ОБЪ ОДНОМЪ ЧАСТНОМЪ СЛУЧАѢ ПРИВЕДЕНІЯ УРАВНЕНІЯ 4-Й СТЕПЕНИ КЪ БИКВАДРАТНОМУ.

А. П. Грузинцева.

Пусть дано уравненіе 4-й степени въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \qquad \text{(I)}$$

гдѣ A, B, C, D суть нѣкоторые коэффиціенты. Употребимъ подстановку вида:

$$x = \frac{a + by_1}{p + qy_1},$$

гдѣ a, b, p, q неопредѣленные коэффиціенты, а y_1 новое перемѣнное. Положивъ

$$\frac{a}{p} = \alpha, \quad \frac{b}{q} = \beta \text{ и } \frac{qy_1}{p} = y,$$

можемъ дать x-у другой болѣе простой видъ:

$$x = \frac{\alpha + \beta y}{1 + y}. \qquad \text{(II)}$$

Зададимся вопросомъ — опредѣлить нѣкоторыя изъ тѣхъ соотношеній между коэффиціентами A, B, C, D, въ силу которыхъ уравненіе (I) подстановкой (II) можетъ быть превращено въ биквадратное.

Подставляя это значеніе въ (I) и полагая для краткости:

$$M = \beta^4 + A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D,$$

$$N = 6\alpha^2\beta^2 + 3A\alpha\beta^2 + 3A\alpha^2\beta + B\alpha^2 + B\beta^2 + 3C\alpha + 3C\beta + 6D,$$

$$P = \alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D,$$

находимъ:

$$My^4 + Ny^2 + P = 0, \qquad (I')$$

при допущеніи, что подстановкой (II), т. е. приличнымъ выборомъ α и β при существованіи предполагаемыхъ соотношеній между коэффиціентами даннаго уравненія, мы привели данное уравненіе (I) къ биквадратному (I′).

Исчезнувшіе коэффиціенты суть:

$$1) \quad 4\alpha\beta^3 + A\beta^3 + 3A\alpha\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2B\beta^2 + 3C\beta + \\ + C\alpha + 4D = 0;$$

$$2) \quad 4\alpha^3\beta + A\alpha^3 + 3A\alpha^2\beta + 2B\alpha\beta + 2B\alpha^2 + 3C\alpha + \\ + C\beta + 4D = 0.$$

Опредѣленіе α и β изъ этихъ уравненій приведетъ насъ къ уравненію 6-й степени, что не выгодно; мы же займемся тѣми частными соотношеніями между A, B, C, D, которыя позволятъ намъ опредѣлить α и β изъ уравненій не выше 2-й степени.

Изъ равенствъ (1) и (2) мы можемъ извлечь другія, болѣе удобныя для нашей цѣли. Вычитая (2) изъ (1) и раздѣляя на общій множитель $\beta - \alpha$*, имѣемъ:

$$4\alpha\beta(\alpha + \beta) + A(\alpha + \beta)^2 + 2A\alpha\beta + \\ + 2B(\alpha + \beta) + 2C = 0. \qquad (1')$$

Умноживъ 1-е на α^2, 2-е на β^2, по вычитаніи и сокращеніи на $\alpha - \beta$ имѣемъ:

* Этотъ множитель не можетъ быть 0, ибо тогда подстановка (II) обращается въ равенство: $x = \alpha$, т. е., что α есть корень даннаго уравненія, который намъ неизвѣстенъ.

$$2A\alpha^2\beta^2 + 2B\alpha\beta(\alpha+\beta) + 2C\alpha\beta +$$
$$+ C(\alpha+\beta)^2 + 4D(\alpha+\beta) = 0. \qquad (2')$$

Разсмотримъ теперь тѣ частныя соотношенія между A, B, C, D, которыя значительно упрощаютъ опредѣленіе α и β изъ уравненій (1) и (2) или, лучше, (1′) и (2′).

А. Положимъ, что между коэффиціентами A, B, C и D существуетъ неизвѣстное пока намъ соотношеніе, въ силу котораго 1) $\beta = 0$, тогда уравненія (1) и (2) даютъ:

$$C\alpha + 4D = 0 \text{ или } \alpha = -\frac{4D}{C};$$

$$A\alpha^3 + 2B\alpha^2 + 3C\alpha + 4D = 0.$$

Подставляя сюда значеніе α, найдемъ по упрощеніи искомое соотношеніе въ видѣ

$$8AD^2 - 4BCD + C^3 = 0. \qquad (A)$$

Это соотношеніе есть такъ называемый кубическій ретроваріантъ**. Такимъ образомъ заключаемъ, что *если коэффиціенты уравненія (I) удовлетворяютъ соотношенію (A), то подстановкой:*

$$x = -\frac{4D}{C} \cdot \frac{1}{1+y}$$

уравненіе (I) превращается въ биквадратное.

Коеффиціенты M, N, P будутъ:

$$M = D,\ N = \frac{2D}{C^2}(8DB - 3C^2),\ P = \frac{D}{C^4}(256D^3 - 32AD^2C + C^4).$$

Уравненіе (I′) будетъ:

$$z^4 + 2(8DB - 3C^2)z^2 + (256D^3 - 32AD^2C + C^4) = 0, \qquad (I'')$$

гдѣ $z = Cy$.

** См. *Matthiessen'a* Grundzüge der antiken und modernen Algebra. S. 240.

2) $\alpha = 0$; тогда соотношеніе (A) остается то-же самое, но подстановка будетъ:

$$x = -\frac{4D}{C} \cdot \frac{y}{1+y}$$

и уравненіе (Г′) обращается въ слѣдующее:

$$(256D^3 - 32AD^2C + C^4)z^4 + 2(8DB - 3C^2)z^2 + 1 = 0, \quad (\Gamma''')$$

гдѣ

$$z = \frac{y}{C}.$$

Это уравненіе обратное (Г″) и выгоднѣе употреблять (Г″).

B. Положимъ, что искомое соотношеніе между коэффиціентами влечетъ за собой:

$$1) \ \alpha + \beta = 0.$$

Тогда изъ (1′) или (2′) находимъ:

$$\alpha^2 = \frac{C}{A}.$$

Складывая (1) и (2) и внося въ результатъ $\alpha = -\beta$, найдемъ:

$$\alpha^4 = D,$$

слѣдовательно:

$$A^2D - C^2 = 0 \qquad \text{(B)}$$

есть искомое соотношеніе. Итакъ, заключаемъ, что *если коэффиціенты уравненія (I) удовлетворяютъ соотношенію (B), то это уравненіе подстановкой*

$$x = \frac{1-y}{1+y}\sqrt{\frac{C}{A}} \text{ или } \textit{подстановкой: } x = \frac{y-1}{y+1}\sqrt{\frac{C}{A}}$$

приводится къ биквадратному (Г′).

Коэффиціенты будутъ:

$$M = \frac{C}{A^2}\left(2C + AB - 2A\sqrt{AC}\right), \quad P = \frac{C}{A^2}\left(2C + AB + \right.$$

$$\left. + 2A\sqrt{AC}\right) \text{ и}$$

$$N=\frac{2C}{A^2}\left(6C+AB\right).$$

Самое уравненіе будетъ:

$$\left(2C+AB-2A\sqrt{AC}\right)y^4+2\left(6C+AB\right)y^2+$$
$$+\left(2C+AB+2A\sqrt{AC}\right)=0.$$

На этотъ случай мы главнѣйше и обращаемъ вниманіе; онъ кажется намъ простымъ и полезнымъ. Въ немъ заключается, какъ частный, случай обратныхъ уравненій.

2) $\alpha\beta=1$. Тогда находимъ

$$x=\frac{\alpha^2+y}{\alpha(1+y)},$$

гдѣ α будетъ корень квадратнаго уравненія:

$$\alpha^2-\frac{4(D-1)}{A-C}\alpha+1=0.$$

Подставляя значеніе α и β въ одно изъ условій (1′) или (2′), найдемъ нѣкоторую зависимость между коэффиціентами нашего уравненія. Эта зависимость нѣсколько сложна, а потому и случай этотъ не представляетъ достаточнаго интереса.

C. Можно, идя тѣмъ-же путемъ, найдти еще случаи соотношеній, но сложныхъ и не представляющихъ также особыхъ выгодъ.

D. Если подстановкѣ (II) дать видъ:

$$x=\frac{1+y}{\alpha+\beta y},$$

то вмѣсто соотношенія (A) найдемъ такое:

$$A^3-4AB+8C=0 \qquad \text{(D)}$$

при условіи $\alpha=0$ или $\beta=0$.

Это есть извѣстное соотношеніе, аналогичное (A), если введемъ вмѣсто x въ уравненіе (I) величину $\frac{1}{x}$.