О МНОГОУГОЛЬНИКАХЪ ПОНСЕЛЕ.

(Статья первая).

К. А. Андреева.

§ 1.

Извѣстно, что Понселе ввелъ въ число способовъ доказательства геометрическихъ предложенiй примѣненiе особаго принципа, названнаго имъ *принципомъ непрерывности* (principe de continuité). Многiе геометры, и въ томъ числѣ Мишель Шаль, находили этотъ способъ не достаточно строгимъ и не соотвѣтствующимъ духу геометрiи. Въ предисловiи къ своей «Высшей геометрiи» Шаль говоритъ, что хотя онъ и не возражаетъ противъ этого способа, котораго геометру-изслѣдователю не слѣдуетъ лишать себя безусловно, но тѣмъ не менѣе находитъ, что употребленiе этого прiема въ такомъ сочиненiи какъ его книга, назначенная для изложенiя принциповъ и методовъ чисто геометрическихъ, не должно быть допущено по многимъ причинамъ.

Мы не имѣемъ намѣренiя входить здѣсь въ разсмотрѣнiе сущности и характера принципа непрерывности, но чтобы сдѣлать понятными причины, по которымъ Шаль отказывается отъ его употребленiя, скажемъ нѣсколько словъ о томъ, когда и какъ онъ примѣняется.

Части одной и той-же геометрической фигуры могутъ находиться между собою въ такой зависимости, что по однимъ изъ нихъ можно опредѣлить построенiемъ другiя. Такъ напримѣръ, зная стороны четыреугольника, найдемъ его дiагонали; зная окружность и какую нибудь точку въ ея плоскости, найдемъ касательныя къ этой окружности, проходящія чрезъ эту точку, и т. д.

Если будемъ разсматривать фигуру лишь съ точки зрѣнія зависимости между ея частями и, слѣдовательно, допустимъ возможность измѣненія расположенія этихъ частей, то можемъ встрѣтиться со случаемъ, когда нѣкоторыя изъ частей, существующія при одномъ расположеніи остальныхъ, совершенно исчезаютъ при другомъ. Такія части фигуры называются *случайными* (parties contingentes). Такъ, разсматривая точку и окружность какъ принадлежащія одной фигурѣ, будемъ имѣть, что касательныя изъ этой точки къ этой окружности суть случайныя части этой фигуры. Самый фактъ существованія случайныхъ частей представляетъ *случайное свойство фигуры* (propriété contingente).

Если случайныя части фигуры входятъ въ составъ данныхъ, на которыхъ основывается построеніе, доказывающее какое нибудь геометрическое предложеніе, то въ случаѣ исчезновенія этихъ частей построеніе становится невозможнымъ, а потому и самое предложеніе остается для этого случая не доказаннымъ, хотя отсюда и не слѣдуетъ, что оно перестаетъ быть справедливымъ. Чтобы убѣдиться, что предложеніе справедливо вообще, т. е. не зависимо отъ расположенія частей фигуры, приходится поэтому избрать одно изъ двухъ — или совершенно отказаться отъ прежняго доказательства и отыскать другое, не основывающееся на случайныхъ свойствахъ фигуры, или установить общій законъ, въ силу котораго можно было бы заключать, что предложеніе, доказанное для случая существованія случайныхъ частей, справедливо и въ случаѣ ихъ исчезновенія. Существованіе этого закона выясняется изъ приложеній анализа, и Понселе придаетъ ему принципіальное значеніе; въ этомъ — его *принципъ непрерывности.* Шаль, напротивъ, предпочитаетъ первое изъ указанныхъ направленій, т. е. изысканіе особыхъ общихъ доказательствъ. Вотъ въ чемъ, по его словамъ, заключаются причины этого предпочтенія.

«Прежде всего, *принципъ непрерывности* не доказанъ *a priori*, а потому, пользуясь имъ какъ *аксiомою* или *постулатомъ*, мы удаляемся отъ строгой точности, составляющей существенную особенность и, можно сказать, преимущество математическихъ наукъ вообще, главнымъ же образомъ геометрiи».

«Сверхъ того, при посредствѣ этого принципа, хотя бы онъ и былъ доказанъ со всею строгостью, мы не получаемъ прямого доказательства единственно удовлетворительнаго для нашего ума; при употребленiи этого косвеннаго прiема всегда остается въ вопросѣ какой то пробѣлъ и какъ бы нѣчто, требующее дальнѣйшихъ изслѣдованiй».

«Но существуютъ еще другiя болѣе важныя соображенiя, въ силу которыхъ я не пользуюсь, говоритъ Шаль, тѣми облегченiями доказательствъ, которыя часто представляетъ употребленiе принципа непрерывности. Внимательное изученiе способовъ доказательства, возможныхъ въ примѣненiи къ одному и тому же вопросу, убѣдило меня, что на ряду съ легкимъ сравнительно доказательствомъ, основывающемся на случайныхъ свойствахъ фигуры, всегда должны существовать другiя, основывающiяся на ея постоянныхъ свойствахъ, т. е. сохраняющихся во всѣхъ случаяхъ, какiе можетъ представлять фигура въ виду возможнаго разнообразiя въ расположенiи ея частей. При этомъ я узналъ по опыту, что разысканiе этихъ вполнѣ строгихъ доказательствъ тѣмъ болѣе полезно, что оно необходимымъ образомъ приводитъ насъ къ чрезвычайно важнымъ предложенiямъ, устанавливающимъ тѣ связи, которыя должны существовать между отдѣльными частями одного и того же научнаго предмета»....

«Эти доказательства становятся столь же легкими, какъ и первыя, если только для нихъ подготовленъ путь при помощи предложенiй извѣстнаго характера, предложенiй, основывающихся на постоянныхъ свойствахъ разсматриваемой фигуры, а не только на свойствахъ случайныхъ»....

«Знать эти предложенія въ высшей степени важно, такъ какъ они чрезвычайно богаты слѣдствіями и способны дать геометріи ту же степень общности, которая составляетъ силу анализа»[1]...

И такъ, признавая, что примѣненіе принципа непрерывности дѣлаетъ часто доказательства геометрическихъ предложеній сравнительно легкими, Шаль тѣмъ не менѣе находитъ употребленіе его въ теоріяхъ достаточно разработанныхъ совершенно излишнимъ. Ссылаясь на собственный опытъ, онъ утверждаетъ, что всякій разъ какъ предложеніе доказано при помощи принципа непрерывности, оно можетъ быть доказано, и притомъ не менѣе легко, и безъ его посредства, но при посредствѣ особыхъ подготовительныхъ чисто геометрическихъ предложеній или теорій, имѣющихъ въ наукѣ чрезвычайно важное значеніе.

Чтобы видѣть яснѣе, какъ слѣдуетъ понимать это мнѣніе Шаля, возьмемъ для примѣра слѣдующее предложеніе.

Поляры всѣхъ точекъ прямой линіи относительно какого нибудь коническаго сѣченія проходятъ черезъ одну точку, полюсъ этой прямой.

Можно было бы разсматривать сперва только точки, лежащія внѣ коническаго сѣченія, для каждой изъ которыхъ поляра есть хорда, соединяющая точки прикосновенія, и доказать предложеніе лишь для этихъ точекъ. Затѣмъ, имѣя въ виду, что существованіе касательныхъ къ коническому сѣченію изъ какой либо точки есть свойство случайное, можно въ силу принципа непрерывности признать предложеніе справедливымъ вообще.

Но съ другой стороны можно потребовать, чтобы самое понятіе о полярѣ основывалось не на случайныхъ свойствахъ и, слѣдовательно, установить первоначально *общія основанія* ученія о полюсахъ и полярахъ. Эти общія основанія являются въ

[1] Chasles (M.) — « Traité de Géométrie Supérieure » — Paris, 2-e éd., 1880. Préface, p. XVI — XVII.

настоящемъ примѣрѣ тѣми подготовительными предложеніями, о которыхъ говоритъ Шаль.

Извѣстно, что ученіе о полюсахъ и полярахъ коническихъ сѣченій имѣетъ чрезвычайно важное значеніе въ геометрической теоріи этихъ кривыхъ и взятое нами для примѣра предложеніе представляетъ въ этомъ прекрасномъ ученіи только одно, такъ сказать, звено.

И такъ, изъ приведеннаго примѣра мы видимъ, какую роль могутъ играть подготовительныя геометрическія предложенія, которыми Шаль считаетъ всегда возможнымъ замѣнить ссылку на принципъ непрерывности. Они не только обнаруживаютъ связь между отдѣльными частями научнаго предмета, но и выясняютъ часто, какое мѣсто и значеніе слѣдуетъ придавать самимъ разсматриваемымъ вопросамъ въ той или другой геометрической теоріи.

Не имѣя намѣренія выражать здѣсь какое либо собственное сужденіе по вопросу о примѣненіи принципа непрерывности, вопросу спорному въ геометріи и бывшему въ свое время предметомъ продолжительныхъ и многосторонныхъ обсужденій, мы полагаемъ цѣлью настоящей замѣтки найдти провѣрку и, если можно, подтвержденіе приведеннаго выше мнѣнія Шаля на одномъ предложеніи, давно уже извѣстномъ и представляющемъ во многихъ отношеніяхъ большой интересъ, именно на предложеніи о многоугольникахъ *Понселе*.

§ 2.

Еще находясь въ русскомъ плѣну, въ Саратовѣ, Понселе составилъ мемуаръ, содержащій рядъ предложеній о многоугольникахъ, вписанныхъ въ коническія сѣченія и описанныя около нихъ. Мемуаръ этотъ назначался быть представленнымъ въ петербургскую академію наукъ, но заключеніе мира въ 1814 году и возвращеніе Понселе на родину измѣнили это намѣреніе.

Только въ 1822 году публикованы были эти изслѣдованія Понселе, войдя въ составъ его извѣстнаго трактата о проективныхъ свойствахъ фигуръ. Заключительный выводъ этихъ изслѣдованій можно формулировать такъ:

Если какой либо многоугольникъ вписанъ въ одно коническое сѣченіе и описанъ около другаго, то онъ можетъ перемѣщаться непрерывно, не лишаясь этого отношенія къ обоимъ коническимъ сѣченіямъ, т. е. оставаясь вписаннымъ въ первое и описаннымъ около втораго.

Выводъ этотъ есть прямое слѣдствіе каждаго изъ двухъ слѣдующихъ взаимныхъ предложеній, которыя мы и будемъ называть въ дальнѣйшемъ изложеніи предложеніями о многоугольникахъ Понселе.

1) *Если всѣ вершины какого нибудь простаго многоугольника перемѣщаются по коническому сѣченію, а всѣ стороны кромѣ одной огибаютъ другое коническое сѣченіе, то послѣдняя сторона будетъ перемѣщаться, огибая третье коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія двухъ первыхъ.*

2) *Если всѣ стороны какого либо простаго многоугольника перемѣщаются, огибая одно коническое сѣченіе, а всѣ вершины кромѣ одной скользятъ по другому коническому сѣченію, то послѣдняя вершина будетъ перемѣщаться по третьему коническому сѣченію, касающемуся общихъ касательныхъ двухъ первыхъ.*

Доказательство (геометрическое) этихъ предложеній, которое даетъ Понселе въ своемъ «Traité des proргiétés projectives des figures», относится непосредственно только къ окружностямъ; на случай же какихъ нибудь коническихъ сѣченій оно распространяется ссылкою на принципъ непрерывности. Кромѣ того мы встрѣчаемся въ этомъ доказательствѣ съ особеннымъ пріемомъ, не вполнѣ удовлетворяющимъ строгой геометрической точности; именно съ отождествленіемъ безконечно малаго перемѣщенія прямыхъ, огибающихъ окружности, съ вращеніемъ этихъ прямыхъ около неподвижныхъ точекъ[1].

Шаль доказалъ эти предложенія также только для окружностей[2], и хотя считаетъ свое доказательство видоизмѣненіемъ доказательства Понселе, но это видоизмѣненіе относится только къ внѣшности дѣла; основанія же разсужденій остаются тѣ же самыя. Здѣсь также приходится имѣть дѣло съ безконечно малымъ перемѣщеніемъ, причемъ дуги круга заключающіяся между сторонами безконечно малаго угла принимаются пропорціональными хордамъ, ихъ стягивающимъ.

Такое, хотя и не вполнѣ явное, пользованіе методомъ безконечно малыхъ дѣлаетъ оба доказательства относящимися къ области геометріи болѣе возвышенной, чѣмъ та, которой принадлежатъ сами доказываемыя предложенія по своему содержанію и значенію.

Намъ кажется, что само содержаніе этихъ предложеній указываетъ границы, внутри которыхъ должны находиться наиболѣе простыя и естественныя, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вполнѣ достаточныя, средства для ихъ доказательства. Границы эти опредѣляются слѣдующими двумя заключеніями:

1) Предложенія Понселе выражаютъ *проективное свойство* коническихъ сѣченій; поэтому доказательство ихъ не должно включать въ себѣ никакихъ пріемовъ кромѣ методовъ составляющихъ основаніе и сущность проективной геометріи.

---

[1] *Poncelet (J. V.)* — «Traité des propriétés projectives des figures» — 2-e éd. Paris, 1865, t. I, p. 311—318.

[2] *Chasles* (*M.*) — «Traité des Géométrie Supérieure» — 2-e éd. Paris, 1880, p. 486—489.

2) Предложенія эти выражаютъ *свойство дескриптивное*, т. е. связь между частями фигуры, обусловливаемую исключительно построеніемъ; по этому доказательство ихъ должно быть такимъ же, т. е. въ немъ вовсе нѣтъ надобности прибѣгать къ понятію и величинѣ и какимъ бы то ни было метрическимъ соотношеніямъ.

Намъ неизвѣстно ни одного доказательства предложеній Понселе, которое удовлетворяло бы вполнѣ этимъ двумъ условіямъ, а между тѣмъ найдти такое доказательство было бы весьма интересно хотя бы только въ видахъ подтвержденія мнѣнія Шаля, о которомъ говорилось выше. Доказательство, которое мы предлагаемъ ниже, есть, кажется, первая попытка въ этомъ родѣ.

Такъ какъ ученіе о полюсахъ и полярахъ коническихъ сѣченій включаетъ въ себѣ самыя общія основанія теоріи этихъ кривыхъ и само основывается лишь на элементарныхъ понятіяхъ проективной геометріи, то во всемъ слѣдующемъ мы будемъ имѣть въ виду, какъ исходный пунктъ нашихъ разсужденій, именно это ученіе, т. е. будетъ предполагать, что читателю извѣстны главныя полярныя свойства коническихъ сѣченій и понятіе о такъ называемыхъ взаимныхъ полярахъ.

Чтобы заранѣе указать границы нашей задачи, замѣтимъ, что изъ двухъ приведенныхъ выше взаимныхъ предложеній Понселе мы будемъ говорить только о первомъ, такъ какъ все, что относительно его будетъ сказано, распространяется извѣстнымъ образомъ и на второе въ силу закона двойственности. Сверхъ того мы не будемъ разсматривать многоугольниковъ съ какимъ бы ни было числомъ сторонъ, а ограничимся на первый разъ случаемъ треугольника. Обобщеніе же предложенія на случай произвольнаго числа сторонъ мы надѣемся изложить впослѣдствіи. Наконецъ, мы исключимъ на время изъ нашихъ разсужденій частный случай коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе.

Не лишнее будетъ замѣтить, что, пользуясь названіемъ *случайныя части* (parties contingentes) и различая существованіе и несуществованіе этихъ частей, мы можемъ во всемъ слѣдующемъ устранить названія *мнимыя точки*, *мнимыя прямыя*, заимствованныя изъ Анализа и совершенно нежелательныя въ теоріяхъ, не пользующихся его приложеніемъ.

§ 3.

Положимъ, что мы имѣемъ два коническія сѣченія S и T (фиг. 1-я). Возьмемъ на первомъ изъ нихъ какую нибудь точку g и допустимъ, что она находится внѣ втораго. Въ такомъ случаѣ изъ g можно будетъ провести двѣ касательныя къ T, которыя пересѣкутъ S въ двухъ точкахъ l_1 и l_2. Прямая, соединяющая эти точки, составитъ вмѣстѣ съ касательными треугольникъ, вписанный въ S, и будетъ стороною этого треугольника, противолежащею вершинѣ g.

Можно построить прямую $l_1 l_2$ и не проводя касательныхъ изъ g къ коническому сѣченію T. Для этого замѣтимъ, что пары прямыхъ, исходящихъ изъ g и сопряженныхъ относительно коническаго сѣченія T, составляютъ, какъ извѣстно, инволюціонный пучекъ, а потому точки вторичнаго пересѣченія этихъ прямыхъ съ коническимъ сѣченіемъ S составляютъ на этой кривой инволюціонный рядъ. Прямыя соединяющія соотвѣтственныя точки этого ряда проходятъ, слѣдовательно, черезъ одну и ту же точку, чрезъ которую проходятъ и касательныя къ S въ точкахъ l_1 и l_2. Эта точка есть, слѣдовательно, полюсъ прямой $l_1 l_2$. Отсюда видимъ, что эта послѣдняя прямая можетъ быть найдена слѣдующимъ болѣе общимъ построеніемъ.

Чрезъ точку g проводимъ двѣ пары прямыхъ сопряженныхъ относительно коническаго сѣченія T. Точки вторичнаго пересѣченія каждой пары этихъ прямыхъ съ коническимъ сѣченіемъ S соединяемъ прямою. Поляра относительно S точки пересѣченія построенныхъ такимъ образомъ двухъ прямыхъ и будетъ искомою прямою.

Мы назвали это построеніе *болѣе общимъ*, потому что оно выполнимо при всякомъ положеніи точки g, т. е. какъ въ случаѣ, когда эта точка находится внѣ коническаго сѣченія T, такъ и въ случаѣ, когда она лежитъ внутри его. Будемъ называть прямую, опредѣляемую этимъ построеніемъ, *прямою противолежащею точкѣ g коническаго сѣченія S по отношенію къ коническому сѣченію T*, не упоминая при этомъ вовсе о треугольникѣ $l_1 g\, l_2$, въ которомъ она есть одна изъ сторонъ, такъ какъ двѣ другія стороны этого треугольника и лежащія на нихъ вершины l_1 и l_2 суть случайныя части его и въ послѣднемъ изъ названныхъ случаевъ совершенно исчезаютъ, такъ что и самый треугольникъ перестаетъ въ дѣйствительности существовать.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, какъ бы ни были расположены на плоскости коническія сѣченія S и T, каждой точкѣ перваго соотвѣтствуетъ по отношенію ко второму единственная и опредѣленная *противолежащая прямая*, и противолежащія всѣхъ точекъ коническаго сѣченія S относительно коническаго сѣченія T составляютъ цѣлую систему прямыхъ, непрерывно слѣдующихъ одна за другою и, слѣдовательно, огибающихъ нѣкоторую кривую линію.

Возникаетъ вопросъ, какая это линія и въ какомъ отношеніи она находится къ коническимъ сѣченіямъ S и T? Найдти геометрическое рѣшеніе этого вопроса и значитъ доказать разсматриваемое нами предложеніе Понселе.

Замѣтимъ, что, приступая такимъ путемъ къ предложенію Понселе, мы вносимъ въ него даже нѣкоторое обобщеніе, такъ какъ первоначально ни въ самой формулировкѣ этого предложенія, ни въ доказательствѣ его вовсе не имѣлся въ виду случай несуществованія нѣкоторыхъ частей многоугольника. Поэтому въ изложенін Понселе совершенно упускается изъ разсмотрѣнія случай, когда коническое сѣченіе S помѣщается всѣми точками внутри коническаго сѣченія T. Напротивъ того, нашъ способъ разсужденія не будетъ исключать и этого случая.

§ 4.

Не трудно обнаружить слѣдующее свойство противолежащей прямой линіи.

Противолежащая всякой точки g коническаго сѣченія S относительно коническаго сѣченія T пересѣкаетъ каждую пару прямыхъ, исходящихъ изъ g и сопряженныхъ относительно T, въ двухъ точкахъ сопряженныхъ относительно S.

Свойство это очевидно въ томъ случаѣ, когда противолежащая пересѣкается съ S и, слѣдовательно, точка g находится внѣ T. Чтобы обнаружить его при какомъ бы ни было положеніи противолежащей, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть двѣ прямыя, исходящія изъ g и сопряженныя относительно T, пересѣкаютъ коническое сѣченіе S въ точкахъ a_1 и a_2 (фиг. 2-я) и противолежащую точки g въ точкахъ b_1 и b_2. Пусть e будетъ полюсъ противолежащей относительно S; онъ, какъ мы знаемъ, долженъ находиться на прямой $a_1\, a_2$. Если назовемъ чрезъ f точку пересѣченія прямыхъ $a_1\, a_2$ и $b_1\, b_2$, то будемъ имѣть, что e и f суть двѣ точки сопряженныя относительно S, а потому четыре точки a_1, a_2, e, f составляютъ гармоническую группу.

Проведя прямую чрезъ точки e и b_2 и назвавъ чрезъ c_1 точку пересѣченія этой прямой съ прямою ga_1, будемъ имѣть, что група точекъ a_1, g, c_1, b_1, какъ проекція предыдущей группы изъ точки b_2, есть также гармоническая. Слѣдовательно, b_1 и c_1 суть точки сопряженныя относительно S. Кромѣ того точки b_1 и e суть также сопряженныя, потому что первая изъ нихъ лежитъ на полярѣ второй. Отсюда заключаемъ, что прямая $c_1 e$

должна быть полярою точки b_1, а потому точка b_2, чрезъ которую проходитъ эта прямая, должна быть сопряженною съ b_1, что и нужно было доказать.

Свойство противолежащей, о которомъ идетъ рѣчь, на столько полно характеризуетъ эту прямую, что можетъ быть принято за ея опредѣленіе. Чтобы убѣдиться въ этомъ нужно только доказать, что прямая, обладающая этимъ свойствомъ, находится указаннымъ выше общимъ построеніемъ противолежащей.

Положимъ, что прямая $b_1 b_2$ (фиг. 2-я) обладаетъ названнымъ свойствомъ и ея точки b_1 и b_2, находясь на двухъ прямыхъ ga_1 и ga_2, исходящихъ изъ g и сопряженныхъ относительно T, суть сопряженныя относительно S. Назвавъ, какъ и выше, чрезъ f точку пересѣченія прямыхъ $a_1 a_2$ и $b_1 b_2$ и взявъ на первой изъ этихъ прямыхъ точку e сопряженную съ f относительно S, будемъ имѣть, что четыре точки a_1, a_2, e, f составляютъ гармоническую группу.

Если соединимъ точку e прямыми линіями съ точками b_1 и b_2 и назовемъ послѣдовательно точки пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ съ прямыми $g b_2$ и $g b_1$ чрезъ c_2 и c_1, то группы точекъ a_1, g, c_1, b_1 и g, a_2, c_2, b_2, какъ проекціи предыдущей группы изъ точекъ b_2 и b_1, будутъ также гармоническія. Отсюда заключаемъ, что прямая $b_1 c_2$ есть поляра точки b_2, а прямая $b_2 c_1$ поляра точки b_1; слѣдовательно, e есть полюсъ прямой $b_1 b_2$.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что хорда, $a_1 a_2$, соединяющая двѣ точки пересѣченія коническаго сѣченія S съ двумя лучами, исходящими изъ g и сопряженными относительно T, проходитъ чрезъ полюсъ прямой $b_1 b_2$. То же самое должно быть справедливо и для всякой другой такой хорды. Это и доказываетъ, что прямая $b_1 b_2$ есть противолежащая точки g.

И такъ, прямую, противолежащую какой либо точкѣ g коническаго сѣченія S по отношенію къ коническому сѣченію T, мы можемъ опредѣлять слѣдующимъ образомъ. Это есть прямая, которая пересѣкаетъ инволюціонный пучекъ лучей, исходящихъ изъ g и сопряженныхъ попарно относительно T_1, въ инволюціонномъ рядѣ точекъ сопряженныхъ попарно относительно S.

§ 5.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ три коническія сѣченія S, T, U и пусть S и U будутъ взаимными полярами относительно T.

Возьмемъ на плоскости двѣ какія нибудь точки a и b и пусть ихъ поляры относительно T будутъ послѣдовательно A и B. Не трудно убѣдиться, что, если a и B будутъ полюсъ и поляра относительно S, то A и b будутъ поляра и полюсъ относительно U, и обратно.

Дѣйствительно, мы можемъ разсматривать какъ одну геометрическую фигуру совокупность коническаго сѣченія S, точки a, прямой B и тѣхъ вспомогательныхъ прямыхъ линій и точекъ, изъ которыхъ составляется построеніе, связывающее a и B какъ полюсъ и поляру относительно S. Фигура эта будетъ имѣть своею взаимною полярою относительно T нѣкоторую другую фигуру, въ которой элементами соотвѣтственными съ S, a и B будутъ послѣдовательно U, A и b. Что же касается элементовъ соотвѣтственныхъ съ упомянутыми вспомогательными прямыми и точками, то это будутъ точки и прямыя, изъ которыхъ составляется построеніе взаимное съ предыдущимъ и, слѣдовательно, связывающее A и b какъ поляру и полюсъ относительно U.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что, имѣя только два коническія сѣченія S и T, мы можемъ весьма просто найдти поляру всякой точки и полюсъ всякой прямой относительно U, не прибѣгая предварительно къ построенію этого коническаго сѣченія. Такъ, чтобы построить полюсъ прямой A относительно U находимъ сперва полюсъ a этой прямой относительно T, затѣмъ поляру B точки a относительно S и наконецъ полюсъ b прямой B относительно T. Послѣдняя точка и будетъ искомый полюсъ. Идя тѣмъ же путемъ, но обратно, находимъ поляру относительно U по данному ея полюсу.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ также, что, имѣя двѣ точки a и b сопряженныя относительно одного изъ коническихъ сѣченій S и U и взявъ ихъ поляры относительно T, мы получимъ двѣ прямыя A и B сопряженныя между собою относительно другаго изъ коническихъ сѣченій S и U. Точно также и обратно.

Положимъ теперь, что a и b суть двѣ точки сопряженныя между собою относительно всѣхъ трехъ коническихъ сѣченій S, T, U и пусть A и B будутъ послѣдовательно ихъ поляры относительно T (фиг. 3-я). Эти двѣ прямыя, изъ которыхъ первая должна проходить черезъ b, а вторая черезъ a, будутъ, на основаніи сказаннаго, сопряженными между собою относительно всѣхъ трехъ коническихъ сѣченій S, T, U. Слѣдовательно, полюсы прямой A относительно S и U должны лежать на прямой B. При этомъ, какъ видно изъ предыдущаго, полюсы эти могутъ или оба совпадать съ точкою a, или быть одновременно различными съ этой точкой. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ точка a имѣетъ одну и ту же поляру A, во второмъ же точка b одну и ту же поляру B относительно всѣхъ трехъ кривыхъ S, T, U. Такимъ образомъ заключаемъ, что одна изъ двухъ точекъ сопряженныхъ относительно S, T и U непремѣнно имѣетъ одну и ту же поляру по отношенію ко всѣмъ тремъ кривымъ.

Если коническія сѣченія S, T и U принадлежатъ одному и тому же пучку, т. е. третья проходитъ черезъ точки пересѣченія (случайныя) двухъ первыхъ, то паръ точекъ сопряженныхъ относительно всѣхъ трехъ кривыхъ должно быть, какъ извѣстно, безчисленное множество. Слѣдовательно, должно быть безчисленное множество точекъ, имѣющихъ относительно этихъ кривыхъ общія поляры. Это, какъ извѣстно, возможно только тогда, когда коническія сѣченія S и T, а съ тѣмъ вмѣстѣ и всѣ остальныя коническія сѣченія пучка (ST) имѣютъ двойное соприкосновеніе. И такъ, мы можемъ утверждать слѣдующее.

За исключеніемъ случая двойнаго соприкосновенія три коническія сѣченія, изъ которыхъ два суть взаимныя поляры относительно третьяго, не принадлежатъ одному пучку.

Если коническія сѣченія S и T не имѣютъ двойнаго соприкосновенія, то на плоскости существуютъ три точки (двѣ изъ которыхъ случайныя), имѣющія общія поляры относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST). Точки эти составляютъ такъ называемый общій *полярный треугольникъ*, т. е. такой треугольникъ, въ которомъ каждая сторона есть поляра противоположной вершины. То же самое должно имѣть мѣсто и по отношенію къ коническимъ сѣченіямъ T и U. Но изъ сказаннаго выше мы можемъ заключить, что всякая точка, поляры которой относительно двухъ изъ коническихъ сѣченій S, T, U различны, не можетъ имѣть общей поляры относительно двухъ другихъ. Отсюда слѣдуетъ, что точки, имѣющія общія поляры по отношенію къ коническимъ сѣченіямъ пучка (ST), и точки, имѣющія общія поляры по отношенію къ коническимъ сѣченіямъ пучка (TU), суть однѣ и тѣ же. Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ слѣдующемъ.

Три коническія сѣченія, изъ которыхъ два суть взаимныя поляры относительно третьяго, имѣютъ общій полярный треугольникъ[1].

§ 6.

Коническимъ сѣченіямъ пучка (ST) соотвѣтствуютъ, какъ взаимныя поляры относительно T, коническія сѣченія, имѣющія общія касательныя съ T и U. Будемъ обозначать чрезъ $[TU]$ совокупность всѣхъ этихъ коническихъ сѣченій.

---

[1] Стороны этого треугольника составляютъ въ совокупности такъ называемую *Штейнерову* или *Якобіеву* линію по отношенію къ тремъ коническимъ сѣченіямъ S, T, U. Для всякихъ трехъ коническихъ сѣченій эта линія есть 3-го порядка. См. по этому поводу соч. авт. «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ въ примѣненіи къ вопросу о построеніи кривыхъ линій». Москва, 1879.

Если коническія сѣченія S и T не имѣютъ двойнаго соприкосновенія, то въ пучкѣ (ST) не можетъ существовать ни одного кромѣ T коническаго сѣченія, принадлежащаго въ то же время и системѣ $[TU]$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы существовало одно такое коническое сѣченіе X, то его взаимная поляра относительно T было бы другое, отличное отъ X, коническое сѣченіе Y, принадлежащее также обѣимъ системамъ (ST) и $[TU]$. Мы имѣли бы такимъ образомъ въ одномъ и томъ же пучкѣ три коническія сѣченія X, T и Y, два изъ которыхъ суть взаимныя поляры относительно третьяго, а это, какъ мы видѣли, возможно только въ случаѣ двойнаго соприкосновенія.

Полюсы какой либо прямой A по отношенію къ различнымъ коническимъ сѣченіямъ пучка (ST) находятся, какъ извѣстно, на опредѣленномъ коническомъ сѣченіи Σ (фиг. 3-я). Полюсы же той же прямой по отношенію къ различнымъ коническимъ сѣченіямъ системы $[TU]$ лежатъ на прямой B сопряженной съ A относительно T и U, а слѣдовательно и относительно всѣхъ другихъ коническихъ сѣченій этой системы. Изъ того, что пучекъ (ST) и система $[TU]$ имѣютъ только одно общее коническое сѣченіе T, слѣдуетъ, что коническое сѣченіе Σ и прямая B имѣютъ только одну общую точку, т. е. соприкасаются, и точка ихъ соприкосновенія есть полюсъ прямой A относительно T.

Это заключеніе даетъ намъ указаніе на одно простое построеніе, рѣшающее слѣдующую задачу.

Даны три коническія сѣченія M, N и U, не принадлежащія одному пучку, но имѣющія общій полярный треугольникъ. Требуется найдти въ пучкѣ (MN) такое коническое сѣченіе T, чтобы взаимная поляра S кривой U по отношенію къ T принадлежала также пучку (MN).

Построеніе это выполняется слѣдующимъ образомъ. Взявъ произвольную прямую A, находимъ ея полюсъ c относительно даннаго коническаго сѣченія U (фиг. 3-я) и коническое сѣченіе Σ, мѣсто полюсовъ прямой A относительно коническихъ сѣченій пучка (MN) или, что все то же, пучка (ST). На основаніи предыдущаго полюсъ прямой A относительно T долженъ быть точкою прикосновенія касательной къ Σ, проходящей чрезъ c. Проведя поэтому изъ c двѣ касательныя къ Σ, будемъ имѣть, что точки ихъ прикосновенія a и a' суть полюсы прямой A относительно двухъ коническихъ сѣченій T и T', принадлежащихъ пучку (MN) и удовлетворяющихъ, каждое въ отдѣльности, условіямъ вопроса. Разсматриваемая задача допускаетъ, слѣдовательно, два рѣшенія. 7

Если эту задачу мы примѣнимъ къ случаю, когда вмѣсто M и N мы имѣемъ два коническія сѣченія S и T, данныя произвольно, а третье U опредѣлено по нимъ какъ взаимная поляра перваго относительно втораго, то одно изъ рѣшеній будетъ извѣстно напередъ. Должно, слѣдовательно, существовать второе рѣшеніе опредѣленное и отличное отъ перваго. Это слѣдуетъ изъ того, что точка c, будучи полюсомъ прямой A относительно коническаго сѣченія U, не принадлежащаго пучку (ST), не можетъ лежать на кривой Σ и, такъ какъ она находится на извѣстной касательной къ Σ, то вторая проходящая чрезъ нее касательная къ Σ должна быть опредѣленною и отличною отъ первой.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующее предложеніе, имѣющее большую важность для нашей главной цѣли.

Если два коническія сѣченія S и T не имѣютъ двойнаго соприкосновенія, то въ пучкѣ (ST) существуютъ еще другія два коническія сѣченія S' и T' отличныя послѣдовательно отъ S и T и притомъ такія, что взаимная поляра S' относительно T' есть то-же коническое сѣченіе какъ и взаимная поляра S относительно T.

Эти двѣ пары коническихъ сѣченій, представляя два рѣшенія предыдущей задачи, дополняютъ, такъ сказать, одна другую.

*

Будемъ называть поэтому коническія сѣченія S' и T' *дополнительными* послѣдовательно къ коническимъ сѣченіямъ S и T.

Точки дополнительныхъ коническихъ сѣченій S и S' находятся, очевидно, въ проективномъ соотвѣтствіи, такъ какъ онѣ суть полюсы относительно T и T' касательныхъ одного и того же коническаго сѣченія U.

§ 7.

Пусть g и g' будутъ соотвѣтственныя точки дополнительныхъ коническихъ сѣченій S и S' и назовемъ чрезъ G ихъ общую поляру относительно T и T', касающуюся коническаго сѣченія U въ нѣкоторой точкѣ u (фиг. 4-я). Касательныя въ g и g' къ S и S' будутъ полярами точки u относительно T и T', а потому ихъ точка пересѣченія v будетъ сопряженною съ u относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). Если назовемъ затѣмъ буквами h и h' точки пересѣченія прямыхъ gv и $g'v$ съ прямою G, то будемъ имѣть, что точки g и h суть сопряженныя между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST), точно также какъ и точки g' и h'. Это слѣдуетъ изъ того, что h есть точка пересѣченія поляръ точки g относительно S и T, а h' точка пересѣченія поляръ точки g' относительно S' и T'.

Соединимъ точку g прямыми линіями съ точками g', h' и u и пусть z будетъ точка пересѣченія прямыхъ gu и $g'v$.

Такъ какъ u есть полюсъ прямой gv относительно T, то прямыя gu и gv будутъ сопряженныя между собою относительно этого коническаго сѣченія. Легко видѣть далѣе, что прямая gu есть поляра точки v относительно S и, слѣдовательно, точки v и z суть сопряженныя между собою относительно этого коническаго сѣченія. Дѣйствительно, это видно изъ того, что поляра точки v относительно S должна проходить чрезъ g, какъ точку прикосновенія касательной изъ v къ S, и чрезъ u, чрезъ кото-

*

рую проходятъ поляры точки v относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). И такъ, двѣ прямыя gu и gv, будучи сопряженными относительно T, пересѣкаютъ прямую $g'v$ въ двухъ точкахъ z и v сопряженныхъ относительно S.

Мы видѣли, что точки g' и h' суть сопряженныя между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST), а слѣдовательно въ частности и относительно коническаго сѣченія S. Легко видѣть далѣе, что прямая gg' есть поляра точки h' относительно T и, слѣдовательно, двѣ прямыя gg' и gh' суть сопряженныя между собою относительно этого коническаго сѣченія. Дѣйствительно, такъ какъ поляра G точки g относительно T проходитъ чрезъ h', то поляра точки h' относительно того же коническаго сѣченія должна проходить чрезъ g. Кромѣ того она должна проходить чрезъ g', чрезъ которую проходятъ поляры точки h' относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). И такъ, двѣ прямыя gg' и gh', будучи сопряженными относительно T, пересѣкаютъ прямую $g'v$ въ двухъ точкахъ g' и h' сопряженныхъ относительно S.

Мы имѣемъ такимъ образомъ двѣ пары прямыхъ (gu, gv) и (gg', gh'), исходящихъ изъ g и сопряженныхъ относительно T, точки встрѣчи которыхъ съ прямою $g'v$ представляютъ двѣ пары точекъ сопряженныхъ относительно S. Поэтому на основаніи опредѣленія *противолежащей прямой*, даннаго нами въ концѣ 4-го параграфа, заключаемъ, что прямая $g'v$ есть противолежащая точки g коническаго сѣченія S относительно коническаго сѣченія T.

Такъ какъ при опредѣленныхъ S и T противолежащая точки g есть единственная и опредѣленная, то убѣждаемся изъ сказаннаго, что противолежащая всякой точки коническаго сѣченія S относительно T есть касательная въ соотвѣтственной точкѣ къ *дополнительному* коническому сѣченію S'. Противолежащія всѣхъ точекъ коническаго сѣченія S огибаютъ, слѣдовательно, опредѣленное коническое сѣченіе S', принадлежащее пучку (ST).

Предложеніе Понселе является, такимъ образомъ, доказаннымъ.

Бросивъ бѣглый взглядъ на разсужденія, приведшія насъ къ этому результату, мы видимъ, что доказательство наше есть въ сущности весьма простое заключеніе, построенное на предложеніи предыдущаго параграфа о существованіи дополнительныхъ коническихъ сѣченій, предложеніи, которое мы характеризовали какъ весьма важное для нашей главной цѣли. Этимъ оправдываются приведенныя выше слова Шаля, что доказательства строго геометрическія, которыми всегда можно замѣтить ссылку на принципъ непрерывности, должны быть весьма простыми и легкими, если только для нихъ подготовленъ путь при помощи особыхъ вспомогательныхъ геометрическихъ предложеній весьма богатыхъ, вообще говоря, слѣдствіями и устанавливающихъ связь между отдѣльными частями научнаго предмета.

Мы не утверждаемъ, что такое широкое значеніе для науки принадлежитъ и нашему предложенію о дополнительныхъ коническихъ сѣченіяхъ пучка, которое само есть только слѣдствіе болѣе или менѣе частной геометрической задачи. Мы не имѣемъ пока также данныхъ, которыя указывали бы намъ на большее или меньшее число выводимыхъ изъ этого предложенія слѣдствій. Но важное значеніе этого предложенія по отношенію къ занимающему насъ вопросу едва ли можно оспаривать.

Пользуясь этимъ предложеніемъ, мы, собственно говоря, нашли больше чѣмъ искали. Мы не только доказали предложеніе Понселе въ томъ видѣ, какъ оно формулировалось для случая треугольника, мы не только убѣдились, что противолежащія точекъ коническаго сѣченія S по отношенію къ коническому сѣченію T огибаютъ третье коническое сѣченіе, принадлежащіе пучку (ST), но обнаружили вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе тѣсную геометрическую зависимость, существующую между этимъ огибаемымъ коническимъ сѣченіемъ и данными S и T, зависимость, въ силу которой это коническое сѣченіе можетъ быть опредѣлено по даннымъ S и T, не прибѣгая къ построенію самихъ противолежащихъ. Эта зависимость, кажется, не была до сихъ поръ замѣчена.

§ 8.

Въ заключеніе укажемъ еще на одинъ простой способъ построенія для каждой точки даннаго коническаго сѣченія S противолежащей прямой относительно другаго даннаго коническаго сѣченія T. Способъ этотъ обнаруживается изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ.

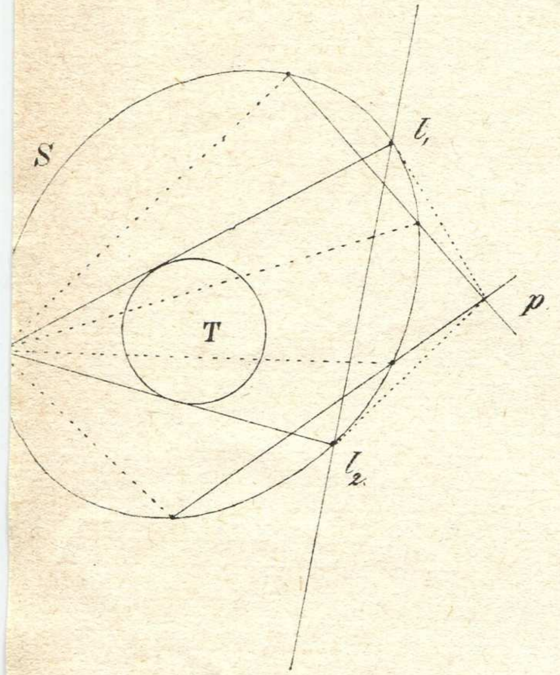
Такъ какъ поляры точки v (фиг. 4-я) относительно различныхъ коническихъ сѣченій пучка (ST) проходятъ чрезъ точку u, лежащую на прямой G, то въ пучкѣ этомъ должно находиться одно опредѣленное коническое сѣченіе, относительно котораго G есть поляра точки v. Пусть V будетъ это коническое сѣченіе.

Такъ какъ точка h находится на прямой G, то поляра ея относительно V должна проходить чрезъ v, полюсъ этой прямой. Кромѣ того она должна проходить чрезъ точку g, чрезъ которую проходятъ поляры точки h относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST). Слѣдовательно, поляра точки h относительно V есть прямая, проходящая чрезъ эту точку, а потому и само коническое сѣченіе V должно проходить черезъ h и касаться въ этой точкѣ прямой gv. Точно также убѣждаемся, что коническое сѣченіе V должно проходить чрезъ точку h' и касаться въ этой точкѣ прямой $g'v$.

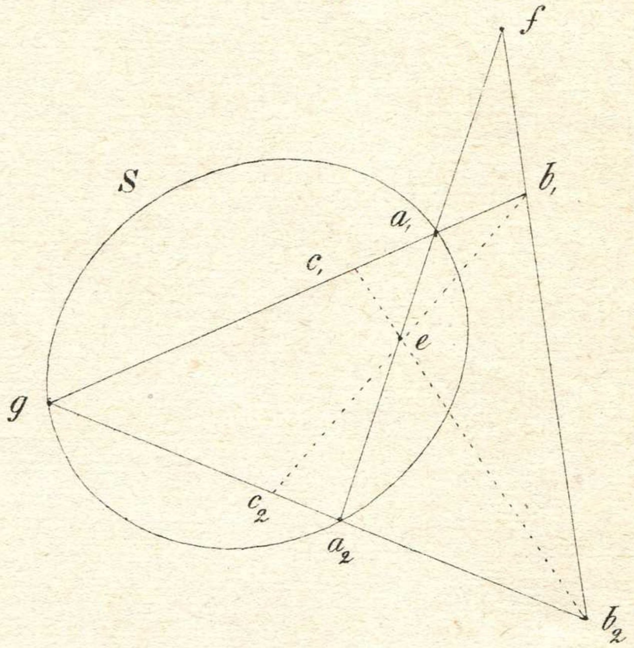
Изъ сказаннаго видимъ, что, если намъ даны два коническія сѣченія S и T, то для какой либо точки g, взятой на S, можно найдти противолежащую прямую слѣдующимъ образомъ.

Прежде всего строимъ косательную въ g къ коническому сѣченію S и поляру G этой точки относительно T. Чрезъ точку h пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ будетъ проходить единственное и опредѣленное коническое сѣченіе пучка (ST), касающееся въ ней прямой gh. Найдя затѣмъ точку h', въ которой прямая G пересѣкается вторично съ этимъ коническимъ сѣченіемъ, построимъ касательную къ нему въ этой точкѣ. Эта касательная и будетъ искомою противолежащей точки g.

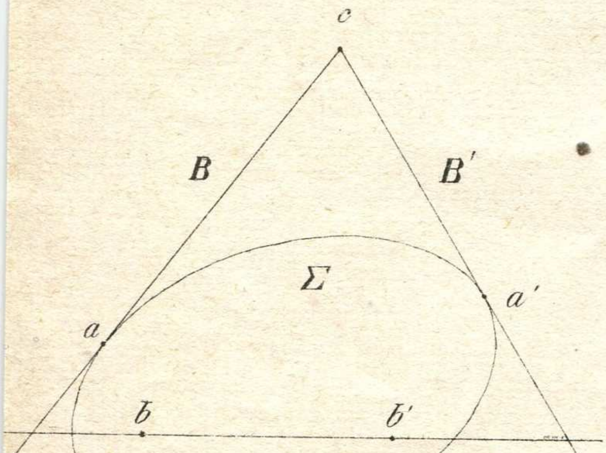
Точка g' сопряженная съ h' относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST) опредѣлится затѣмъ пересѣченіемъ найденной противолежащей съ полярою точки h' относительно S или T. Эта точка g' будетъ точкою прикосновенія найденной противолежащей съ коническимъ сѣченіемъ S' дополнительнымъ къ S. Чрезъ это и коническое сѣченіе S', какъ проходящее чрезъ извѣстную точку и принадлежащее данному пучку, будетъ также вполнѣ опредѣлено.



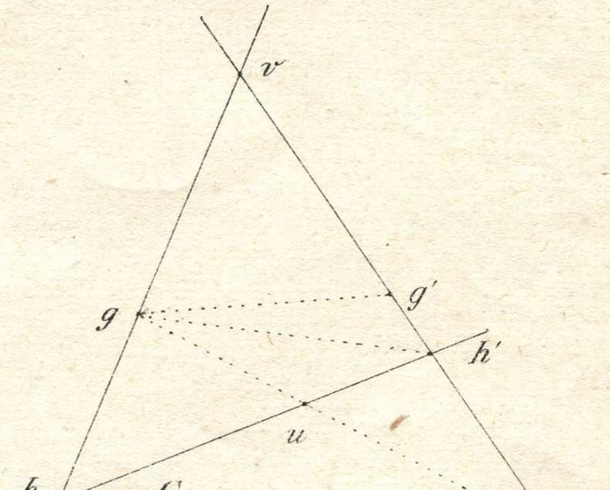
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.