣсяца спустя послѣ того, какъ настоящая замѣтка была прочитана въ засѣданіи харьковскаго математическаго общества, г. проф. Вейссъ помѣстилъ въ 3-й книжкѣ Zeitschrift für Mathem. u. Physik рѣшеніе Мэстлиновой задачи, сходное съ тѣмъ, которое приведено выше.