ЗАМѢНА ПЕРЕМѢННЫХЪ,

КАКЪ СПОСОБЪ ДЛЯ РАЗЫСКАНІЯ ИНТЕГРИРУЮЩАГО МНОЖИТЕЛЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ И КАКЪ СРЕДСТВО ДЛЯ ПОНИЖЕНІЯ ПОРЯДКА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Проф. *В. П. Ермакова**.

I.

Кіевъ. 14 Декабря 1880.

«.... Часто приходится преобразовывать дифференціальныя уравненія къ новымъ перемѣннымъ. Случается иногда, что формулы преобразованія содержатъ произвольныя постоянныя, которыя не входятъ ни въ данныя, ни въ преобразованныя уравненія. Этимъ обстоятельствомъ всегда можно воспользоваться для уменьшенія числа перемѣнныхъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда дано или уравненіе съ частными производными, или система какихъ бы то ни было совокупныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка».

«Общее правило, съ нѣкоторыми, впрочемъ, ограниченіями для уравненій съ частными производными, слѣдующее: *число пере-*

* Настоящее сообщеніе извлечено мною изъ нѣсколькихъ писемъ ко мнѣ профессора университета Св. Владиміра *В. П. Ермакова* и изъ моихъ отвѣтовъ на эти письма. Изложеніе, принадлежащее г. Ермакову, въ отличіе моего собственнаго, отмѣчено знаками «....»

В. Имшенецкій.

мѣнныхъ всегда можетъ быть уменьшено на столько единицъ, сколько произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія».

«Система обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка можетъ быть приведена къ квадратурамъ, если число уравненій равно числу произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія».

«Что касается дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$Mdx + Ndy = 0,$$

то положимъ, что это уравненіе, послѣ преобразованія по формуламъ:

$$\varphi(x, y, c) = z, \quad \psi(x, y, c) = s,$$

не будетъ содержать произвольнаго постояннаго c. Въ такомъ случаѣ можно показать, что интегральный множитель даннаго уравненія будетъ:

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{M\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial c}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial c}\right) + N\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial c} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial c}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)}\text{»}.$$

«Такъ, напримѣръ, однородное уравненіе не измѣняется послѣ преобразованія по формуламъ:

$$cx = z, \quad cy = s;$$

слѣдовательно интегральный множитель однороднаго уравненія будетъ:

$$\frac{c}{Mx + Ny}\text{»}.$$

«Если дифференціальное уравненіе не измѣняется при поворачиваніи прямоугольныхъ осей на произвольный уголъ, то его интегральный множитель будетъ:

$$\frac{1}{My - Nx}\text{»}.$$

II.

Харьковъ. 27 Декабря 1880.

...Прежде чѣмъ отвѣчать на Ваше письмо отъ 14 декабря я попытался найти доказательство данной Вами формулы множителя интегрируемости уравненія

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

которое, послѣ преобразованія по формуламъ:

$$\varphi(x, y, c) = z \text{ и } \psi(x, y, c) = s, \tag{2}$$

не должно содержать въ себѣ произвольнаго постояннаго c.

Для этого полагая, что

$$f(x, y, c) = \text{Const.} \tag{3}$$

есть интегралъ (1), будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f}{dx} = \mu . M \text{ и } \frac{\partial f}{dy} = \mu . N, \tag{4}$$

если μ означаетъ множитель интегрируемости уравненія (1).

Но если, согласно предположенію, послѣ преобразованія уравненія (1), помощію формулъ (2), въ преобразованное уравненіе не войдетъ c, то оно не должно входить также и въ интегралъ этого уравненія. Интегралъ же этотъ можно получить посредствомъ исключенія x и y изъ уравненій (2) и (3), при чемъ, въ силу только-что сдѣланнаго замѣчанія, должно исключиться также и c. Слѣдовательно, функція f, входящая въ (3), должна имѣть способность выражаться посредствомъ однихъ только перемѣнныхъ z и s, безъ помощи c, или, что то-же — посредствомъ функцій φ и ψ, входящихъ во (2). Для этого, какъ извѣстно, необходимо должно быть выполнено тождественно условіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial c} \end{vmatrix} = 0,$$

которое, на основанiи уравненiй (4), принимаетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} \mu M, & \mu N, & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial c} \end{vmatrix} = 0,$$

а отсюда находимъ:

$$\mu = - \frac{\frac{\partial f}{\partial c}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{M\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial c} - \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)}. \quad (5)$$

Формула множителя интегрируемости (5) отличается отъ данной Вами только множителемъ $\frac{\partial f}{\partial c}$, который однако, кажется, препятствуетъ по извѣстнымъ φ и ψ вычислять μ a priori, т. е. не зная f.

Правда, что обѣ формулы для μ сдѣлаются совершенно одинаковыми, если уравненiе (4) предположимъ вида:

$$f(x, y) + c = \text{Const},$$

что представляется, по-видимому, возможнымъ, если c не входитъ въ M и N. Но противъ этого можно возразить, что самый интегрирующiй множитель μ, опредѣленный по данной Вами формулѣ, можетъ вводить c въ интегралъ уравненiя (1) неизвѣстно какимъ образомъ, такъ что интегралъ этотъ все таки необходимо предполагать вида (3).

III.

Кіевъ. 30 Декабря 1880.

«.... Въ математическихъ изслѣдованіяхъ сомнѣніе — великое дѣло, точность — тоже; виноватъ предъ Вами въ неточной формулировкѣ моего сообщенія. Позвольте здѣсь изложить какъ точное содержаніе самой теоремы, такъ и ея доказательство».

«Положимъ, что уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

не содержитъ произвольнаго постояннаго c.

Положимъ, что это уравненіе, послѣ преобразованія по формуламъ:

$$\varphi(x, y, c) = z, \quad \psi(x, y, c) = s, \qquad (2)$$

содержащимъ произвольное постоянное c, и послѣ умноженія или сокращенія на нѣкотораго множителя, также не будетъ содержать постояннаго c. Въ такомъ случаѣ уравненіе (1) имѣетъ извѣстный Вамъ интегральный множитель».

«Прежде чѣмъ приступить къ доказательству, припомнимъ, что если μ есть интегральный множитель уравненія (1), то всякій другой интегральный множитель приметъ форму $\mu\, f(v)$, гдѣ

$$dv = \mu M dx + \mu N dy. \qquad (3)$$

Положимъ, что уравненіе (1), послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ (2) и по сокращеніи или умноженіи на нѣкотораго множителя, приметъ форму:

$$Pdz + Qds = 0. \qquad (4)$$

Это уравненіе, по предположенію, также не содержитъ постояннаго c.

Принимая не только x и y, но и c за перемѣнное, дифференцируя въ этомъ предположеніи уравненія (2) и подставляя найденныя значенія для dz и ds въ уравненіе (4), получимъ:

$$\left(P\frac{d\varphi}{dx}+Q\frac{d\psi}{dx}\right)dx+\left(P\frac{d\varphi}{dy}+Q\frac{d\psi}{dy}\right)dy+$$

$$+\left(P\frac{d\varphi}{dc}+Q\frac{d\psi}{dc}\right)dc=0. \quad (5)$$

Если мы въ этомъ послѣднемъ уравненіи положимъ $dc=0$, то полученное уравненіе должно быть тождественно съ уравненіемъ (1) или отличаться отъ него на нѣкоторый множитель, слѣдовательно:

$$P\frac{d\varphi}{dx}+Q\frac{d\psi}{dx}=MR, \quad P\frac{d\varphi}{dy}+Q\frac{d\psi}{dy}=NR.$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій P и Q, подставивъ найденныя значенія въ уравненіе (5) и сокративъ на R, получимъ:

$$Mdx+Ndy+\omega dc=0, \quad (6)$$

гдѣ для краткости положено:

$$-\frac{M\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dc}-\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dy}\right)+N\left(\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dc}\right)}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}}=\omega.$$

Пусть μ интегральный множитель уравненія (1), не содержащій постояннаго c; умножая уравненіе (6) на μ и принимая во вниманіе уравненіе (3), получимъ:

$$dv+\mu\omega dc=0. \quad (7)$$

Извѣстно, что линейное уравненіе съ тремя дифференціалами не всегда можетъ быть проинтегрировано при помощи одной зависимости между тремя перемѣнными. Въ настоящемъ случаѣ уравненіе (6), какъ происшедшее изъ (4), содержащаго двѣ перемѣнныя, можетъ быть проинтегрировано при помощи одной зависимости между x, y и c. Это возможно только въ томъ случаѣ, когда въ уравненіи (7) коэффиціентъ при dc есть нѣкоторая функція v и c,

$$\mu\omega=f(v,c),$$

откуда

$$\frac{\mu}{f(v,c)} = \frac{1}{\omega}.$$

Первая часть этого уравненія есть интегральный множитель уравненія (1) [если c постоянная величина], слѣдовательно $\frac{1}{\omega}$ есть также интегральный множитель уравненія (1), что и требовалось доказать[1].

---

[1] Въ дополненіе къ аргументаціи автора можно прибавить, что такъ-какъ уравненіе (6) должно интегрироваться посредствомъ одной зависимости между x, y и c, то должно быть выполнено извѣстное Эйлерово условіе интегрируемости:

$$M\left(\frac{\partial N}{\partial c} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + N\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial c}\right) + \omega\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0.$$

Но по условію $\frac{\partial M}{\partial c} = 0$ и $\frac{\partial N}{\partial c} = 0$; слѣдовательно имѣемъ:

$$N\frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega\frac{\partial N}{\partial x} = M\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega\frac{\partial M}{\partial y},$$

откуда, умноживъ обѣ части равенства на $\frac{1}{\omega^2}$, получимъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{N}{\omega}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{M}{\omega}\right)}{\partial y},$$

что и показываетъ, что $\frac{1}{\omega}$ есть множитель интегрируемости уравненія (1).

Отсюда обнаруживается еще слѣдующее интересное заключеніе: вообще, если трехчленное уравненіе

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy + \omega(x,y,z)\,dz = 0$$

допускаетъ интегралъ вида $\chi(x,y,z) = \text{const}$; то $\frac{1}{\omega}$ есть множитель интегрируемости дифференціальнаго уравненія

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0.$$

(*В. И.*)

Примѣръ 1. Уравненіе

$$\{x\varphi(x^2+y^2)+y\psi(x^2+y^2)\}\,dx+\{y\varphi(x^2+y^2)-x\psi(x^2+y^2)\}\,dy=0$$

при поворачиваніи осей на произвольный уголъ, т. е. послѣ преобразованія по формуламъ:

$$x\,\mathrm{Cos}\,c+y\,\mathrm{Sin}\,c=z,\quad x\,\mathrm{Sin}\,c-y\,\mathrm{Cos}\,c=s$$

не только не содержитъ постояннаго c, но даже не измѣняетъ формы. Его интегральный множитель

$$\frac{1}{My-Nx}=\frac{1}{(x^2+y^2)\,\psi(x^2+y^2)}.$$

Примѣръ 2. Уравненіе

$$\{\varphi(x+y)+y^2\}\,dx+\{\varphi(x+y)+x^2\}\,dy=0$$

послѣ преобразованія по формуламъ:

$$x+y=z,\ xy+c(x+y)=s$$

не содержитъ постояннаго c. Его интегральный множитель:

$$\frac{y-x}{(N-M)(x+y)}=\frac{-1}{(x+y)^2}.$$

«Позвольте исправить неточность въ прежнемъ моемъ письмѣ. Я писалъ Вамъ, что въ дифференціальныхъ уравненіяхъ число перемѣнныхъ можетъ быть уменьшено на столько единицъ, сколько произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія. Это — невѣрно. Если число произвольныхъ постоянныхъ въ формулахъ преобразованія означимъ черезъ n, то число перемѣнныхъ, которыя можно исключить изъ уравненій, равно или больше $\frac{n}{2}$ и меньше или равно n. Каноническія уравненія допускаютъ нѣкоторыя исключенія. Если формулы преобразованія каноническихъ уравненій содержатъ n произвольныхъ постоянныхъ, которыя не входятъ явно ни въ данныя, ни въ преобразованныя уравненія, то можно найти n интеграловъ каноническихъ уравненiй. Число перемѣнныхъ, которыя можно исключить изъ уравненiй, всегда четное и равно или больше n и меньше или равно $2n$. Это исключенiе всегда можно сдѣлать такъ, чтобы уравненiя съ уменьшеннымъ числомъ перемѣнныхъ были также каноническiя. Это доказано (т. е. исключенiе помощiю извѣстныхъ интеграловъ) *Майеромъ* и *Ли*.

«P. S. Я имѣю еще другое доказательство, различное отъ предъидущаго. Это доказательство относится впрочемъ къ уравненiямъ со многими перемѣнными и къ уравненiямъ съ частными производными; изъ него, какъ частный случай, слѣдуетъ доказанное (выше) предложенiе».

Примѣчанiе. Если M и N содержатъ постоянное c, то теорема не имѣетъ мѣста, ибо тогда уравненiе (7) превратилось бы въ слѣдующее:

$$dv + \left(\mu\omega - \frac{dv}{dc}\right) dc = 0».$$

IV.

Харьковъ. 6 Января 1881 г.

Я вполнѣ убѣдился Вашимъ доказательствомъ и вмѣстѣ съ тѣмъ замѣтилъ, что и мое доказательство Вашей теоремы также приводитъ къ цѣли съ помощiю слѣдующаго дополненiя.

Въ множителя интегрируемости μ даннаго уравненiя

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad (1)$$

всегда можно ввести произвольное постоянное c, не входящее въ M и N. Для этого, зная какой-нибудь множитель интегрируемости λ уравненiя (1), достаточно положить $\mu = \pi(\lambda, c)$, гдѣ π произвольная функцiя.

Слѣдовательно можно полагать:

$$\mu(Mdx + Ndy) = d.f(x, y, c), \qquad (2)$$

т. е. предполагать интегралъ уравненія (1) подъ видомъ:

$$f(x, y, c) = \text{Const} = a. \qquad (3)$$

Но дифференцируя (2) частнымъ образомъ въ отношеніи c, найдемъ:

$$\frac{\partial\mu}{\partial c}(Mdx + Ndy) = d \,.\, \frac{\partial f}{\partial c}. \qquad (4)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{\partial\mu}{\partial c}$ есть также интегрирующій множитель уравненія (1) и что

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \text{Const} = b$$

есть также интегралъ уравненія (1).

Поэтому необходимо функціи f и $\frac{\partial f}{\partial c}$ должны выражаться одна посредствомъ другой; это видно изъ того, что выраженіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \,.\, \frac{\partial f}{\partial c}}{\partial x}, & \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial c}}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu M, & \mu N \\ \frac{\partial\mu}{\partial c}\,.\,M, & \frac{\partial\mu}{\partial c} N \end{vmatrix} = M\,.\,N \begin{vmatrix} \mu, & \mu \\ \frac{\partial\mu}{\partial c}, & \frac{\partial\mu}{\partial c} \end{vmatrix}$$

тождественно равно нулю.

И такъ, если $\frac{\partial f}{\partial c} = \theta(f)$, то полученное въ первомъ моемъ письмѣ (II) выраженіе для

$$\frac{\mu}{\frac{\partial f}{\partial c}} \text{ или } \frac{\mu}{\theta(f)}$$

есть интегрирующій множитель уравненія (1), что и доказываетъ вашу теорему.

Мнѣ кажется, не лишено интереса слѣдующее упрощеніе какъ доказательства разсматриваемой теоремы, такъ и выраженія интегрирующаго множителя.

Данное дифференціальное уравненіе, не уменьшая его общности, можно взять подъ видомъ:

$$Mdx + dy = 0$$

и, предполагая, что въ его множителя интегрируемости μ введено произвольное постоянное c, не входящее въ M, положить:

$$\mu\,(Mdx + dy) = d.\,f\,(x, y, c).$$

Теперь допустимъ, что помощію зависимости

$$\varphi\,(x, y, c) = z$$

можно въ данномъ уравненіи замѣнить y на z, не вводя c въ преобразованное уравненіе

$$Pdx + Qdz = 0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія, не содержащій c, получится изъ интеграла

$$f\,(x, y, c) = \text{Const.}$$

предложеннаго уравненія, если изъ него можно исключить y вмѣстѣ съ c помощію зависимости $\varphi\,(x, y, c) = z$.

Для этого необходимо тождество

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}, & \dfrac{\partial f}{\partial c} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu, & \dfrac{\partial f}{\partial c} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial c} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имѣемъ

$$\frac{\mu}{\dfrac{\partial f}{\partial c}} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial c}}.$$

Такъ какъ $\dfrac{\partial f}{\partial c} = \Theta\,(f)$, то $\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial c}}$ есть интегрирующій множитель даннаго дифференціальнаго уравненія.

Эту упрощенную форму множителя можно конечно получить изъ данной выше, взявъ $x = s$ вмѣсто $\psi(x, y, c) = s$; но прямое доказательство гораздо проще.

Помощію упрощенной формулы множителя можно попытаться рѣшить общую задачу, какъ по данному M найдти Φ, или по крайней мѣрѣ обратную задачу: опредѣлить M по данному Φ.

Первая задача приводитъ къ очень сложному уравненію въ частныхъ производныхъ второго порядка, интегрированіе котораго не выполнимо; напротивъ, обратная задача легко разрѣшается. Это показываетъ, что можно дать неограниченное число примѣровъ дифференціальныхъ уравненій интегрируемыхъ по этому способу; можно даже всякое дифференціальное уравненіе перваго порядка съ 2-мя перемѣнными, уже проинтегрированное, подготовить потомъ такъ, чтобы оно интегрировалось также и по предъидущему способу.

Примѣчаніе. Въ моемъ письмѣ я ограничился предыдущими указаніями, по этому и здѣсь я не привожу доказательства моихъ послѣднихъ утвержденій, выводъ которыхъ впрочемъ довольно простъ.

V.

Кіевъ. 13 Января 1881.

«Весьма радъ, что Вы заинтересованы моимъ сообщеніемъ. Совершенно вѣрно, что Вашъ пріемъ приводитъ также къ искомому доказательству. Удивительно, какъ раньше ни Вы въ первомъ письмѣ, ни я, прочитавши его, не догадались, что если

$$f(x, y, c) = \text{постоянному}$$

есть интегралъ дифференціальнаго уравненія не содержащаго c, то

$$\frac{df}{dc} = \text{постоянному}$$

есть также интегралъ того-же уравненія».

«Досадно становится на самого себя, что я, будучи уже увѣренъ въ вѣрности теоремы, забылъ о томъ, что каковъ бы ни былъ путь, выбранный нами для доказательства извѣстной истины, разъ этотъ путь строгъ и вѣренъ, онъ долженъ непремѣнно привести къ искомому доказательству».

«Ваше доказательство привело меня къ мысли о существованіи еще новаго третьяго доказательства. Спѣшу сообщить это доказательство. Оно передъ извѣстными двумя имѣетъ то преимущество, что весьма легко можетъ быть примѣнено и къ системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка».

«Положимъ, какъ и прежде, что дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0, \qquad (1)$$

не содержащее постояннаго c, послѣ преобразованія по формуламъ

$$\Phi(x, y, c) = z, \psi(x, y, c) = s \qquad (2)$$

не будетъ также содержать постояннаго c. Пусть

$$f(x, y) = \text{постоянному}$$

есть интегралъ уравненія (1), положимъ, что $f(x, y)$ не содержитъ c. Если мы въ это уравненіе подставимъ вмѣсто x и y ихъ значенія изъ уравненій (2), то получимъ интегралъ преобразованнаго уравненія; такъ-какъ по условію преобразованное уравненіе не содержитъ постояннаго c, то

$$\frac{df}{dc} = \text{постоянному}$$

есть также интегралъ преобразованнаго уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{df}{dc} = \theta(f).$$

Взявъ на самомъ дѣлѣ производную по c въ томъ предположеніи, что x и y суть функціи c, получимъ послѣднее уравненіе въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dc}=\Theta(f). \qquad (3)$$

Если мы положимъ, что

$$\int\frac{df}{\Theta(f)}=\phi,$$

то уравненіе (3) можно привести къ виду:

$$\frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{d\phi}{dy}\frac{dy}{dc}=1. \qquad (4)$$

Легко видѣть, что ϕ = постоянному есть интегралъ уравненія (1); слѣдовательно функція ϕ должна удовлетворять уравненію:

$$N\frac{d\phi}{dx}-M\frac{d\phi}{dy}=0.$$

Рѣшая послѣднее уравненіе совмѣстно съ (4), получимъ:

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{M}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}},\quad \frac{d\phi}{dy}=\frac{N}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}},$$

откуда:

$$d\phi=\frac{Mdx+Ndy}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}}.$$

Отсюда мы видимъ, что

$$\frac{1}{M\frac{dx}{dc}+N\frac{dy}{dc}} \qquad (5)$$

есть интегральный множитель уравненія (1); въ этомъ выраженіи вмѣсто $\frac{dx}{dc}$ и $\frac{dy}{dc}$ нужно подставить ихъ значенія изъ уравненій (2), т. е. изъ уравненій:

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{d\varphi}{dc}=0,\quad \frac{d\psi}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{d\psi}{dc}=0.$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій на самомъ дѣлѣ $\frac{dx}{dc}$ и $\frac{dy}{dc}$ и подставивъ найденныя значенія въ выраженіи (5), получимъ интегральный множитель въ извѣстной уже формѣ.

Наша теорема не имѣетъ мѣста въ томъ случаѣ, когда знаменатель

$$M\left(\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dc}\right)+N\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dc}-\frac{d\varphi}{dc}\frac{d\psi}{dx}\right)$$

тождественно обращается въ нуль. Можно легко показать, что въ этомъ случаѣ искомый интегралъ уравненія (1) получается, если мы изъ уравненій (2) исключимъ c и въ результатѣ исключенія вмѣсто z и s подставимъ произвольныя постоянныя».

«Легко видѣть, что формулы (2), если только при помощи ихъ нѣкоторое дифференціальное уравненіе, не содержащее c, можетъ быть преобразовано въ другое, также не содержащее c, не могутъ быть произвольны; какимъ-же условіемъ они ограничены? Хотя въ математикѣ и неприлично проводить теоремы, не зная ихъ доказательствъ, но на этотъ разъ я отступаю отъ законовъ приличій. Я полагаю, что вѣроятно формулы (2) могутъ быть приведены къ виду:

$$f_1(x,y)+\Phi(c)=\Phi_1(z,s),\quad f_2(x,y)=\Phi_2(z,s).$$

Легко примѣнить данное выше доказательство къ системѣ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots$$

Положимъ, что эти уравненія не содержатъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ и формулами преобразованія, содержащими эти постоянныя, приводятся къ новымъ уравненіямъ, которыя постоянныхъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ не заключаютъ.

Подобно тому, какъ прежде, вопросъ можно привести къ опредѣленію функціи Φ, удовлетворяющей уравненію

$$X_1\frac{d\Phi}{dx_1}+X_2\frac{d\Phi}{dx_2}+X_3\frac{d\Phi}{dx_3}+\ldots=0 \qquad (6)$$

и одному изъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\Phi}{dx_1}\frac{dx_1}{dc_1}+\frac{d\Phi}{dx_2}\frac{dx_2}{dc_1}+\ldots=a_1\\ \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{dx_1}{dc_2}+\frac{d\Phi}{dx_2}\frac{dx_2}{dc_2}+\ldots=a_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(7)$$

каждое изъ послѣднихъ уравненій въ отдѣльности имѣетъ общее рѣшеніе съ (6), но всѣ вмѣстѣ уравненія таковаго рѣшенія могутъ не имѣть. Основываясь на извѣстномъ методѣ Якоби для интегрированія уравненія съ частными производными (Пятая глава Вашего сочиненія: Sur l'integration des équations aux derivées partielles du premier ordre) можно составить нѣсколько новыхъ линейныхъ уравненій съ частными производными, число которыхъ всегда больше половины числа уравненій (7), такимъ образомъ, что эти новыя уравненія совмѣстно съ уравненіемъ (6) будутъ имѣть общее рѣшеніе. И такъ, задача приведется къ интегрированію нѣсколькихъ линейныхъ уравненій съ частными производными. Относительно этихъ уравненій Mayer доказалъ въ Mathematische Annalen (томъ V, 1872 года) слѣдующее:

«Система n линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка съ m перемѣнными можетъ быть приведена къ интегрированію одного линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка съ $m-n+1$ перемѣнными».

«Это послѣднее уравненіе въ свою очередь приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій; число перемѣнныхъ въ этой новой системѣ на $n-1$ меньше числа перемѣнныхъ данной системы».

P. S. Это новое доказательство по идеѣ и по сущности мало чѣмъ отличается отъ Вашего.

VI*.

Кіевъ. 8 Февраля 1881.

«Послѣ моего третьяго письма къ Вамъ профессоръ лейпцигскаго университета *Майеръ* въ письмѣ ко мнѣ указалъ на тѣсную связь моей теоремы съ изслѣдованіемъ *Ли* въ XI томѣ Mathematische Annalen (Infinitisimale Transformationen, стр. 490). Сущность теоремы Ли можно выразить слѣдующимъ образомъ».

«Если при варіированіи по формуламъ

$$\delta x = \xi \delta t, \quad \delta y = \eta \delta t,$$

въ которыхъ ξ и η суть нѣкоторыя функціи x и y, варіяція первой части дифференціальнаго уравненія

$$Mdx + Ndy = 0$$

исчезаетъ, т. е. само дифференціальное уравненіе не измѣняется, то

$$\frac{1}{M\xi + N\eta}$$

есть интегральный множитель уравненія».

«Эту теорему Ли тамъ-же распространилъ на уравненія со многими перемѣнными и на уравненія съ частными производными перваго порядка».

---

* Это письмо получено во время печатанія предыдущихъ. *(В. И.)*.