

О ДВОЙНОМЪ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНІИ

ВЪ СВЯЗИ

СЪ СВѢТОРАЗСѢЯНІЕМЪ.

А. П. Грузинцева.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Теоретическая оптика считается одною изъ болѣе установленныхъ частей математической физики: основные механическіе принципы свѣтовыхъ явленій найдены и примѣнены къ дѣлу ихъ объясненія; составлены математическія теоріи главнѣйшихъ свѣтовыхъ явленій — теоріи, признанныя достаточными. Таково существующее въ настоящее время общее мнѣніе. Между-тѣмъ-какъ при достаточно внимательномъ изученіи дѣла положеніе теоретической оптики представляется далеко не столь законченнымъ; существуютъ свѣтовые явленія, различныхъ теорій которыхъ столько же, сколько было авторовъ, писавшихъ о нихъ. Подобнаго обстоятельства намъ не представляется въ другихъ достаточно установленныхъ частяхъ математической физики. Такъ, динамическая теорія тепла представляетъ въ своей общей части и въ нѣкоторыхъ ея примѣненіяхъ уже нѣчто опредѣленно-законченное, между тѣмъ какъ теоріи, напримѣръ, двойнаго лучепреломленія и свѣторазсѣянія (дисперсіи) далеки отъ подобной степени совершенства. Дѣйствительно, въ послѣднихъ случаяхъ *мы не имѣемъ одной законченной теоріи*, а цѣлый рядъ теорій: Коши, Нейманна, Кеттелера, Ломмеля и др.; между тѣмъ какъ въ первомъ случаѣ существуетъ только *одна динамическая теорія тепла*, а не теоріи Клаузіуса, Гирна, Верде и др.; суще-

ствуютъ, слѣдовательно, только различныя изложенія одной и той же теоріи, различныя способы систематизаціи матеріала и т. п. Все это заставило меня заняться изученіемъ теорій такихъ явленій, какъ двойное лучепреломленіе въ связи съ свѣторазсѣяніемъ.

Изученіе дѣла показало, что въ настоящее время невозможно составить теоріи сказанныхъ явленій, не прибѣгая къ болѣе или менѣе вѣроятнымъ гипотезамъ, невозможно вслѣдствіе недостаточнаго знанія силъ, дѣйствующихъ внутри тѣла между его частицами. Все, что можно сдѣлать въ настоящее время, это — свести различныя теоріи къ одному общему источнику, показать къ какимъ частнымъ предположеніямъ о междумолекулярныхъ силахъ надо прибѣгнуть, чтобы получить ту или другую изъ существующихъ теорій, и наконецъ показать, въ какомъ направленіи слѣдуетъ работать для полученія окончательнаго рѣшенія. Поставивъ вопросъ на такую почву, можно будетъ ввести нѣкоторыя улучшенія въ современныя теоріи какъ со стороны постановки основаній, такъ и со стороны развитія слѣдствій изъ нихъ. Замѣчу еще одно обстоятельство.

Результаты, добытые тою или другою теоріей, провѣрялись сравненіемъ ихъ съ опытными данными; подобная провѣрка показала ихъ пригодность къ дѣлу; поэтому любопытны связь и способъ перехода отъ рѣшеній одной теоріи къ рѣшеніямъ другой.

Такова цѣль настоящаго труда; въ какой мѣрѣ онъ соотвѣтствуетъ истиннымъ нуждамъ науки и насколько удачно его выполнение — судить не мнѣ¹.

¹ Сущность этой работы была сообщена въ засѣданіи 26 февраля 1882 г. харьковскаго математическаго общества и въ мартовскомъ засѣданіи общества опытныхъ наукъ при харьковскомъ университетѣ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДВОЙНАГО ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНІЯ
ВЪ СВЯЗИ СЪ СВѢТОРАЗСВЯЩЕНІЕМЪ.

ГЛАВА I.

§ 1. Всякое тѣло представляетъ сложную систему частицъ: матеріи и эфира. Какъ тѣ, такъ и другія находятся въ движеніи внутри самаго тѣла, хотя и послѣднее все, какъ цѣлое, можетъ имѣть движеніе, но для нашей цѣли можно принять, что тѣло находится въ покоѣ. Мы можемъ разсматривать совокупность матеріальныхъ частицъ и совокупность эфирныхъ, или какъ одну систему частицъ, или какъ двѣ отдѣльныя системы, для чего достаточно ввести, кромѣ силъ, дѣйствующихъ на каждую систему независимо отъ другой, еще силы, происходящія отъ взаимодѣйствія между тѣми и другими, вслѣдствіе ихъ совмѣстнаго существованія. Эти силы взаимодѣйствія проявляются подъ видомъ нѣсколькихъ силъ, какъ-то: силъ тренія, силъ сопротивленія и т. п. И такъ, пусть частицы матеріи и эфира находятся въ колебательномъ или какомъ другомъ движеніи; тогда, называя буквою T сумму живыхъ силъ (кинетическая энергія) движущихся частицъ, а символомъ δU сумму элементарныхъ работъ (потенціальная энергія) силъ, дѣйствующихъ внутри системы и происходящихъ или вслѣдствіе свойствъ тѣла, или вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ причинъ, на основаніи принципа Гамильтона имѣемъ уравненіе:

$$\int dt (\delta T + \delta U) = 0, \quad (1)$$

гдѣ t время, а δT есть вариационное измѣненіе живой силы. Интегрированіе должно быть выполнено между нѣкоторыми двумя постоянными значеніями времени. Написанное уравненіе должно отдѣльно примѣнить къ системамъ матеріальныхъ частицъ и эфира.

Разсмотримъ теперь ближе тѣ силы, которыя дѣйствуютъ въ нашихъ системахъ частицъ, т. е. въ какомъ-нибудь физическомъ тѣлѣ. Эти силы мы раздѣлимъ сначала на двѣ большія группы, помѣстивъ въ первую тѣ, которыя обуславливаютъ свѣтовые явленія, а во вторую тѣ, отъ которыхъ зависятъ явленія тепла и электричества (магнетизма и электромагнетизма). Означивъ живыя силы и элементарныя работы силъ первой группы соответственными буквами безъ указателя, а живыя силы и элементарныя работы силъ второй группы тѣми-же буквами съ указателемъ ($'$), мы имѣемъ по уравненію (1) слѣдующее:

$$\int dt (\delta T + \delta U + \delta T' + \delta U') = 0.$$

Но, имѣя въ виду изслѣдовать только свѣтовые явленія известнаго рода, мы можемъ съ полнымъ правомъ предположить, что какъ живая сила T , такъ и работа силъ второй группы суть величины постоянныя во всемъ объемѣ тѣла и за все время, лежащее внутри предѣловъ интеграла, и потому имѣемъ:

$$\int dt (\delta T' + \delta U') = 0.$$

И такъ, наше уравненіе значительно упрощается, сохраняя видъ уравненія (1) съ тою лишь существенною разницей, что подѣ T и δU надо понимать живую силу колебательныхъ движеній и элементарную работу силъ первой группы, т. е. тѣхъ силъ, участію которыхъ мы приписываемъ свѣтовые явленія.

§ 2. Разсмотримъ тѣ силы, которыя даютъ элементарную работу δU въ случаѣ эфира. Эти силы, дѣйствующія на каждую частицу эфира, суть слѣдующія:

1) Силы упругости частицъ эфира; ихъ элементарную работу обозначимъ символомъ $\delta U_e^{(a)}$.

2) Силы тренія эфирныхъ частицъ объ эфирныя и матеріальныя; элементарная ихъ работа $\delta U_{fa} + \delta U_{fm}$, или короче δU_f .

3) Силы сопротивленія движущимся частицамъ эфира — сопротивленія, производимаго или эфиромъ, или матеріальными частицами, ихъ элементарную работу обозначимъ $\delta U_{ra} + \delta U_{rm}$ или короче δU_r .

4) Внѣшнія силы, дѣйствующія на эфирную частицу; ихъ работа будетъ обозначена δU_e .

5) Силы взаимодѣйствія между частицами эфира и матеріи — взаимодѣйствія отличнаго отъ того, которое производятъ силы 1, 2 и 3-й категорій. Ихъ элементарная работа $\delta U_{ma} + \delta U_{mt}$ или короче δU_a .

Подобныя же силы будутъ дѣйствовать на каждую матеріальную частицу. Элементарныя работы ихъ будемъ обозначать тѣмъ же символомъ δU съ указателемъ m вмѣсто a и обратно.

Разовьемъ теперь уравненіе (1). Положимъ:

$$\delta U_e^{(a)} + \delta U_r + \delta U_f + \delta U_a = \delta U_i; \quad (2)$$

тогда будемъ имѣть:

$$\int dt (\delta T + \delta U_i + \delta U_e) = 0. \quad (3)$$

Подобное же уравненіе имѣемъ и для матеріальныхъ частицъ. Если бы мы разсматривали совокупность эфирныхъ и матеріальныхъ частицъ, какъ одну систему, тогда уравненіе (3) было бы одно, стоитъ только въ немъ разсматривать δT , δU_i и δU_e одновременно относящимися и къ эфирнымъ частицамъ, и къ матеріальнымъ.

§ 3. Вычислимъ теперь члены уравненія (3).

Такъ-какъ мы предполагаемъ, что движенія частицъ эфира или матеріи суть движенія колебательныя, то слѣдовательно предстоитъ выразить δT и δU въ функціи колебанія, координатъ частицъ и времени.

Отнесемъ пока положеніе частицы къ какой-нибудь системѣ прямоугольныхъ осей и назовемъ координаты эфирной частицы въ положеніи равновѣсія буквами

$$\xi, \eta, \zeta,$$

составляющія колебанія вдоль тѣхъ же осей

$$\pi, \rho, \omega.$$

Для матеріальной частицы подобныя же количества обозначимъ соответственно чрезъ

$$x, y, z, \text{ и}$$

$$u, v, w.$$

Пусть масса единицы объема эфира будетъ μ , тогда живая сила системы эфирныхъ частицъ будетъ опредѣляться равенствомъ:

$$T = \frac{1}{2} \iiint \mu \left[\left(\frac{d\pi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] d\xi d\eta d\zeta,$$

причемъ интегрированіе должно быть распространено на весь объемъ тѣла, заключающаго эфиръ.

Называя составляющія виѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эфирную частицу вдоль координатныхъ осей, буквами

$$\Xi, H, Z,$$

и рассчитанныхъ на единицу объема, будемъ имѣть для δU_e слѣдующее выраженіе:

$$\delta U_e = \iiint (\Xi d\pi + H d\rho + Z d\omega) d\xi d\eta d\zeta.$$

Вычислимъ теперь $\delta U_e^{(a)}$.

Такъ-какъ ниже намъ придется разсматривать или изотропныя среды, или кристаллическія (анизотропныя, вообще говоря), то здѣсь мы вычислимъ работу упругихъ силъ, дѣйствующихъ въ кристаллической срединѣ, ибо отъ послѣдняго случая легко перейдемъ къ случаю изотропныхъ тѣлъ.

Назовемъ упругія силы символами

$$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x,$$

а деформациі элемента объема:

$$x_x, y_y, z_z, x_y, y_z, z_x,$$

тогда зависимости первыхъ отъ послѣднихъ, какъ извѣстно, суть слѣдующія:

$$X_x = ax_x + fx_y + ex_z, X_y = fx_y$$

$$Y_y = fy_x + by_y + dz_y, Y_z = dy_z$$

$$Z_z = ez_z + dy_z + cz_z, Z_x = ez_x;$$

причемъ a, b, c, d, e, f суть постоянные коэффициенты, характеризующіе средину въ отношеніи ея упрукости.

Тогда элементарная работа упругихъ силъ будетъ:

$$\delta U_e^{(a)} = \iiint d\xi d\eta d\zeta [X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + \\ + X_y \delta x_y + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x]$$

здѣсь x_x, y_y и т. п. выражаются, какъ извѣстно, въ функціи π, ρ, ω слѣдующимъ образомъ:

$$x_x = \frac{\partial \pi}{\partial \xi}, \quad y_y = \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \quad z_z = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta},$$

$$x_y = \frac{\partial \pi}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi}, \quad y_z = \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \quad z_x = \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

Для матеріальной частицы надо $\pi, \xi \dots$ замѣнить u, x и т. п.

Подставляем эти значенія въ выраженіе для $\delta U_e^{(a)}$ и интегрируемъ каждый членъ по частямъ*, имѣемъ:

* Интегрированіе совершается на основаніи слѣдующей формулы:

$$\iiint Q \delta \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta = \iiint Q d\eta d\zeta \frac{\partial \delta f}{\partial \xi} d\xi = \iint Q d\eta d\zeta \delta f - \\ - \iiint d\xi d\eta d\zeta \frac{\partial Q}{\partial \xi} \delta f.$$

$$\begin{aligned} \delta U_e^{(a)} = & \iint [X_x d\eta d\xi d\zeta + Y_y d\xi d\zeta d\eta + Z_z d\xi d\eta d\zeta + \\ & + (Z_x d\xi d\eta + X_y d\xi d\zeta) d\pi + (Y_z d\xi d\eta + X_y d\eta d\zeta) d\varrho + \\ & + (Y_z d\xi d\zeta + Z_x d\eta d\zeta) d\omega] - \\ & - \iiint d\xi d\eta d\zeta \left\{ \left(\frac{\partial X_x}{\partial \xi} + \frac{\partial X_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_x}{\partial \zeta} \right) d\pi + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial X_y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y_z}{\partial \zeta} \right) d\varrho + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_z}{\partial \zeta} \right) d\omega \right\}; \end{aligned}$$

двойной интеграль долженъ быть распространень на всю поверхность тѣла и его можно было бы написать въ иной болѣе удобной формѣ, введя косинусы направленія нормала къ поверхности тѣла; назвавъ эти косинусы буквами m_1, m_2, m_3 , двойной интеграль въ выраженіи $\delta U_e^{(a)}$ представится въ видѣ:

$$\iint d\sigma \left\{ (X_x m_1 + X_y m_2 + Z_x m_3) d\pi + (X_y m_1 + Y_y m_2 + Y_z m_3) d\varrho + (Z_x m_1 + Y_z m_2 + Z_z m_3) d\omega \right\};$$

причемъ $d\sigma$ есть элементъ поверхности тѣла.

Полагая:

$$X_x m_1 + X_y m_2 + Z_x m_3 = X$$

$$X_y m_1 + Y_y m_2 + Y_z m_3 = Y$$

$$Z_x m_1 + Y_z m_2 + Z_z m_3 = Z \text{ и составляющія}$$

упругихъ силъ, дѣйствующихъ внутри середины, буквами E_x, E_y, E_z имѣемъ слѣдовательно:

$$\delta U_e^{(a)} = \iint d\sigma (X d\pi + Y d\varrho + Z d\omega) - \iiint (E_x d\pi + E_y d\varrho + E_z d\omega) d\xi d\eta d\zeta.$$

Опредѣлимъ δU_r и δU_f .

Назовемъ составляющія вдоль осей координатъ силъ тренія и сопротивленія, рассчитанныхъ на единицу объема, соответственными буквами

$$R_x, R_y, R_z \text{ и}$$

$$F_x, F_y, F_z$$

тогда элементарныя работы δU_r и δU_f можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\delta U_r = \iiint d\xi d\eta d\zeta (R_x d\pi + R_y d\varrho + R_z d\omega), \text{ и}$$

$$\delta U_f = \iiint d\xi d\eta d\zeta (F_x d\pi + F_y d\varrho + F_z d\omega).$$

Относительно R_x, F_x и т. д. намъ ничего точнаго неизвѣстно; мы можемъ принимать на ихъ счетъ болѣе или менѣе вѣроятныя гипотезы; замѣтимъ, что при нѣкоторыхъ гипотезахъ δU_r и δU_f могутъ заключать части съ двойными интегралами.

Работы δU_r и δU_f можно соединить въ одну, полагая

$$R_x + F_x = N_x, R_y + F_y = N_y, R_z + F_z = N_z, \text{ тогда}$$

$$\delta U_r + \delta U_f = \iiint d\xi d\eta d\zeta (N_x d\pi + N_y d\varrho + N_z d\omega).$$

Сопротивленіе и треніе можетъ проявляться въ измѣненіи упругихъ силъ E_x, E_y, E_z , и именно упругія силы частицъ могутъ быть уменьшены вслѣдствіе тренія и сопротивленія ихъ движенію.

Зная, что въ изотропной, несжимаемой, упругой срединѣ (см. § 8) количества E_x, E_y, E_z равны соотвѣтственно $e\Delta_2\pi, e\Delta_2\varrho, e\Delta_2\omega$, мы, на основаніи сейчасъ высказаннаго, можемъ допустить¹ для силъ N , происходящихъ вслѣдствіе сопротивленія и тренія частицъ кристаллической средины слѣдующія значенія:

$$N_x = -\beta_x \Delta_2 \pi, N_y = -\beta_y \Delta_2 \varrho, N_z = -\beta_z \Delta_2 \omega,$$

причемъ $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ суть коэффициенты, зависящіе отъ свойствъ средины. Также:

$$N'_x = -\beta'_x \Delta_2 u, N'_y = -\beta'_y \Delta_2 v, N'_z = -\beta'_z \Delta_2 w.$$

При такомъ взглядѣ на силы N выраженіе для работы $\delta U_r + \delta U_f$ будетъ заключать членъ съ двойнымъ интеграломъ, подобнымъ двойному интегралу въ выраженіи $\delta U_e^{(a)}$, именно членъ:

¹ Подобныя допущенія дѣлали Буссинескъ и Кеттелеръ.

$\iint d\sigma \{ \beta_x X d\pi + \beta_y Y d\varrho + \beta_z Z d\omega \}$, такъ что:

$$\delta U_r + \delta U_f = \iint d\sigma (\beta_x X d\pi + \beta_y Y d\varrho + \beta_z Z d\omega) - \\ - \iiint d\xi d\eta d\zeta (\beta_x \Delta_2 \pi d\pi + \beta_y \Delta_2 \varrho d\varrho + \beta_z \Delta_2 \omega d\omega).$$

Остаются теперь только силы категоріи 5-ой; совершенно такимъ-же образомъ мы можемъ взять

$$\delta U_a = \iiint d\xi d\eta d\zeta (M_x d\pi + M_y d\varrho + M_z d\omega).$$

Зная по § 3 выраженіе T , мы по извѣстному способу преобразованія найдемъ:

$$\int dt \delta T = - \int dt \iiint \mu d\xi d\eta d\zeta \left\{ \frac{d^2 \pi}{dt^2} d\pi + \frac{d^2 \varrho}{dt^2} d\varrho + \frac{d^2 \omega}{dt^2} d\omega \right\} + \\ + \left|_{t_0}^{t_1} \iiint \mu d\xi d\eta d\zeta \left\{ \frac{d\pi}{dt} d\pi + \frac{d\varrho}{dt} d\varrho + \frac{d\omega}{dt} d\omega \right\},$$

гдѣ знакомъ $\left|_{t_0}^{t_1} M$ выражена разность значеній M для $t = t_0$ и $t = t_1$.

Но второй членъ въ выраженіи $\int dt \delta T$ равенъ нулю, ибо для обоихъ предѣловъ времени вариации $d\pi$, $d\varrho$, $d\omega$ предполагаются постоянными; остается слѣдовательно только первый членъ.

§ 4. Теперь найдены все части выраженія (3) § 2; подставляя ихъ въ равенство (3) и приравнивая нулю коэффициенты при $d\pi$, $d\varrho$, $d\omega$, вслѣдствіе произвольности послѣднихъ, находимъ слѣдующія три уравненія для эфирной частицы внутри тѣла:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{d^2 \pi}{dt^2} - \left(\frac{\partial X_x}{\partial \xi} + \frac{\partial X_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_x}{\partial \zeta} \right) + R_x + F_x + M_x + \Xi &= 0 \\ -\mu \frac{d^2 \varrho}{dt^2} - \left(\frac{\partial X_y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y_z}{\partial \zeta} \right) + R_y + F_y + M_y + \text{H} &= 0 \\ -\mu \frac{d^2 \omega}{dt^2} - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial \xi} + \frac{\partial Y_z}{\partial \eta} + \frac{\partial Z_z}{\partial \zeta} \right) + R_z + F_z + M_z + \text{Z} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

Подобнымъ образомъ составимъ уравненія для матеріальной частицы, замѣнивъ количества $\mu, \pi, \rho, \omega, \xi, \eta, \zeta, \Xi, \text{H}, \text{Z}$ количествами $m, u, v, w, x, y, z, \text{X}, \text{Y}, \text{Z}$ и остальные величины отмѣтивъ значкомъ ('). Напишемъ ихъ:

$$\left. \begin{aligned} -m \frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{\partial \text{X}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \text{X}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \text{X}'_z}{\partial z} \right) + \text{R}'_x + \text{F}'_x + \text{M}'_x + \text{X} &= 0 \\ -m \frac{d^2v}{dt^2} - \left(\frac{\partial \text{X}'_y}{\partial x} + \frac{\partial \text{Y}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \text{Y}'_z}{\partial z} \right) + \text{R}'_y + \text{F}'_y + \text{M}'_y + \text{Y} &= 0 \\ -m \frac{d^2w}{dt^2} - \left(\frac{\partial \text{Z}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \text{Y}'_z}{\partial y} + \frac{\partial \text{Z}'_z}{\partial z} \right) + \text{R}'_z + \text{F}'_z + \text{M}'_z + \text{Z} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Назвавъ силы въ скобкахъ буквами E_x, E_y, E_z , напишемъ уравненія (I) и (II) въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{d^2\pi}{dt^2} - E_x + \text{R}_x + \text{F}_x + \text{M}_x + \Xi &= 0; \dots \\ -\mu \frac{d^2\rho}{dt^2} - E_y + \text{R}_y + \text{F}_y + \text{M}_y + \text{H} &= 0; \dots \\ -\mu \frac{d^2\omega}{dt^2} - E_z + \text{R}_z + \text{F}_z + \text{M}_z + \text{Z} &= 0; \dots \end{aligned} \right\} \text{(I bis)}$$

и

$$\left. \begin{aligned} -m \frac{d^2u}{dt^2} - E'_x + \text{R}'_x + \text{F}'_x + \text{M}'_x + \text{X} &= 0; \\ -m \frac{d^2v}{dt^2} - E'_y + \text{R}'_y + \text{F}'_y + \text{M}'_y + \text{Y} &= 0; \\ -m \frac{d^2w}{dt^2} - E'_z + \text{R}'_z + \text{F}'_z + \text{M}'_z + \text{Z} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(II bis)}$$

Кромѣ этихъ уравненій остаются еще условія на границахъ тѣла, но они для нашей цѣли не нужны, замѣтимъ только, что они дають основанія для математической теоріи отраженія и преломленія свѣта на границахъ тѣлъ.

ГЛАВА II.

§ 5. Уравненія, написанныя въ предъидущемъ параграфѣ, и суть тѣ общія уравненія вопроса, которыя будутъ служить намъ; онѣ представляютъ обыкновенныя уравненія динамики, примененныя къ нашему случаю. Если-бы мы знали законы внутренняго тренія, развиваемаго при колебательномъ движеніи частицъ, — законы сопротивленія и остающагося взаимодѣйствія между частицами, то тогда вопросъ должно бы считать окончатель-но рѣшеннымъ, но, къ сожалѣнію, упомянутые законы неизвѣстны, и мы почти ничего точнаго не знаемъ о молекулярныхъ взаимодѣйствіяхъ внутри тѣла; поэтому намъ придется сдѣлать о силахъ R , F и M только болѣе или менѣе вѣроятныя гипотезы и провѣрить ихъ справедливость *à posteriori*, т. е. степенью согласія выводовъ съ данными опыта.

§ 6. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію примененій полученныхъ уравненій, полезно указать на то важное свойство уравненій § 4, которое состоитъ въ возможности вывода изъ этихъ уравненій тѣхъ, которыя служатъ основаніями главнѣйшихъ изъ существующихъ теорій, какъ-то теорій Коши, Неймана, Кеттелера, Ломмеля и др.*. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы увидимъ и недостаточность нѣкоторыхъ изъ этихъ теорій, и тѣ пункты, которые потребуютъ улучшеній.

§ 7. Одни изъ первыхъ по времени появленія теоріи Коши и Неймана основаны на предположеніяхъ, что матеріальныя частицы непосредственнаго участія въ явленіяхъ двойного преломленія не принимаютъ и что здѣсь дѣйствуютъ только однѣ силы упругости эфира. Полагая поэтому $u = v = w = 0$, также полагая, что силы R , F и M не имѣютъ мѣста, мы получимъ урав-

* О теоріяхъ Грина и Лямэ говорить не будемъ вслѣдствіе доказанной ихъ невѣрности. См. *Saint-Venant, Sur les manières diverses etc.*

ненія въ той формѣ, въ какой ихъ употреблялъ Нейманъ¹, подставивъ только значеніе упругихъ силъ, данныхъ въ § 3; что-же касается уравненій Коши², то они отличаются отъ уравненій Неймана только по формѣ выраженій для упругихъ силъ. Дѣйствительно, Коши выражаетъ силы X_x, Y_y, \dots въ функціяхъ междучастичнаго разстоянія и перемѣщеній частицы, но его выраженія могутъ быть, какъ извѣстно, преобразованы въ тѣ, которыя употреблены здѣсь; наши же уравненія (1 bis) не зависятъ отъ вида выраженій упругихъ силъ.

Однако необходимо замѣтить слѣдующую существенную разницу между тою и другою теоріями. Уравненія Коши не только позволяютъ дать теорію двойнаго лучепреломленія, но и теорію нормального свѣторазсѣянія, хотя и не вполне состоятельную; теорія же Неймана этимъ качествомъ не обладаетъ. За-тѣмъ существуютъ еще другія отличія обѣихъ теорій, отличія, обусловленные способомъ вывода слѣдствій изъ основныхъ уравненій; такъ, плоскости поляризацій въ той и другой теоріи не совпадаютъ, а взаимно перпендикулярны.

Въ настоящее время теорія двойнаго преломленія Коши подверглась строгой критикѣ со стороны нѣкоторыхъ физиковъ; такъ, Лянгъ³ доказываетъ, что исходя изъ уравненій Коши, мы приходимъ къ неправильнымъ заключеніямъ: получается равенство скоростей обѣихъ лучей, идущихъ въ плоскости главнаго сѣченія кристалла. Надо прибавить, что тѣ измѣненія, которымъ подвергаетъ самъ Лянгъ уравненія Коши, крайне гипотетичны, именно — Лянгъ допускаетъ зависимость силы взаимодѣйствія между двумя эфирными частицами не только отъ разстоянія, но и отъ направленія. Матье же⁴ вообще доказываетъ несостоятельность теоріи свѣта, данной Коши.

¹ Poggendorff's Annalen. Bd. XXV. S. 418 — 454.

² Mémoires de l'Académie de Paris. T. XVIII. p. 153 — 216.

³ Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. St. S. 369 (1880).

⁴ Journal de Liouville. 3 série. t. VII, p. 201 (1881).

Г Л А В А III.

§ 8. Перейдемъ къ теоріи Кеттелера, предложенной имъ въ различныхъ редакціяхъ.

Кеттелеръ полагаетъ сначала, что треніе и сопротивленіе среды выражается въ измѣненіи упругости ея частицъ; поэтому, на основаніи замѣчаній § 3 о силахъ R и F , мы должны взять:

$$\begin{aligned} F_x + R_x &= -\alpha_x \varepsilon_x \Delta_2 \pi, & F_y + R_y &= -\alpha_y \varepsilon_y \Delta_2 \rho, \\ F_z + R_z &= -\alpha_z \varepsilon_z \Delta_2 \omega, \end{aligned}$$

причемъ α и ε суть коэффициенты, зависящіе отъ тренія и сопротивленія; подобнымъ образомъ:

$$F'_x + R'_x = \alpha_x \varepsilon'_x \Delta_2 u, \quad F'_y + R'_y = \alpha_y \varepsilon'_y \Delta_2 v, \quad F'_z + R'_z = \alpha_z \varepsilon'_z \Delta_2 w$$

причемъ коэффициентъ α остается одинъ и тотъ-же вслѣдствіе взаимности происхожденія тренія и сопротивленія. За-тѣмъ, предполагая эфиръ изотропнымъ и несжимаемымъ внутри тѣла, а упругость матеріальной среды въ сравненіи съ упругостью эфира крайне незначительною, имѣемъ:

$$\begin{aligned} E_x &= e \Delta_2 \pi, & E_y &= e \Delta_2 \rho, & E_z &= e \Delta_2 \omega \\ E'_x &= 0, & E'_y &= 0, & E'_z &= 0. \end{aligned}$$

Что касается силъ взаимодействія M , то можно принять, что эти силы пропорціональны самымъ перемѣщеніямъ; кромѣ того теорія Кеттелера вводитъ, не явно впрочемъ, еще нѣкоторыя неизвѣстныя силы взаимодействія эфира¹; назовемъ послѣднія U . И такъ:

¹ Ниже они будутъ рассмотрѣны подробнѣе. Въ другой своей работѣ о двойномъ преломленіи Кеттелеръ уже вводитъ ихъ явно. См. Wied. Ann. Bd. VII. S. 94 (1879).

$$\begin{aligned} M_x &= -\alpha_x k_x \pi + U_x, & M'_x &= -\alpha_x k'_x u, \\ M_y &= -\alpha_y k_y \varrho + U_y, & M'_y &= -\alpha_y k'_y v, \\ M_z &= -\alpha_z k_z \omega + U_z, & M'_z &= -\alpha_z k'_z w. \end{aligned}$$

Подставляя все это въ основныя уравненія § 4, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \mu \cdot \frac{d^2 \pi}{dt^2} &= e \Delta_2 \pi - \alpha_x (\varepsilon_x \Delta_2 \pi + k_x \pi) + U_x, \\ \mu \cdot \frac{d^2 \varrho}{dt^2} &= e \Delta_2 \varrho - \alpha_y (\varepsilon_y \Delta_2 \varrho + k_y \varrho) + U_y, \\ \mu \cdot \frac{d^2 \omega}{dt^2} &= e \Delta_2 \omega - \alpha_z (\varepsilon_z \Delta_2 \omega + k_z \omega) + U_z. \end{aligned} \right\} (1)$$

и для матеріальной частицы:

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} &= \alpha_x (\varepsilon'_x \Delta_2 u + k'_x u) + U'_x, \\ m \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} &= \alpha_y (\varepsilon'_y \Delta_2 v + k'_y v) + U'_y, \\ m \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} &= \alpha_z (\varepsilon'_z \Delta_2 w + k'_z w) + U'_z. \end{aligned} \right\} (2)$$

Не вводя силъ U'_x , U'_y , U'_z , уравненіе (4) не можетъ существовать, ибо приводитъ къ нелѣпости въ случаѣ поглощающихъ срединъ. Для непоглощающихъ

$$U'_x = U'_y = U'_z = 0.$$

Чтобы получить изъ этой системы основныя уравненія Кеттелеровой теоріи, умножимъ уравненія (1) по порядку на A_x , A_y , A_z , подразумѣвая подъ этими послѣдними амплитуды составляющихъ колебанія эфирной частицы; складываемъ результаты и допускаемъ, что неизвѣстныя силы U удовлетворяютъ равенству:

$$A_x U_x + A_y U_y + A_z U_z = 0, \quad (a)$$

находимъ:

$$\mu \left(A_x \frac{d^2 \pi}{dt^2} + A_y \frac{d^2 \rho}{dt^2} + A_z \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) - e (A_x \Delta_2 \pi + A_y \Delta_2 \rho + A_z \Delta_2 \omega) + \\ \alpha_x A_x (\varepsilon_x \Delta_2 \pi + k_x \pi) + \alpha_y A_y (\varepsilon_y \Delta_2 \rho + k_y \rho) + \\ + \alpha_z A_z (\varepsilon_z \Delta_2 \omega + k_z \omega) = 0. \quad (3)$$

Это есть первое основное уравнение теории Кеттелера, развитой им первоначально¹. Умножая за-тѣмъ уравненія (2) на A'_x , A'_y , A'_z , гдѣ A'_x , A'_y , A'_z суть составляющія амплитуды колебанія матеріальной частицы, находимъ

$$\left. \begin{aligned} m A'_x \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} &= A'_x \alpha_x (\varepsilon'_x \Delta_2 u + k'_x u), \\ m A'_y \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} &= A'_y \alpha_y (\varepsilon'_y \Delta_2 v + k'_y v), \\ m A'_z \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} &= A'_z \alpha_z (\varepsilon'_z \Delta_2 w + k'_z w). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Это суть вторыя уравненія разсматриваемой теории.

Изъ тѣхъ-же основныхъ уравненій (1) и (2) можно получить выраженіе, не вполнѣ правильно называемое интеграломъ живыхъ силъ, которымъ Кеттелеръ пользуется въ своей теории. Умножая эти уравненія по порядку на

$$2 \frac{d\pi}{dt}, \quad 2 \frac{d\rho}{dt}, \quad 2 \frac{d\omega}{dt},$$

и складывая результаты, найдемъ:

$$\mu \cdot d. \left[\left(\frac{d\pi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] + \\ + m \cdot d. \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] = \\ = 2e (\Delta_2 \pi \cdot d\pi + \Delta_2 \rho \cdot d\rho + \Delta_2 \omega \cdot d\omega) - \{ \alpha_x [(\varepsilon_x \Delta_2 \pi + k_x \pi) d\pi - \\ - (\varepsilon'_x \Delta_2 u + k'_x u) du] + \alpha_y [(\varepsilon_y \Delta_2 \rho + k_y \rho) d\rho - (\varepsilon'_y \Delta_2 v + k'_y v) dv] + \\ + \alpha_z [(\varepsilon_z \Delta_2 \omega + k_z \omega) d\omega - (\varepsilon'_z \Delta_2 w + k'_z w) dw] \} + \\ U_x d\pi + U_y d\rho + U_z d\omega.$$

¹ Pog. Ann. Ergb. VIII. S. 444—474 (1878).

$$\text{Но } \frac{d\pi}{A_x} = \frac{d\rho}{A_y} = \frac{d\omega}{A_z} = \frac{du}{A'_x} = \frac{dv}{A'_y} = \frac{dw}{A'_z}, \quad (b)$$

ибо можно взять: $\pi = A_x \cos Q$, $u = A'_x \cos Q$, и т. п.

гдѣ $Q = qt - \frac{q \cdot r}{c}$, $q = \frac{2\pi}{\tau}$ и c — скорость свѣта вдоль направления r , τ времяодного колебанія частицы эфира, слѣдовательно въ силу равенствъ (a) и (b) остаются въ написанномъ уравненіи только первые три члена, именно:

$$\begin{aligned} & \mu \cdot d. \left[\left(\frac{d\pi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] + \\ & + m \cdot d. \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = 2e(\Delta_2 \pi \cdot d\pi + \Delta_2 \rho \cdot d\rho + \Delta_2 \omega \cdot d\omega). \end{aligned}$$

Подставляя сюда значенія π , u , ... и интегрируя между нѣкоторыми двумя предѣлами t , находимъ:

$$2\pi^2 \left(\frac{\mu A^2}{\tau^2} + \frac{mA'^2}{\tau^2} \right) \cdot \sin^2 Q = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} eA^2 \cdot \int \cos Q \cdot \sin Q dQ;$$

но $\int \cos Q \sin Q \cdot dQ = \frac{\sin^2 Q}{2} + \text{постоянное}$; слѣдовательно,

взявъ предѣлами t такія два значенія, чтобы имъ соотвѣтствовали значенія Q равныя 0 и Q , получимъ окончательно:

$$\frac{\mu A^2}{\tau^2} + \frac{mA'^2}{\tau^2} = \frac{eA^2}{l^2} \quad (8)$$

причемъ $l = c \cdot \tau$ есть длина волны внутри тѣла.

Необходимо замѣтить, что послѣднее равенство справедливо только для случая колебаній непоглощаемыхъ, какъ это показываютъ равенства (b), равенства же (3), (4), (5) и (6) существуютъ для всякихъ срединъ — поглощающихъ и непоглощающихъ, хотя способъ вывода этихъ уравненій, предложенный самимъ Кеттелеромъ, основанъ на допущеніи перваго случая и только распространенъ безъ доказательства на второй.

§ 9. Умножимъ теперь уравненія (1) и (2) на A_x , A_y , A_z , A'_x , A'_y и A'_z и сложимъ; тогда получимъ уравненіе:

$$\begin{aligned} & \mu \cdot \left(A_x \frac{d^2 \pi}{dt^2} + A_y \frac{d^2 \rho}{dt^2} + A_z \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) + m \left(A'_x \frac{d^2 u}{dt^2} + A'_y \frac{d^2 v}{dt^2} + A'_z \frac{d^2 w}{dt^2} \right) = \\ & = e (A_x \Delta_2 \pi + A_y \Delta_2 \rho + A_z \Delta_2 \omega) - \left\{ \alpha_x [A_x (\varepsilon_x \Delta_2 \pi + \kappa_x \pi) - \right. \\ & - A'_x (\varepsilon'_x \Delta_2 u + \kappa'_x u)] + \alpha_y [A_y (\varepsilon_y \Delta_2 \rho + \kappa_y \rho) - A'_y (\varepsilon'_y \Delta_2 v + \\ & + \kappa'_y v)] + \alpha_z [A_z (\varepsilon_z \Delta_2 \omega + \kappa_z \omega) - A'_z (\varepsilon'_z \Delta_2 w + \kappa'_z w)] \right\}, \text{ ибо} \\ & A_x U_x + A_y U_y + A_z U_z = 0, \quad A'_x U'_x + A'_y U'_y + A'_z U'_z = 0. \end{aligned}$$

Кеттелеръ предполагаетъ, что если матеріальныя частицы отнесены къ своимъ осямъ упругости, то написанное уравненіе распадается на слѣдующія:

$$\begin{aligned} & \mu \cdot \left(A_x \frac{d^2 \pi}{dt^2} + A_y \frac{d^2 \rho}{dt^2} + A_z \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right) + m \left(A'_x \frac{d^2 u}{dt^2} + A'_y \frac{d^2 v}{dt^2} + \right. \\ & \left. + A'_z \frac{d^2 w}{dt^2} \right) = e (A_x \Delta_2 \pi + A_y \Delta_2 \rho + A_z \Delta_2 \omega); \quad (5) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A_x (\varepsilon_x \Delta_2 \pi + \kappa_x \pi) &= A'_x (\varepsilon'_x \Delta_2 u + \kappa'_x u), \\ A_y (\varepsilon_y \Delta_2 \rho + \kappa_y \rho) &= A'_y (\varepsilon'_y \Delta_2 v + \kappa'_y v), \\ A_z (\varepsilon_z \Delta_2 \omega + \kappa_z \omega) &= A'_z (\varepsilon'_z \Delta_2 w + \kappa'_z w). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Кеттелеръ даетъ выведенныя нами уравненія на основаніи теоремы о работѣ силъ внутри среды, предполагая, что работа каждой силы выражается произведеніемъ силы на соответствующее перемѣщеніе, пропорціональное амплитудѣ соответственнаго колебанія, причемъ однако въ способѣ вывода заключается много произвольнаго.

§ 10. Кромѣ уравненій, развитыхъ въ предъидущемъ параграфѣ, Кеттелеръ предложилъ еще другія, но, какъ сейчасъ увидимся, второй способъ рѣшенія дѣла несостоятеленъ.

Кеттелеръ¹ въ 1879 году далъ слѣдующія уравненія для дисперсіи:

¹ Wied. Ann. Bd. VII, S. 668 (1879).

$$\mu \cdot SA_x \cdot \frac{d^2\pi}{dt^2} + mf' \cdot SA'_x \frac{d^2u}{dt^2} = e \cdot SA_x \Delta_2 \pi \quad (1)$$

$$\mu f \cdot SA_x \cdot \frac{d^2\pi}{dt^2} + m \cdot SA'_x \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = S \left(\kappa u + \gamma \frac{du}{dt} \right) A'_x \quad (2)$$

причем f' , f , κ и γ суть некоторые постоянные коэффициенты.

Чтобъ убедиться въ невѣрности уравненій (1) и (2), назовемъ составляющія силы, дѣйствующихъ на эфирную частицу, буквами E_x , $N_x \dots$ и на матеріальную — E'_x , N'_x, \dots , тогда непременно существуютъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{d^2\pi}{dt^2} &= E_x + N_x, & m \frac{d^2u}{dt^2} &= E'_x + N'_x; \\ \mu \frac{d^2\rho}{dt^2} &= E_y + N_y, & m \frac{d^2v}{dt^2} &= E'_y + N'_y; \\ \mu \frac{d^2\omega}{dt^2} &= E_z + N_z, & m \frac{d^2w}{dt^2} &= E'_z + N'_z. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Здѣсь:

$$\begin{aligned} E_x &= e\Delta_2\pi, & E_y &= e\Delta_2\rho, & E_z &= e\Delta_2\omega, \\ E'_x &= \kappa u, & E'_y &= \kappa v, & E'_z &= \kappa w, \\ N'_x &= \gamma \frac{du}{dt}, & N'_y &= \gamma \frac{dv}{dt}, & N'_z &= \gamma \frac{dw}{dt}, \end{aligned}$$

силы же N_x , N_y , N_z суть неизвѣстныя силы реакціи матеріальной среды на эфиръ; можно также, кромѣ силъ E' и N' , ввести еще какія-нибудь силы, но отъ этого ходъ разсужденій и выводы не измѣняются.

Умножая уравненія (A) соотвѣтственно на A_x , A_y , A_z и $f' A'_x$, $f' A'_y$, $f' A'_z$, по сложеніи результатовъ, принимая во вниманіе уравненіе (1), найдемъ:

$$SA_x N_x + f' \cdot SA'_x (E'_x + N'_x) = 0. \quad (a)$$

Точно такъ-же, умножая уравненія (A) соотвѣтственно на fA_x , fA_y , fA_z и A'_x , A'_y , A'_z и складывая результаты, найдемъ при помощи равенства (2):

$$(1) \quad f \cdot S \cdot A_x (E_x + N_x) = 0,$$

но f не равно нулю, слѣдовательно:

$$(2) \quad SA_x (E_x + N_x) = 0 \quad (b)$$

или

$$(3) \quad SA_x E_x = -SA_x N_x \quad (c)$$

И такъ, уравненія Кеттелера (1) и (2) требуютъ существованія условій (a) и (b) или (c).

Посмотримъ, къ чему они приводятъ:

Умножая (1) уравненіе на (f) и вычитая отсюда (2), имѣемъ:

$$(4) \quad mff' SA'_x \frac{d^2 u}{dt^2} - mSA'_x \frac{d^2 u}{dt^2} = f' \cdot SA_x E_x - SA'_x (E'_x + N'_x),$$

или:

$$(5) \quad m(ff' - 1) \cdot SA'_x \frac{d^2 u}{dt^2} = f' SA_x E_x - SA'_x (E'_x + N'_x) \quad (d)$$

Но по (c) и (a) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} f' \cdot SA_x E_x &= -f' \cdot SA_x N_x \\ S \cdot A'_x (E'_x + N'_x) &= \frac{1}{f'} SA_x N_x \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

поэтому (d) обращается въ слѣдующее:

$$(6) \quad m(ff' - 1) \cdot SA'_x \frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{f'^2 - 1}{f'} SA_x N_x \quad (e)$$

Коэффициентъ ff' по теоріи Кеттелера не можетъ быть единицей¹; относительно f' должно сказать то-же самое.

Также получимъ, умноживъ (2) уравненіе на f' и вычтя изъ (1), слѣдующее равенство:

$$(7) \quad (1 - ff') \mu \cdot SA_x \frac{d^2 \pi}{dt^2} = SA_x E_x - f' S (E'_x + N'_x) A'_x \quad (f)$$

¹ Wied. Ann. Bd. VII, S. 664.

или при помощи (α):

$$(1 - ff')\mu \cdot SA_x \cdot \frac{d^2\pi}{dt^2} = 0, \quad \text{или}$$

$$SA_x \frac{d^2\pi}{dt^2} = 0 \quad (h)$$

Поэтому и $SA_x E_x = 0$, слѣдовательно по (e) и (α)

$$SA'_x \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = 0 \quad (k)$$

Но ясно, что условія (h) и (k) невозможны, ибо приводятъ по интегрированіи къ результатамъ:

$$\begin{aligned} A_x\pi + A_y\varrho + A_z\omega &= Ct + C_1 \\ A'_xu + A'_yv + A'_zw &= C't + C'_1, \end{aligned}$$

что невозможно въ случаѣ колебательныхъ движеній.

Такимъ образомъ заключаемъ, что уравненія (1) и (2) Кеттелера не могутъ существовать, а потому и выводы изъ нихъ не могутъ быть приняты, такъ что тѣ формулы, которыя провѣрялъ Кеттелеръ¹, имъ не получены раціональнымъ путемъ.

§ 11. Примѣняя уравненія (3) § 2 къ обѣимъ системамъ одновременно, и полагая:

$$u = \alpha_x\pi, \quad v = \alpha_y\varrho, \quad w = \alpha_z\omega \quad (a)$$

причемъ $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, суть нѣкоторые коэффициенты, найдемъ, по преобразованіи интеграла и приравниваніи нулю коэффициентовъ при $d\pi, d\varrho, d\omega$, слѣдующія уравненія:

$$\left. \begin{aligned} (\mu + m\alpha_x^2) \cdot \frac{d^2\pi}{dt^2} - U_x &= e\Delta_2\pi, \\ (\mu + m\alpha_y^2) \cdot \frac{d^2\varrho}{dt^2} - U_y &= e\Delta_2\varrho, \\ (\mu + m\alpha_z^2) \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} - U_z &= e\Delta_2\omega, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

при этомъ было положено:

¹ Wied. Ann. Bd. XII, S. 363 and S. 481 (1881).

$$\delta U_i = (e\Delta_2\pi + U_x) \cdot \delta\pi + (e\Delta_2\varrho + U_y) \delta\varrho + (e\Delta_2\omega + U_z) \delta\omega$$

или

$$\delta U_i = e(\Delta_2\pi \delta\pi + \Delta_2\varrho \delta\varrho + \Delta_2\omega \delta\omega) + (U_x \delta\pi + U_y \delta\varrho + U_z \delta\omega) \quad (I)$$

и ясно, что первый членъ въ скобкахъ представляетъ элементарную работу упругихъ силъ, а второй — остальныхъ силъ взаимодействія.

Полагая въ уравненіяхъ (I):

$$m\alpha_x^2 = m_x, \quad m\alpha_y^2 = m_y, \quad m\alpha_z^2 = m_z$$

и допуская, что

$$AU_x + BU_y + CU_z = 0, \quad (b)$$

тогда уравненія (I) дадутъ:

$$S \cdot (\mu + m_x) \cdot \frac{d^2\pi}{dt^2} \cdot A_x = eSA_x \cdot \Delta_2\pi. \quad (II)$$

Подставляя сюда значеніе π , ϱ , ω изъ § 25 въ предположеніи $K=0$, найдемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{m_x}{\mu} A^2 + \frac{m_y}{\mu} B^2 + \frac{m_z}{\mu} C^2 \quad \text{или}$$

$$n^2 - 1 = a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 C^2. \quad (III)$$

Это уравненіе¹ того-же вида, какъ и уравненіе (a) въ § 13, и даетъ выводы, помѣщенные въ §§ 13—18.

Замѣтимъ, что предположенія (a) суть упрощенныя предположенія Буссинеска².

Если въ уравненіяхъ (I) сдѣлаемъ:

$$U_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad U_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

¹ Замѣтимъ, что это уравненіе требуетъ перпендикулярности колебаній къ лучу.

² Journal de Liouville. 2 série, t. XIII, p. 330 (1868).

и затѣмъ положимъ:

$$p = P \cos Q,$$

то получимъ уравненія Кеттелера, данныя имъ въ 1879 г.¹; они приводятъ къ тѣмъ-же результатамъ, что и уравненіе (II).

Если положимъ, что

$$\frac{m_x}{\mu} + 1 = n_x^2 - 1; \quad \frac{m_y}{\mu} + 1 = n_y^2 - 1; \quad \frac{m_z}{\mu} + 1 = n_z^2 - 1;$$

то n_x, n_y, n_z будутъ главными показателями преломленія тѣла.

Хотя въ этой теоріи мы получаемъ основаніе для двойнаго преломленія, но не имѣемъ зависимости показателей преломленія отъ длины волны, т. е. теоріи дисперсіи не получается.

И такъ, заключаемъ, что *и эта теорія Кеттелера не можетъ считаться вполне состоятельною.*

§ 12. Займемся теперь дальнѣйшимъ развитіемъ первоначальной теоріи Кеттелера, основанія которой изложены въ §§ 8 и 9.

Подставляя въ уравненія (3) и (4) значенія $\pi, u \dots$ изъ § 25, въ предположеніи $K = 0$, находимъ:

$$\mu c^2 = e - [\alpha_x(\varepsilon_x - l^2 \kappa_x) A^2 + \alpha_y(\varepsilon_y - l^2 \kappa_y) B^2 + \alpha_z(\varepsilon_z - l^2 \kappa_z) C^2] \quad (1)$$

Здѣсь A, B, C суть косинусы направленія колебанія и для простоты письма написаны коэффициенты $\kappa_x \dots$, вмѣсто $\frac{4\pi^2}{\kappa_x}, \dots$; потомъ

$$m c^2 = \alpha_x(\varepsilon'_x - \kappa'_x l^2) = \alpha_y(\varepsilon'_y - \kappa'_y l^2) = \alpha_z(\varepsilon'_z - \kappa'_z l^2). \quad (1)$$

Подставляя отсюда значеніе $\alpha_x \dots$ въ (1) находимъ:

$$\mu c^2 = e - m c^2 \left[\frac{\varepsilon_x - \kappa_x l^2}{\varepsilon'_x - \kappa'_x l^2} A^2 + \frac{\varepsilon_y - \kappa_y l^2}{\varepsilon'_y - \kappa'_y l^2} B^2 + \frac{\varepsilon_z - \kappa_z l^2}{\varepsilon'_z - \kappa'_z l^2} C^2 \right]$$

¹ Wied. Annalen. Bd. VII, S. 102 (1879).

Но $\frac{e}{\mu} = \Omega^2, \frac{\Omega}{c} = n$ — показатель преломления среды, поэтому:

$$n^2 - 1 = \frac{m}{\mu} \left[\frac{\varepsilon_x - \kappa_x l^2}{\varepsilon'_x - \kappa'_x l^2} A^2 + \frac{\varepsilon_y - \kappa_y l^2}{\varepsilon'_y - \kappa'_y l^2} B^2 + \frac{\varepsilon_z - \kappa_z l^2}{\varepsilon'_z - \kappa'_z l^2} C^2 \right] \quad (3)$$

Положимъ:

$\frac{\varepsilon'_x}{\kappa'_x} = l_x^2, \frac{\varepsilon'_y}{\kappa'_y} = l_y^2, \frac{\varepsilon'_z}{\kappa'_z} = l_z^2$, тогда уравнения (2) даютъ:

$$\kappa'_x \alpha_x (l_x^2 - l^2) = \kappa'_y \alpha_y (l_y^2 - l^2) = \kappa'_z \alpha_z (l_z^2 - l^2).$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $l=0$ и $l=\infty$, найдемъ:

$$\kappa'_x \alpha_x l_x^2 = \kappa'_y \alpha_y l_y^2 = \kappa'_z \alpha_z l_z^2,$$

$$\kappa'_x \alpha_x = \kappa'_y \alpha_y = \kappa'_z \alpha_z, \text{ откуда}$$

$l_x^2 = l_y^2 = l_z^2 = l_0^2$, полагая общее значеніе l_x, l_y, l_z равнымъ l_0 ;

положимъ далѣе:

$$\frac{m}{\mu} \left(\frac{\kappa_x}{\kappa'_x} - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x} \right) = a_x, \quad \frac{m}{\mu} \left(\frac{\kappa_y}{\kappa'_y} - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon'_y} \right) = a_y,$$

$$\frac{m}{\mu} \left(\frac{\kappa_z}{\kappa'_z} - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'_z} \right) = a_z,$$

тогда уравненіе (3) приметъ видъ:¹

$$(1) \quad n^2 - 1 = \frac{\frac{m}{\mu} \left(\frac{\varepsilon_x}{\kappa'_x} - \frac{\kappa_x}{\kappa'_x} l^2 \right) A^2 + \frac{m}{\mu} \left(\frac{\varepsilon_y}{\kappa'_y} - \frac{\kappa_y}{\kappa'_y} l^2 \right) B^2 + \frac{m}{\mu} \left(\frac{\varepsilon_z}{\kappa'_z} - \frac{\kappa_z}{\kappa'_z} l^2 \right) C^2}{l_0^2 - l^2}$$

Но

$$\frac{m}{\mu} \frac{\kappa_x}{\kappa'_x} A^2 + \frac{m}{\mu} \frac{\kappa_y}{\kappa'_y} B^2 + \frac{m}{\mu} \frac{\kappa_z}{\kappa'_z} C^2 = a_x A^2 + a_y B^2 + a_z C^2 +$$

$$+ E_x A^2 + E_y B^2 + E_z C^2 = a + E, \text{ если положимъ:}$$

¹ Необходимо помнить, что здѣсь вездѣ n есть показатель преломления луча, т. е. принимаемъ, какъ и выше, перпендикулярность колебаний къ лучу.

$$a_x A^2 + a_y B^2 + a_z C^2 = a$$

$$\frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x} = E_x, \quad \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon'_y} = E_y, \quad \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon'_z} = E_z \quad \text{и}$$

$$E_x \cdot A^2 + E_y \cdot B^2 + E_z \cdot C^2 = E; \quad \text{далѣе}$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\kappa'_x} \cdot A^2 + \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_y}{\kappa'_y} \cdot B^2 + \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_z}{\kappa'_z} \cdot C^2 = \\ = l_0^2 (E_x \cdot A^2 + E_y \cdot B^2 + E_z \cdot C^2) = l_0^2 E. \end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$n^2 - 1 = \frac{al^2 + (l^2 - l_0^2)E}{l^2 - l_0^2}, \quad \text{или}$$

$$n^2 - 1 = E + \frac{al^2}{l^2 - l_0^2} \quad (\text{I}) \quad \text{или еще}$$

$$n^2 - 1 = E + \frac{a}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} \quad (\text{I})$$

Полагая здѣсь $l=0$ и $l=\infty$ и n_0 и n_∞ называя соотвѣтствующія значенія n , имѣемъ:

$$n_0^2 - 1 = E$$

$$n_\infty^2 - 1 = E + a.$$

Вычитая эти уравненія изъ (I), найдемъ:

$$n^2 - n_0^2 = \frac{al^2}{l^2 - l_0^2}, \quad n^2 - n_\infty^2 = \frac{al_0^2}{l^2 - l_0^2}. \quad (\text{II})$$

Послѣднія двѣ формулы найдены Кеттелеромъ.

Формула (II) была подвергнута опытной повѣркѣ Клаесомъ¹ и Зибеномъ².

¹ Wied. Ann. Bd. III, S. 389 (1878).

² Wied. Ann. Bd. VII, S. 137 (1879).

§ 13. Перейдемъ теперь къ двойному преломленію свѣта.

Равенство (I), послѣ обратной подстановки въ него значеній E и a , обращается въ слѣдующее:

$$n^2 - 1 = \left(E_x + \frac{a_x}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} \right) A^2 + \left(E_y + \frac{a_y}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} \right) B^2 + \left(E_z + \frac{a_z}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} \right) C^2 \quad (a)$$

Замѣняя единицу лѣвой части этого уравненія трехчленомъ $A^2 + B^2 + C^2$, перенося его въ правую и полагая:

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} E_x + \frac{a_x}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} &= n_x^2 - 1, \\ E_y + \frac{a_y}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} &= n_y^2 - 1, \\ E_z + \frac{a_z}{1 - \frac{l_0^2}{l^2}} &= n_z^2 - 1, \end{aligned} \right\} \text{имѣемъ:} \quad (1)$$

$$n^2 = n_x^2 A^2 + n_y^2 B^2 + n_z^2 C^2 \quad (2)$$

Физическій смыслъ n_x , n_y , n_z очевиденъ: это суть главные показатели преломленія тѣла, и уравненія (1) даютъ формулы для вычисленія дисперсіи осей кристалла.

§ 14. Уравненіе (2) послужитъ намъ исходнымъ пунктомъ для дальнѣйшихъ выводовъ теоріи.

Проведемъ изъ какой-нибудь точки внутри тѣла прямую, параллельную колебанію эфирной частицы, и отложимъ на ней длину равную $\frac{1}{n}$, тогда, если x , y , z будутъ координаты конца этой прямой, имѣемъ:

$$\frac{A}{n} = x, \quad \frac{B}{n} = y, \quad \frac{C}{n} = z.$$

Подставляя отсюда значеніе A, B, C въ уравненіе (2), имѣемъ:

$$n_x^2 \cdot x^2 + n_y^2 \cdot y^2 + n_z^2 \cdot z^2 = 1. \quad (3)$$

Послѣднее уравненіе представляетъ эллипсоидъ, отнесенный къ своимъ осямъ, поэтому, если черезъ данную точку будутъ передаваться колебанія во всѣ стороны, то геометрическое мѣсто концовъ прямыхъ длины $\frac{1}{n}$ будетъ эллипсоидъ (3). Такимъ образомъ получимъ слѣдующее правило: чтобы опредѣлить показатель преломленія световой волны, распространяющейся въ данномъ направленіи, надо провести радіусъ-векторъ эллипсоида (3), параллельный направленію колебанія въ этой волнѣ, и обратная величина этого радіуса-вектора будетъ искомымъ показателемъ преломленія.

Такъ-какъ эллипсоидъ (3) даетъ $\frac{1}{n}$, а $n = \frac{c_0}{c}$ и c_0 извѣстно, то слѣдовательно его можно назвать эллипсоидомъ показателей преломленія. По старой терминологіи, это есть эллипсоидъ Фрэнэля.

Принявъ $c_0 = 1$, тогда всякій радіусъ-векторъ эллипсоида (3) будетъ равенъ скорости c въ данномъ направленіи радіуса-вектора.

§ 15. Найдемъ сѣченіе эллипсоида показателей преломленія плоскостью параллельной элементарной волнѣ и проведенной черезъ центръ его.

Уравненіе этой плоскости есть:

$$mx + ny + pz = 0^1. \quad (4)$$

Въ сѣченіи эллипсоида (3) плоскостью (4) получимъ эллипсисъ, полуоси котораго суть корни, какъ извѣстно изъ геометріи², слѣдующаго уравненія:

¹ Не надо смѣшивать косинуса n съ показателемъ n .

² См. напр. Salmon, A treatise on the analytic geometry of three dimensions. 3 ed., p. 67, § 101.

$$(5) \quad \frac{m^2}{1-n_x^2 s^2} + \frac{n^2}{1-n_y^2 s^2} + \frac{p^2}{1-n_z^2 s^2} = 0,$$

въ которомъ s и есть какая-нибудь изъ полюсей; но если по-ложимъ:

$$n_x = \frac{c_0}{\alpha}, \quad n_y = \frac{c_0}{\beta}, \quad n_z = \frac{c_0}{\gamma},$$

причемъ физическое значеніе α , β , γ понятно, тогда уравненіе (5) превращается въ слѣдующее:

$$\frac{\alpha^2 m^2}{\alpha^2 - c_0^2 s^2} + \frac{\beta^2 n^2}{\beta^2 - c_0^2 s^2} + \frac{\gamma^2 p^2}{\gamma^2 - c_0^2 s^2} = 0.$$

Но по предъидущему

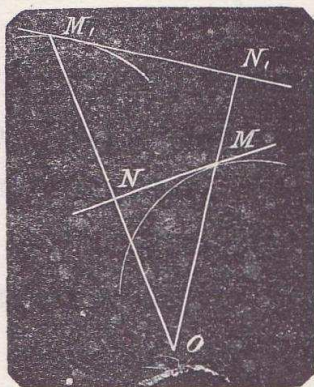
$$m = \frac{x}{c_0 s}, \quad n = \frac{y}{c_0 s}, \quad p = \frac{z}{c_0 s},$$

и положивъ для удобства:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \text{имѣемъ:}$$

$$\frac{\alpha^2 x^2}{\alpha^2 - \rho^2} + \frac{\beta^2 y^2}{\beta^2 - \rho^2} + \frac{\gamma^2 z^2}{\gamma^2 - \rho^2} = 0. \quad (1)$$

Это, какъ извѣстно и какъ ниже будетъ показано, есть по-верхность волны внутри кристалла.



§ 16. Построимъ поверхность взаимно по-лярную эллипсоиду (3). Пусть M будетъ точка касанія на эллипсоидѣ (3) и ON нор-маль къ касательной плоскости изъ центра O .

Найдемъ геометрическое мѣсто точекъ M_1 такихъ, что $OM_1 \cdot ON = 1$.

Если x_1, y_1, z_1 будутъ координаты M_1 , X, Y, Z переменныя координаты какой-нибудь точки каса-тельной плоскости, напр. точки N , и x, y, z координаты M , тогда имѣемъ для рѣшенія задачи слѣдующія уравненія:

$$(a) \quad n_x^2 \cdot x_1^2 + n_y^2 \cdot y_1^2 + n_z^2 \cdot z_1^2 = 1 \quad \text{уравненіе эллипсоида (3)}$$

(β) $n_x^2 \cdot x_1 \cdot X + n_y^2 \cdot y_1^2 \cdot Y + n_z^2 \cdot z_1 = 1$ — уравнение касательной плоскости,

(γ) $\frac{X}{n_x^2 \cdot x_1} = \frac{Y}{n_y^2 \cdot y_1} = \frac{Z}{n_z^2 \cdot z_1}$ уравнение нормала къ ней и

(δ) $\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{OM_1}{ON} = \frac{1}{ON^2}$.

Опредѣляя X, Y, Z изъ (β) и (γ), найдемъ:

$$X = \frac{n_x^2 \cdot x_1}{L}, \quad Y = \frac{n_y^2 \cdot y_1}{L}, \quad Z = \frac{n_z^2 \cdot z_1}{L}, \quad \text{гдѣ}$$

$$L = \frac{1}{n_x^4 \cdot x_1^2 + n_y^4 \cdot y_1 + n_z^4 \cdot z_1}$$

Но $ON^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, или:

$$ON^2 = \frac{1}{L}.$$

Подставляя значеніе X, Y, Z и ON въ уравненія (δ), найдемъ:

$$x = n_x^2 \cdot x_1, \quad y = n_y^2 \cdot y_1, \quad z = n_z^2 \cdot z_1.$$

Подставляя же отсюда значенія x_1, y_1, z_1 въ уравненіе (α), найдемъ:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (6)$$

Этотъ эллипсоидъ предложенъ Плукеромъ¹ и носить его имя. Онъ же названъ Коши поляризационнымъ эллипсоидомъ. Радиусы-векторы OM_1 этого эллипсоида даютъ величину $\frac{n}{\cos \delta}$, если δ уголъ между OM и ON . Но $n = \frac{c_0}{c}$, слѣдовательно

$$OM_1 = \frac{c_0}{c \cdot \cos \delta} = \frac{c_0}{c_1}$$

¹ Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XIX, S. 10. (1838).

а c_1 есть проекція скорости c на нормаль касательной плоскости къ эллипсоиду (3), слѣдовательно OM_1 есть показатель преломленія вдоль нормала къ этой плоскости; называя его n_1 имѣемъ:

$$OM_1 = n_1.$$

§ 17. Если будемъ искать полуоси сѣченія эллипсоида (6) плоскостью (4), то какъ и въ § 16, найдемъ¹:

$$\frac{n_x^2 \cdot m_1^2}{n_x^2 - r^2} + \frac{n_y^2 \cdot n_1^2}{n_y^2 - r^2} + \frac{n_z^2 \cdot p_1^2}{n_z^2 - r^2} = 0.$$

Корни r и будутъ значеніями обѣихъ полуосей.

Но:

$$n_x = \frac{c_0}{\alpha}, \quad n_y = \frac{c_0}{\beta}, \quad n_z = \frac{c_0}{\gamma} \quad \text{и} \quad r = n_1.$$

слѣдовательно:

$$\frac{m_1^2}{\alpha^2 - c_1^2} + \frac{n_1^2}{\beta^2 - c_1^2} + \frac{p_1^2}{\gamma^2 - c_1^2} = 0. \quad (\text{II})$$

Это есть извѣстное уравненіе Фрэнэля для опредѣленія скорости c_1 ; оси эллипсоида даютъ направленіе колебанія въ обоихъ случаяхъ.

§ 18. Получивъ его, можно опредѣлить поверхность волны какъ обертку плоской волны, уравненіе которой можно написать въ видѣ:

$$m_1 x + n_1 y + p_1 z = c_1 \quad (7)$$

причемъ переменные параметры m_1 , n_1 , p_1 и c_1 удовлетворяютъ соотношеніямъ (7), (II) и слѣдующему:

$$m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 1. \quad (8)$$

Дѣйствуя по общему правилу, найдемъ уравненіе поверхности въ видѣ:

$$\frac{\alpha^2 x^2}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 y^2}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\gamma^2 z^2}{\rho^2 - \gamma^2} = 0, \quad (\text{III})$$

¹ Подразумѣвая подъ m , n , p косинусы направленія нормала къ плоской волнѣ, т. е. m_1 , n_1 , p_1 (§ 18).

гдѣ

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Такимъ образомъ получаемъ все, что уже установлено въ теоріи двойнаго преломленія въ кристаллическихъ непоглощающихъ срединахъ.

§ 19. Перейдемъ теперь къ срединамъ, поглощающимъ свѣтъ.

Подставляя значенія¹ π , u , ... въ уравненія (5), по сравненіи коэффициентовъ при $\cos Q$ и $\sin Q$, найдемъ:

$$(6) \quad U c_0^2 + q^2 = - \frac{mq^2 SA' x^2 \cos \psi_x}{\mu SA x^2} \quad (1)$$

$$(6) \quad V c_0^2 = - \frac{mq^2 SA' x^2 \sin \psi_x}{\mu SA x^2}. \quad (2)$$

Подставляя же π , u , ... въ (6), найдемъ:

$$(6) \quad \frac{m}{\mu} SA' x^2 \cos \psi_x = E_1 + \frac{a_1(1+l_0^2 U)}{(1+l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2} \quad (3)$$

$$(6) \quad \frac{m}{\mu} SA' x^2 \sin \psi_x = - \frac{a_1 l_0^2 V}{(1+l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2}. \quad (4)$$

Здѣсь положено было:

$$\frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x} = E_x, \quad \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\kappa_x}{\kappa'_x} = a_x + E_x, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{m}{\mu} \left(\frac{\kappa_x}{\kappa'_x} - \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon'_x} \right) = a_x,$$

и ва-тѣмъ по предположенію Кеттелера

$$(6) \quad \frac{\varepsilon'_x}{\kappa'_x} = \frac{\varepsilon'_y}{\kappa'_y} = \frac{\varepsilon'_z}{\kappa'_z} = l_0^2; \quad (a)$$

кромѣ того положено:

$$S a_x \cdot A_x^2 = a_1, \quad S E_x \cdot A_x^2 = E_1.$$

¹ Здѣсь $\pi = A_x e^{-Kr} \cdot \cos Q$, $u = A'_x e^{-Kr} \cdot \cos(Q - \psi_x)$ и т. п.

Подставляя значенія $\frac{m}{\mu} SA'_x{}^2 \cdot \cos \psi_x$, $\frac{m}{\mu} SA'_x{}^2 \cdot \sin \psi_x$ изъ равенствъ (3) и (4) въ равенства (1) и (2), найдемъ, положивъ предварительно:

$$\frac{Sa_x A_x^2}{SA_x^2} = a, \quad \frac{SE_x A_x^2}{SA_x^2} = E,$$

слѣдующія равенства для опредѣленія U и V :

$$(1) \quad U c_0^2 + q^2 = - E q^2 - \frac{a q^2 (1 + l_0^2 U)}{(1 + l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2} \quad (5)$$

$$(2) \quad V c_0^2 = \frac{q^2 \cdot a \cdot V}{(1 + l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2} \quad (6)$$

Такъ какъ V не равно нулю, то (6) даетъ:

$$(3) \quad (1 + l_0^2 U)^2 + l_0^4 V^2 = \frac{a q^2}{c_0^2} \quad (6)$$

Подставляя это въ (5), найдемъ изъ получаемаго при этомъ равенства:

$$U = - \frac{c_0^2 + q^2 l_0^2 (1 + E)}{2 l_0^2 \cdot c_0^2}, \quad \text{но}$$

$$U = - \frac{q^2}{c^2} + K^2, \quad q = \frac{2\pi c_0}{\lambda}, \quad \frac{c_0}{c} = n \quad \text{и, положивъ вмѣстѣ съ}$$

Кеттелеромъ:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot p, \quad \text{слѣдовательно}$$

найдемъ:

$$(4) \quad n^2 - p^2 = \frac{\lambda^2 + 4\pi^2 l_0^2 (1 + E)}{8\pi^2 l_0^2} \quad (c)$$

Но несогласіе этой формулы съ фактами очевидно, слѣдовательно принять теорію Кеттелера въ томъ видѣ, въ какомъ онъ ее даетъ, невозможно.

Хотя можно предположить, что невѣрность вывода зависитъ отъ произвольнаго предположенія (а), но, не сдѣлавъ этого предположенія, получаемъ столь сложныя формулы, что одна уже эта сложность подрываетъ довѣріе къ нимъ.

Посмотримъ лучше: не заключается ли причина этого въ допущеніи справедливости равенствъ (6); не допуская ихъ, мы должны имѣть слѣдующее равенство:

$$SA_x(E_x\Delta_2\pi + \kappa_x\pi) = SA'_x(E'_x\Delta_2u + \kappa'_xu). \quad (b')$$

Но тогда мы не можемъ опредѣлить синусовъ и косинусовъ ψ и исключить ихъ; отсюда должны заключить, что вообще основныя уравненія, данныя Кеттелеромъ для поглощающихъ срединъ, несостоятельны.

Полагая въ (6) равенствѣ $V=0$, мы придемъ къ найденной уже формулѣ для поглощающихъ срединъ (прозрачныхъ).

ГЛАВА IV.

§ 20. Положимъ въ уравненіяхъ (I) и (II) § 5:

$$R_x + F_x = -\alpha_x \varepsilon_x \Delta_2 \pi, \quad R_y + F_y = -\alpha_y \varepsilon_y \Delta_2 \rho,$$

$$R_z + F_z = -\alpha_z \varepsilon_z \Delta_2 \omega, \quad M_x = \mu \frac{\partial P}{\partial x}, \quad M_y = \mu \frac{\partial P}{\partial y}, \quad M_z = \mu \frac{\partial P}{\partial z};$$

причемъ на P можно смотрѣть, какъ на потенциалъ гидростатическаго давленія внутри эфира, и всегда можно взять:

$$P = \frac{d\psi}{dt}, \quad \text{ибо } P \text{ есть періодическая функція времени, и потому,}$$

если $P = F(t)$, то, опредѣливъ ψ изъ уравненія:

$$\psi = \int F(t) dt, \quad \text{имѣемъ:}$$

$$P = \frac{d\psi}{dt}.$$

Предполагая эфиръ изотропнымъ, имѣемъ вмѣсто 1-го уравненія системы (I) слѣдующее:

$$\frac{\mu}{e - \alpha_x \varepsilon_x} \left(\frac{d^2 \pi}{dt^2} - \frac{d^2 \psi}{dt \cdot dx} \right) = \Delta_2 \pi, \text{ или, (полагая}$$

$$\frac{\mu}{e - \alpha_x \varepsilon_x} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{\mu}{e - \alpha_y \varepsilon_y} = \frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{\mu}{e - \alpha_z \varepsilon_z} = \frac{1}{\gamma^2},$$

найдемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \pi}{dt^2} - \frac{d^2 \psi}{dx \cdot dt} &= \alpha^2 \Delta_2 \pi; \\ \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{d^2 \psi}{dy \cdot dt} &= \beta^2 \Delta_2 \rho; \\ \frac{d^2 \omega}{dt^2} - \frac{d^2 \psi}{dz \cdot dt} &= \gamma^2 \Delta_2 \omega. \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

Что касается уравненій (II), то можно предположить, что воздѣйствіе матеріальныхъ частицъ обнаруживается лишь введеніемъ силъ $R + F$ въ уравненія движенія эфирной частицы, такъ что надо принять, что $u = v = w = 0$. Тогда интересно замѣтить, что уравненія (a) того же вида, какъ и данныя Максвеллемъ въ его электромагнитной теоріи свѣта¹. Положимъ вмѣстѣ съ Максвеллемъ:

$mx + ny + pz - ct = s$, и примемъ s за новое независимое переменное; также положимъ:

$$\begin{aligned} \pi &= A\sigma \\ \rho &= B\sigma \\ \omega &= C\sigma \text{ и } \sigma = f(mx + ny + pz - ct) \text{ или} \\ \sigma &= f(s), \text{ гдѣ } f \text{ есть знакъ періодической функціи.} \end{aligned}$$

Продифференцировавъ π , ρ , ω и ψ по отношенію s , найдемъ

$$\Delta_2 \pi = \frac{d^2 \pi}{ds^2} = \pi'', \quad \frac{d^2 \pi}{dt^2} = -c^2 \pi'', \quad \frac{d^2 \psi}{dx \cdot dt} = -mc \cdot \frac{d^2 \psi}{ds^2} = -mc \psi''.$$

¹ J. C. Maxwell, A treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II. p. 393.

Подставляя въ первое изъ уравненій (а), имѣемъ:

$$\begin{cases} (c^2 - \alpha^2) \cdot A\sigma'' + ct\psi'' = 0. \\ (c^2 - \beta^2) \cdot B\sigma'' + cn\psi'' = 0. \\ (c^2 - \gamma^2) \cdot C\sigma'' + cp\psi'' = 0. \end{cases} \quad (c)$$

Умножая эти уравненія соответственно на

$\frac{m}{c^2 - \alpha^2}$, $\frac{n}{c^2 - \beta^2}$, $\frac{p}{c^2 - \gamma^2}$ и складывая результаты, находимъ:

$$c\psi'' \left\{ \frac{m^2}{c^2 - \alpha^2} + \frac{n^2}{c^2 - \beta^2} + \frac{p^2}{c^2 - \gamma^2} \right\} = -\sigma''(Am + Bn + Cp),$$

но $Am + Bn + Cp = 0$, слѣдовательно:

$$\frac{m^2}{c^2 - \alpha^2} + \frac{n^2}{c^2 - \beta^2} + \frac{p^2}{c^2 - \gamma^2} = 0; \quad (1)$$

такъ какъ ψ'' нулемъ быть не можетъ по положенію.

§ 21. Полагая:

$$\sigma = M \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ct - mx - ny - pz) = M \cdot \cos \frac{2\pi s}{\lambda},$$

имѣемъ: $\sigma'' = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \sigma$; подставивъ это значеніе въ уравненія (с)

и положивъ:

$$F = \frac{c\lambda^2}{4\pi^2 \sigma} \cdot \psi'', \text{ найдемъ:}$$

$$\begin{cases} (\alpha^2 - c^2) \cdot A = F \cdot m \\ (\beta^2 - c^2) \cdot B = F \cdot n \\ (\gamma^2 - c^2) \cdot C = F \cdot p \end{cases} \quad (d)$$

Эти уравненія были получены Лянгомъ¹ и Стефаномъ² на основаніи иныхъ соображеній.

¹ Einleitung in die theoretische Physik. S. 330. и der Wiener Academie der Wissenschaften Sitzungsberichte. Bd. 43, S. 306 (1861).

² Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. 50, S. 518 (1865).

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что по теоріи Максвелла или Лянга эфиръ не приводитъ матеріальныхъ частицъ въ колебательное движеніе и эти послѣднія участвуютъ въ явленіи лишь тѣмъ, что измѣняютъ упругость эфира, и эти измѣненія зависятъ отъ направленія, т. е. измѣненія упругости эфира вдоль различныхъ осей различны.

Что касается свѣторазсѣянія, то разбираемая теорія имъ не занимается, и основныя формулы ихъ не могутъ служить подобной цѣли; другими словами: тѣла, двойнымъ преломленіемъ коихъ онѣ занимаются, не обладаютъ свойствомъ свѣторазсѣянія.

§ 22. Теорія Брю¹. Брю, развивая основанія теоріи Коши, хотя и пришелъ къ установленнымъ опытомъ уравненіямъ двойнаго преломленія, но въ теоріи свѣторазсѣянія встрѣтилъ препятствіе: свободный эфиръ (міровой эфиръ) оказался обладающимъ дисперсіей², что противорѣчитъ наблюденіямъ. Измѣнивъ теорію Коши введеніемъ воздѣйствія матеріальныхъ частицъ, Брю получилъ выводъ, тоже несогласный съ опытомъ: онъ нашель, что показатель преломленія увеличивается съ длиною волны. Такія обстоятельства заставили Брю прибѣгнуть къ новой гипотезѣ — гипотезѣ періодическаго распредѣленія эфира внутри тѣла, другими словами, къ гипотезѣ переменнѣй плотности эфира, т. е. къ предположенію сжимаемости эфира внутри среды; послѣднее же равносильно положенію, что колебанія эфира *внутри тѣла* не строго поперечны, съ чѣмъ согласиться нельзя.

Въ виду подобныхъ недостатковъ теоріи Брю, мы излагать ее не будемъ.

§ 23. Теорія Буссинеска³. Основныя положенія теоріи слѣдующія:

¹ Essays sur la théorie mathématique de la lumière. 1864.

² Essays etc. p. 171.

³ Journal de Liouville, 2 série, t. XIII, p. 330 (1868). Также т. XVIII, p. 361 (1873).

1) Дѣйствіе матеріальныхъ частицъ на эфирныя выражается увеличеніемъ (алгебраическимъ) ускорительной силы эфирной частицы на ускорительную силу матеріальной частицы.

2) Упругость эфира внутри кристалла отличается отъ упругости мірового эфира, но очень мало и по различнымъ направленіямъ различна.

3) Между колебаніями эфирной и матеріальной частицъ существуетъ зависимость вида:

$$u = A(1 + \alpha)\pi + B\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \theta}{\partial x} + D\Delta_2 \pi \quad \text{и т. п.,}$$

гдѣ A, B, C, D суть нѣкоторые коэффициенты и α для различныхъ осей различны; θ — коэффициентъ кубическаго расширения эфира.

4) Внутри эфирной среды существуютъ продольныя колебанія. Разсматривая эти положенія, безъ труда замѣтимъ, что второе и четвертое положенія нельзя принять, какъ и было уже замѣчено въ предъидущемъ параграфѣ и какъ показалъ Кеттелеръ въ своихъ работахъ по теоріи поляризаціи свѣта.

Что касается положенія 3-го, то, кажется, вѣрнѣе было бы разсматривать всѣ коэффициенты A, B, \dots для различныхъ осей различными, вслѣдствіе положенія 2-го; однако, впрочемъ, какъ приближенныя зависимости, ихъ можно принять.

Первое же положеніе остается гипотезой, которую можемъ повѣрить только à posteriori, и не трудно убѣдиться, что оно лишнее при существованіи положенія 3-го.

Основавъ на этихъ положеніяхъ свою теорію дисперсіи и двойнаго преломленія, Буссинескъ пришелъ въ первомъ случаѣ къ выводамъ, отличающимся отъ найденныхъ Кеттелеромъ или Ломмедемъ¹ тѣмъ, что въ нихъ нѣтъ члена съ λ^2 , что не вполне согласно съ опытами; въ случаѣ же двойнаго преломленія онъ нашель, что извѣстныя рѣшенія Фрэнэля суть только приблизительныя.

¹ См. также главу VII.

На основаніи всего сказаннаго выше должно заключить, что теоріи Буссинеска въ томъ видѣ, въ какомъ онъ самъ далъ ихъ, не могутъ быть приняты за вполне удовлетворительныя; однако справедливость требуетъ сказать, что своими изслѣдованіями Буссинескъ вывелъ теоріи двойнаго преломленія и дисперсіи на новую дорогу, болѣе плодотворную, чѣмъ та, которою шли Коши и его послѣдователи (Бріо, Сарро¹, Галоненъ² и др.).

Г Л А В А V.

§ 24. Покажемъ теперь, какимъ образомъ изъ нашихъ уравненій § 5 вытекаютъ основанія теоріи, предложенной Ломмелемъ.

Допустимъ, что силы тренія пропорціональны относительной скорости трущейся частицы, а силы сопротивленія пропорціональны ея абсолютной скорости. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$F_x = 2vm \left(\frac{d\pi}{dt} - \frac{du}{dt} \right), R_x = 0, R'_x = 2\kappa m \frac{du}{dt}, M_x = 0;$$

$$F'_x = -F_x.$$

$$F_y = 2vm \left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{dv}{dt} \right), R_y = 0, R'_y = 2\kappa m \frac{dv}{dt}, M_y = 0;$$

$$F'_y = -F_y.$$

$$F_z = 2vm \left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{dw}{dt} \right), R_z = 0, R'_z = 2\kappa m \frac{dw}{dt}, M_z = 0;$$

$$F'_z = -F_z.$$

причемъ слѣдовательно треніе и сопротивленіе эфира принимаются ничтожными, что прямо вытекаетъ изъ свойствъ, всѣми приписываемыхъ эфиру. Количества v и κ суть коэффициенты тренія и сопротивленія частицъ матеріи.

¹ Journal de Liouville, 2 série, t. XII et XIII (1867 — 68).

² Thèse de Mécanique. (1858).

Что касается до силъ упругости, то принимаемъ, что эфиръ внутри тѣла изотропенъ, а само тѣло кристаллическаго строенія и за координатныя оси возьмемъ систему какихъ-нибудь трехъ прямоугольныхъ осей. Тогда, зная уже, что

$$\frac{\partial \pi}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \text{ т. е. что эфиръ}$$

несжимаемъ, имѣемъ:

$$X_x = -2\Omega^2 \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \xi}, \quad Y_y = -2\Omega^2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \quad Z_z = -2\Omega^2 \frac{\partial \omega}{\partial \zeta},$$

$$X_y = -\Omega^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial \pi}{\partial \eta} \right), \quad Z_x = -\Omega^2 \left(\frac{\partial \pi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right),$$

$$Y_z = -\Omega^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right),$$

гдѣ Ω — коэффициентъ упругости и притомъ $\frac{\Omega}{\sqrt{\mu}}$ будетъ скорость свѣта (передачи колебательныхъ движеній) въ свободномъ эфирѣ, въ такъ-называемомъ мировомъ эфирѣ.

Что касается упругихъ силъ частицъ самаго тѣла, то Ломмель принимаетъ, что

$$E'_x = m(N_1 u + T_3 v + T_2 w);$$

$$E'_y = m(T_3 u + N_2 v + T_1 w);$$

$$E'_z = m(T_2 u + T_1 v + N_3 w);$$

причемъ N_1, T_1, \dots суть извѣстныя въ теоріи упругости выраженія, зависящія отъ главныхъ коэффициентовъ упругости и направленій колебанія. Необходимо замѣтить, чего впрочемъ Ломмель не сдѣлалъ, что подобныя выраженія возможны лишь въ случаѣ непоглощающихъ срединъ. Однако, вслѣдствіе малости коэффициента поглощенія, можно какъ приближеніе допустить подобныя выраженія для силъ упругости матеріальныхъ частицъ. При этихъ положеніяхъ имѣемъ вмѣсто уравненій (I) и (II) слѣдующія:

$$\mu \frac{d^2 \pi}{dt^2} = \Omega^2 \Delta_2 \pi + 2m\nu \left(\frac{d\pi}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \right);$$

$$\mu \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \Omega^2 \Delta_2 \rho + 2m\nu \left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{d\nu}{dt} \right);$$

$$\mu \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \Omega^2 \Delta_2 \omega + 2m\nu \left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{d\nu}{dt} \right).$$

Символь Δ_2 имѣеть извѣстный смыслъ.

Также :

$$m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} = -2\kappa m \cdot \frac{du}{dt} - m(N_1 u + T_3 v + T_2 w) - 2m\nu \left(\frac{d\pi}{dt} - \frac{d\omega}{dt} \right);$$

$$m \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} = -2\kappa m \cdot \frac{dv}{dt} - m(T_3 u + N_2 v + T_1 w) - 2m\nu \left(\frac{d\rho}{dt} - \frac{d\nu}{dt} \right);$$

$$m \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} = -2\kappa m \cdot \frac{dw}{dt} - m(T_2 u + T_1 v + N_3 w) - 2m\nu \left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{d\nu}{dt} \right).$$

Это суть уравненія Ломмеля¹, полученныя имъ путемъ частныхъ преобразованій.

§ 25. Остается теперь только ввести выраженія для составляющихъ колебаній. Положимъ, что имѣемъ общій случай среды, поглощающей въ большей или меньшей степени свѣтоты колебанія, смотря по толщинѣ слоя, проходимаго лучемъ; тогда, если K — коэффициентъ поглощенія даннаго луча, соответствующаго волнѣ извѣстной длины; r путь, пройденный волной внутри среды, c скорость свѣта внутри ея и τ время одного колебанія эфирной частицы; то полагая $\frac{2\pi}{\tau} = q$, имѣемъ, какъ извѣстно :

$$\frac{\pi}{JA} = \frac{\rho}{JB} = \frac{\omega}{JC} = e^{-Kr} \cos \left(qt - \frac{q}{c} \cdot r \right);$$

¹ Wied. An. Bd. IV. S. 56 и 58.

гдѣ J , ясно, есть амплитуда колебанія, а A, B, C косинусы направленія колебанія.

Замѣтимъ, что если m, n, p косинусы направленія r , тогда:

$$r = m\xi + n\eta + p\zeta.$$

Для колебаній u, v, w , можемъ принять:

$$\frac{u}{J'A'} = \frac{v}{J'B'} = \frac{w}{J'C'} = e^{-Kr'} \cdot \cos\left(qt - \frac{q}{c} r'\right),$$

гдѣ $r' = mx + ny + pz.$

Но такъ-какъ матеріальныя частицы приходятъ въ движеніе, благодаря движенію эфирныхъ или обратно, то должно взять:

$$\frac{J'A'}{JA} = \frac{J'B'}{JB} = \frac{J'C'}{JC} = R' \text{ и кромѣ того}$$

$$r' = m\xi + n\eta + p\zeta - \psi,$$

и ψ есть количество, обусловливаемое геометрическимъ положеніемъ эфирныхъ частицъ относительно матеріальныхъ.

И такъ

$$\frac{u}{JA} = \frac{v}{JB} = \frac{w}{JC} = R \cdot e^{-Kr'} \cdot \cos\left(qt - \frac{q}{c} r + \psi\right) \text{ и}$$

$$R = R' \cdot e^{+K\psi}$$

Подставляя теперь въ уравненія § 23 значенія π, u и т. п., сокративъ общихъ множителей и сравнивая коэффициенты

при $\cos\left(qt - \frac{q}{c} r\right)$ и $\sin\left(qt - \frac{q}{c} r\right)$, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \cdot q^2 &= \Omega^2 \left(K^2 - \frac{q^2}{c^2}\right) + 2m\nu q \cdot R \sin \psi \\ 0 &= 2\Omega^2 K \cdot \frac{q}{c} - 2m\nu q (1 - R \cos \psi). \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -Aq^2 \cdot \cos \psi &= 2\kappa Aq \cdot \sin \psi - P_1 \cos \psi - 2\nu q \cdot A \cdot \sin \psi \\ Baq^2 \cdot \sin \psi &= 2\kappa ARq \cdot \cos \psi + RP_1 \sin \psi + 2\nu q A(1 - R \cos \psi) \end{aligned} \right\} (2)$$

Подобныя же уравненія для двухъ другихъ осей, замѣняя A и P_1 соответственно количествами B и P_2 , C и P_3 ; полагая предварительно для краткости письма и удобства вычислений:

$$\begin{aligned} P_1 &= AN_1 + BT_3 + CT_2; \\ P_2 &= AT_3 + BN_2 + CT_1; \\ P_3 &= AT_2 + BT_1 + CN_3. \end{aligned}$$

Систему уравненій (2) удобнѣе будетъ представить въ другомъ видѣ, именно въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} (P_1 - Aq^2) \cos \psi &= 2Aq(\kappa - \nu) \sin \psi \\ (P_2 - Bq^2) \cos \psi &= 2Bq(\kappa - \nu) \sin \psi \\ (P_3 - Cq^2) \cos \psi &= 2Cq(\kappa - \nu) \sin \psi \end{aligned} \right\} (A)$$

$$\left. \begin{aligned} -(P_1 - Aq^2) R \sin \psi &= 2(\kappa - \nu)q \cdot AR \cos \psi + 2\nu q A; \\ -(P_2 - Bq^2) R \sin \psi &= 2(\kappa - \nu)q \cdot BR \cos \psi + 2\nu q B; \\ -(P_3 - Cq^2) R \sin \psi &= 2(\kappa - \nu)q \cdot CR \cos \psi + 2\nu q C. \end{aligned} \right\} (B)$$

Уравненія (A) и (B) послужатъ для опредѣленія A , B , C , R и ψ , присоединивъ только къ нимъ еще соотношеніе:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (c)$$

Система же (1) дастъ K и c .

Равенства (A) даютъ:

$$\frac{P_1 - Aq^2}{A} = \frac{P_2 - Bq^2}{B} = \frac{P_3 - Cq^2}{C} \quad (a)$$

или каждое изъ этихъ отношеній равно

$AP_1 + BP_2 + CP_3 - q^2$, что получится, умножая оба члена каждаго отношенія соответственно на A , B , C и складывая результаты.

Положимъ

$$(I) \quad AP_1 + BP_2 + CP_3 = s,$$

тогда равенства (а) даютъ:

$$(II) \quad \left. \begin{aligned} A(N_1 - s - q^2) + BT_3 + CT_2 &= 0; \\ AT_3 + B(N_2 - s - q^2) + CT_1 &= 0; \\ AT_2 + BT_1 + C(N_3 - s - q^2) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Опредѣляя изъ двухъ равенствъ отношенія A , B , C къ одному изъ нихъ и подставляя въ третье, находимъ равенство, которое можно представить, какъ извѣстно, въ видѣ определителя:

$$\begin{vmatrix} N_1 - s - q^2 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 - s - q^2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 - s - q^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (I)$$

Корни этого уравненія дѣйствительны¹, ихъ три; но ниже мы покажемъ, что изъ нихъ для нашего вопроса годятся только два. Замѣтимъ, что Ломмель, вслѣдствіе ошибочнаго анализа², нашель уравненіе 2-й степени для $s + q^2$.

Опредѣливъ изъ уравненія (I) $s + q^2$, а слѣдовательно s , мы изъ уравненій (b) найдемъ напримѣръ $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ и, подставивъ эти значенія въ соотношеніе (с), найдемъ C , а слѣдовательно A и B .

§ 26. Для опредѣленія ψ и R поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Умножая уравненія (A) и (B) по порядку на A , B , C и складывая результаты, находимъ:

$$\begin{aligned} s \cdot \cos \psi &= 2(\kappa - \nu)q \cdot \sin \psi \\ -s \cdot R \sin \psi &= 2\nu q + 2(\kappa - \nu) \cdot q \cdot R \cos \psi. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ равенствъ даетъ:

¹ См. § 30.

² Wied. Ann. Bd. IV. S. 60, уравненіе (12).

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{s}{2(\kappa - \nu) \cdot q}. \quad (I)$$

Опредѣляя $\sin \psi$ и $\cos \psi$ по $\operatorname{tg} \psi$ и подставляя во второе изъ написанныхъ сейчасъ равенствъ, имѣемъ:

$$R = - \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2}}. \quad (II)$$

§ 27. Зная ψ и R , приступимъ къ опредѣленію c и K .

Подставляя въ уравненіе (1) значеніе $R \sin \psi$ и $R \cos \psi$ изъ равенствъ (I) и (II), получимъ послѣ простаго преобразованія:

$$\frac{1}{c^2} - \frac{K}{q^2} = \frac{\mu}{\Omega^2} \left(1 + \frac{4m\nu^2 s}{\mu [s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2]} \right) \text{ и}$$

$$\frac{K}{q} \cdot \frac{1}{c} = \frac{\mu}{\Omega^2} \cdot \frac{m\nu}{\mu q} \left(1 + \frac{4\nu q^2 (\kappa - \nu)}{[s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2]} \right).$$

Положимъ теперь:

$$1 + \frac{4ms \cdot \nu^2}{\mu [s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2]} = F$$

$$\frac{2m\nu}{\mu q} \left(1 + \frac{4\nu q^2 (\kappa - \nu)}{s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2} \right) = G$$

или:

$$G = \frac{2m\nu}{\mu q} \cdot \frac{s^2 + 4\kappa(\kappa - \nu)q^2}{s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2}, \text{ и}$$

зная, что $\frac{\Omega}{\sqrt{\mu}} = c_0$, скорости свѣта въ міровомъ эфирѣ, находимъ:

$$\frac{1}{c^2} - \frac{K^2}{q^2} = \frac{F}{c_0^2}$$

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{K}{q^2} = \frac{G}{2c_0^2}. \text{ Отсюда:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2c_0^2} \left\{ \sqrt{F^2 + G^2} + F \right\} \\ \frac{K^2}{q^2} &= \frac{1}{2c_0^2} \left\{ \sqrt{F^2 + G^2} - F \right\} \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Подобныя выраженія для s и K найдены были еще Гельмгольцем¹, только его коэффициенты F и G выражались болѣе сложными формулами. Ломмель² выраженіямъ F и G придаетъ другой болѣе удобный видъ.

Положимъ $s + q^2 = j$, и $\frac{q^2}{j} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}$, тогда

$$s = j \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right).$$

Далѣе: $\frac{4(\kappa - \nu)^2}{j} = \varepsilon^2$, $\frac{4\kappa(\kappa - \nu)}{j} = \kappa\varepsilon$, тогда

$$F = 1 + (\kappa - \varepsilon)^2 \varrho \cdot \frac{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

$$G = (\kappa - \varepsilon) \varrho \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) + \kappa\varepsilon \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

Пренебрегая G^2 въ сравненіи съ F^2 , имѣемъ: $n^2 = F$ и далѣе, пренебрегая въ знаменателѣ вторымъ членомъ въ сравненіи съ первымъ и полагая $(\kappa - \varepsilon)^2 \varrho = a$, найдемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \quad (\text{IV}')$$

§ 28. Разлагая F и G по степенямъ малыхъ множителей $(\kappa - \varepsilon)$, ε , λ_0 , найдемъ:

$$G = (\kappa - \varepsilon) \varrho \frac{\lambda}{\lambda_0} + (\kappa - \varepsilon)^2 \varepsilon \varrho + \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \dots$$

¹ Pog. Ann. Bd. CLIV. S. 582.

² Wied. Annalen. Bd. VII. S. 629. Ср. также Bd. III, S. 339 (1878).

$$F = 1 + \frac{(\kappa - \varepsilon)^2 \rho}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \dots, \text{ также:}$$

$$\frac{1}{F} = 1 - \frac{(\kappa - \varepsilon)^2 \rho}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \dots$$

Формула (IV°) даетъ:

$$\frac{c_0^2}{c^2} = n^2 = F + \frac{1}{4} \frac{G^2}{F} + \dots$$

Подставляя значенія F и G , найдемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{\alpha}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} + \beta + \gamma \lambda^2 + \frac{\delta}{\lambda^2} + \dots * \quad (V)$$

гдѣ

$$\alpha = (\kappa - \varepsilon)^2 \rho + \dots, \beta = \frac{1}{2} (\kappa - \varepsilon) \rho + \dots$$

$$\gamma = (\kappa - \varepsilon)^2 \rho^2 + \dots, \delta = \frac{1}{4} \lambda_0^2 + \dots,$$

приводя (V) къ одному знаменателю и полагая:

$$a = \alpha + \beta - \gamma \lambda_0^2 + \dots, b = \gamma + \dots, c = \delta - \beta \lambda_0^2 + \dots$$

имѣемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2}}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \quad (VI)$$

Формулу (VI) можно еще преобразовать въ формулу, данную Кеттелеромъ.

Сначала имѣемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a\lambda^2 + b\lambda^4 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \text{ и отсюда дѣленіемъ}$$

находимъ:

* См. *Lommel*, *Wied. Ann.* Bd. XII, S. 353 und ff. 1881.

$n^2 - 1 = a + b\lambda^2 + \frac{a\lambda_0^2 + c}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$, пренебрегая членами съ $b\lambda_0^2$, ибо b величина 2-го порядка малости, λ_0^2 то-же, слѣдовательно $b\lambda_0^2$ есть количество 4-го порядка малости, а оставленные члены низшихъ порядковъ, именно a — 1-го, c — 2-го и, слѣд., $a\lambda_0^2$ — 3-го.

Но $a + b\lambda^2 = a \left(1 + \frac{b}{a} \lambda^2 \right) = \frac{a}{1 - \frac{b}{a} \lambda^2}$ съ тѣмъ же приближеніемъ. Полагая же

$$A = \frac{a^2}{b}, \quad B = \frac{a}{b}, \quad C = a\lambda_0^2 + c, \quad D = \lambda_0^2,$$

найдемъ формулу Кеттелера¹, провѣренную имъ:

$$n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{C}{\lambda^2 - D}. \quad (\text{VII})$$

§ 29. Формулы (IV) и (VI) провѣрялъ Ломмель при помощи опредѣленій Маскара главныхъ показателей преломленія исландскаго шпата для обыкновеннаго и необыкновеннаго лучей отъ линіи A спектра до B ; совпаденіе было вполне достаточно, разница въ немногихъ только случаяхъ достигала до 1-цы 4-го десятичнаго знака, въ остальныхъ же была меньше. Формулу (IV) провѣрилъ Ломмель еще раньше и результаты сравнилъ съ тѣми, которые даютъ извѣстныя формулы Коши и Кристоффля; оказалось, что формула (IV) столь-же надежна, какъ и формулы Коши (двухчленная) и Кристоффля.

$$\begin{cases} \psi \sin(\lambda) \cdot (v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}) = \psi \cos(\lambda) \cdot (v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}) \\ \psi \sin(\lambda) \cdot (v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}) = \psi \cos(\lambda) \cdot (v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}) \\ \psi \sin(\lambda) \cdot (v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}) = \psi \cos(\lambda) \cdot (v - \sqrt{v^2 + \lambda^2}) \end{cases} \quad (\text{I})$$

¹ Wied. Ann. Bd. XII, S. 367 (1881).

ГЛАВА VI.

§ 30. Разовьемъ теперь предыдущую теорію безъ допущенія § 23. Положимъ, что силы упругости внутри системы матеріальныхъ частицъ выражаются формулами § 3, т. е. допускаемъ, что тѣло представляетъ кристаллъ съ тремя осями симметріи.

Тогда имѣемъ уравненія для упругихъ силъ матеріальной частицы по подстановкѣ въ нихъ значеній u , v , w изъ формулъ § 9, именно для силы, дѣйствующей вдоль оси x :

$$\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} = -MRe^{-kr} \cdot m \left\{ U \cos(Q + \psi) - V \sin(Q + \psi) \right\} \cdot (An_1 + Bt_3 + Ct_2),$$

гдѣ положено:

$$\begin{aligned} K^2 - \frac{q^2}{c^2} &= U, \quad 2K \frac{q}{c} = V, \\ \left. \begin{aligned} n_1 &= am^2 + fn^2 + ep^2, \quad t_1 = 2mp \cdot d \\ n_2 &= fm^2 + bn^2 + dp^2, \quad t_2 = 2mp \cdot e \\ n_3 &= em^2 + dn^2 + cp^2, \quad t_3 = 2mn \cdot f \end{aligned} \right\} \quad (a) \end{aligned}$$

подобныя выраженія получимъ для другихъ составляющихъ упругихъ силъ.

Подставляя эти значенія и значенія количествъ изъ § 9 въ уравненія § 3 для матеріальной частицы, найдемъ по сокращеніи общихъ множителей и приравниваніи нулю коэффициентовъ при $\cos Q$ и $\sin Q$ слѣдующія условія уравненія.

$$\left. \begin{aligned} (S_1 U - Aq^2) \cos \psi &= (S_1 V + 2(\kappa - \nu) \cdot Aq) \sin \psi \\ (S_2 U - Bq^2) \cos \psi &= (S_2 V + 2(\kappa - \nu) \cdot Bq) \sin \psi \\ (S_3 U - Cq^2) \cos \psi &= (S_3 V + 2(\kappa - \nu) \cdot Cq) \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

и

$$\left. \begin{aligned} (S_1 U - Aq^2) R \sin \psi + 2\nu Aq &= -(S_1 V + 2(\kappa - \nu) Aq) R \cos \psi \\ (S_2 U - Bq^2) R \sin \psi + 2\nu Bq &= -(S_2 V + 2(\kappa - \nu) Bq) R \cos \psi \\ (S_3 U - Cq^2) R \sin \psi + 2\nu Cq &= -(S_3 V + 2(\kappa - \nu) Cq) R \cos \psi \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

здѣсь для краткости письма положено:

$$\begin{aligned} S_1 &= An_1 + Bt_3 + Ct_2 \\ S_2 &= At_3 + Bn_2 + Ct_1 \\ S_3 &= At_2 + Bt_1 + Ct_3 \end{aligned}$$

уравненіе (I) можно представить въ видѣ:

$$\begin{aligned} S_1 [U \cos \psi - V \sin \psi] &= A [q^2 \cos \psi + 2(\kappa - \nu) q \sin \psi]; \\ S_2 [U \cos \psi - V \sin \psi] &= B [q^2 \cos \psi + 2(\kappa - \nu) q \sin \psi]; \\ S_3 [U \cos \psi - V \sin \psi] &= C [q^2 \cos \psi + 2(\kappa - \nu) q \sin \psi]. \end{aligned}$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{S_1}{A} = \frac{S_2}{B} = \frac{S_3}{C} = S$$

здѣсь положено:

$$AS = AS_1 + BS_2 + CS_3.$$

Такой же результатъ получаемъ и изъ (II) системы.

И такъ, имѣемъ три слѣдующихъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} S_1 - AS &= 0 \\ S_2 - BS &= 0 \\ S_3 - CS &= 0, \text{ или, подставляя значеніе } S: \\ (n_1 - S)A + t_3 B + t_2 C &= 0 \\ t_3 A + (n_2 - S)B + t_1 C &= 0 \\ t_2 A + t_1 B + (n_3 - S)C &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

Исключая отсюда отношенія A, B, C къ одному изъ нихъ, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} n_1 - S & , & t_3 & , & t_2 \\ t_3 & , & n_2 - S & , & t_1 \\ t_2 & , & t_1 & , & n_3 - S \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(V)}$$

По развертываніи этого опредѣлителя, найдемъ для S уравненіе 3-й степени съ действительными корнями¹, которое, какъ ниже будетъ показано, дастъ *только два*, удовлетворяющихъ требованіямъ нашего вопроса, *корня*. Пусть эти корни будутъ S' и S'' . Изъ уравненій (IV) опредѣлимъ отношенія напр. $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ и подставляя ихъ въ соотношеніе

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

найдемъ C , а слѣдовательно A и B .

Не трудно убѣдиться, что колебанія, соотвѣтствующія корнямъ S' и S'' , взаимно перпендикулярны. Действительно, если

$$A', B', C', \text{ и}$$

$$A'', B'', C''$$

будутъ косинусы направленія колебаній, соотвѣтствующихъ S' и S'' , то имѣемъ по системѣ (IV):

$$n_1 A' + t_3 B' + t_2 C' = S' A'$$

$$t_3 A' + n_2 B' + t_1 C' = S' B'$$

$$t_2 A' + t_1 B' + n_3 C' = S' C' \quad \text{и}$$

$$n_1 A'' + t_3 B'' + t_2 C'' = S'' A''$$

$$t_3 A'' + n_2 B'' + t_1 C'' = S'' B''$$

$$t_2 A'' + t_1 B'' + n_3 C'' = S'' C''.$$

Умножая уравненія первой группы соотвѣтственно на A'' , B'' , C'' , а уравненія второй группы на A' , B' , C' , по вычитаніи результатовъ и сокращеніи на $(S' - S'')$, находимъ:

$$A' A'' + B' B'' + C' C'' = 0,$$

что и доказываетъ высказанное выше предложеніе.

§ 31. Остается теперь опредѣлить R и ψ .

¹ См. напр. *Brioschi*, *Théorie des déterminants*, p. 29.

Подставляя значенія S_1, S_2, \dots въ уравненія системы (I) и (II), находимъ сначала:

$$(SU - q^2) \cos \psi = (SV + 2(\kappa - \nu)q) \sin \psi,$$

откуда

$$\text{tg} \psi = \frac{SU - q^2}{SV + 2(\kappa - \nu)q} \quad (1)$$

Потомъ:

$$(SU - q^2) \sin \psi + 2\nu_1 q = -(SV + 2(\kappa - \nu)q) \cos \psi.$$

Откуда, по подстановкѣ $\sin \psi$ и $\cos \psi$ изъ (1), имѣемъ:

$$-2\nu_1 q = \sqrt{(SU - q^2)^2 + 2(SV + 2(\kappa - \nu)q)^2},$$

но $\nu_1 = \frac{\nu}{R}$, слѣдовательно:

$$R = - \frac{2\nu q}{\sqrt{(SU - q^2)^2 + (SV + 2(\kappa - \nu)q)^2}} \quad (2)$$

И такъ ψ и R имѣютъ по два значенія, соответствующія корнямъ S' и S'' .

Преобразуемъ формулы для $\text{tg} \psi$ и R . Внося въ формулу для $\text{tg} \psi$ и R значенія U и V и полагая:

$$S = - \frac{s + q^2}{q^2} c^2, \quad 2K \frac{c}{q} = \Delta,$$

найдемъ:

$$\text{ctg} \psi = \frac{2(\kappa - \nu)q - (s + q^2)\Delta}{s - (s + q^2)\Delta^2},$$

$$\frac{R}{2\nu q} = \frac{\Delta}{\left\{ s^2 + 4(\kappa - \nu)^2 q^2 - 4(\kappa - \nu)q(s + q^2)\Delta - (s^2 - q^4)\Delta^2 \right\}^{1/2}}$$

Но количество Δ очень мало, ибо, съ одной стороны, коэффициентъ поглощенія K вообще малъ, а съ другой $\frac{c}{q}$ есть величина

порядка длины свѣтовой волны, т. е. величина тоже

(I) името R очень малая; поэтому, разлагая $\text{ctg } \psi$ и $\frac{R}{2\nu q}$ въ строки по степенямъ Δ , можно ограничиться первою степенью Δ .)

Такимъ образомъ найдемъ:

$$(1) \quad \text{ctg } \psi = \frac{2(n-\nu)q}{s} - \frac{s+q^2}{s} \Delta \quad (1)$$

$$R = \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2 + 4(n-\nu)q^2}} \left(1 + \frac{2(n-\nu)(s+q^2)q}{s^2 + 4(n-\nu)^2 q^2} \Delta \right). \quad (2)$$

Какъ первое приближеніе можно даже отбросить члены съ Δ , какъ очень малые; тогда найдемъ:

$$\text{ctg } \psi = \frac{2(n-\nu)q}{s} \quad (1 \text{ bis})$$

$$(2) \quad R = \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2 + 4(n-\nu)^2 q^2}} \quad (3 \text{ bis})$$

Последнія двѣ формулы и суть уже формулы Ломмеля¹, найденныя нами въ § 26.

Для опредѣленія U и V подставимъ найденныя приближенныя значенія $\text{tg } \psi$ и R въ уравненія (1) § 25, а такъ-какъ эти уравненія въ обоихъ способахъ остаются въ одномъ и томъ же видѣ; найдемъ тогда тѣ-же формулы, что и приведенныя въ началѣ § 27.

§ 32. Опредѣлимъ теперь U и V , т. е. c и K . Уравненія (1) § 25, которыя сохраняютъ свой видъ и въ томъ способѣ, которымъ мы занимаемся теперь, дадутъ:

$$R \sin \psi = -\frac{q^2 + U c_0^2}{e}, \quad R \cos \psi = 1 - \frac{V c_0^2}{e}, \quad (1)$$

гдѣ положено $e = 2\nu q e$ и $e = \frac{m}{\mu}$. (a) ф

¹ Wied. Annalen. Bd. IV. 1878. S. 63.

Изъ равенствъ (1) находимъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Uc_0^2 + q^2}{\sqrt{c_0^2 - e}}, \quad R = - \frac{\sqrt{(Uc_0^2 + q^2)^2 + (Vc_0^2 - e)^2}}{e}$$

Сравнивая эти значенія $\operatorname{tg} \psi$ и R съ значеніями ихъ, найденными въ § 34, имѣемъ:

$$\frac{SU - q^2}{SV + 2(\kappa - \nu)q} = \frac{Uc_0^2 + q^2}{\sqrt{c_0^2 - e}} \quad (\alpha)$$

$$\frac{2\nu q}{\sqrt{(SU - q^2)^2 + (SV + 2(\kappa - \nu)q)^2}} = \frac{\sqrt{(Uc_0^2 + q^2)^2 + (Vc_0^2 - e)^2}}{e} \quad (\beta)$$

Положимъ здѣсь для удобствъ вычисленій:

$$\frac{q^2}{c_0^2} = a, \quad \frac{e}{c_0^2} = b, \quad \frac{2\nu qe}{c_0^2} = h, \quad 2(\kappa - \nu)q = d \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(SV + d)^2 + (SU - q^2)^2} &= X \\ \sqrt{(U + a)^2 + (V - b)^2} &= Y \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

При помощи этихъ положеній изъ равенствъ (α) и (β) находимъ слѣдующія

$$\frac{X}{Y} = \frac{SU - q^2}{U + a}$$

$$X \cdot Y = h.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ опредѣляемъ X^2 и Y^2 и получаемъ:

$$X^2 = h \cdot \frac{SU - q^2}{U + a},$$

$$Y^2 = h \cdot \frac{U + a}{SU - q^2}.$$

Подставимъ значенія X^2 и Y^2 , найдемъ:

$$(SV + d)^2 + (SU - q^2)^2 = h \cdot \frac{SU - q^2}{U + a} \quad (\gamma)$$

$$(V-b)^2 + (U+a)^2 = h \cdot \frac{U+a}{SU-q^2}.$$

Но послѣднее равенство при помощи соотношенія (α) , написаннаго въ видѣ:

$$\frac{SU-q^2}{U+a} = \frac{SV+d}{V-b}, \quad (\delta)$$

превращается въ слѣдующее:

$$(V-b)^2 + (U+a)^2 = h \cdot \frac{V-b}{SV+d} \quad (\varepsilon)$$

дальше изъ равенства (δ) находимъ:

$$U+a = -\frac{q^2+aS}{\partial+bS} (V-b) \quad (\kappa)$$

$$SV+d = -\frac{\partial+bS}{q^2+aS} (SU-q^2) \quad (\lambda)$$

Подставляя значеніе $SV+d$ изъ выраженія (λ) въ равенство (ε) и значеніе $U+a$ изъ выраженія (κ) въ уравненіе (ε) по сокращеніи на общихъ множителей, которые очевидно не равны нулю, найдемъ уравненіе для U и V .

Мы займемся послѣднимъ.

Имѣемъ, подставляя (κ) :

$$SV^2 + (\partial - bS) \cdot V = \frac{(\partial b + h)(\partial + bS)^2 + b\partial(q^2 + aS)^2}{(\partial + bS)^2 + (q^2 + aS)^2} \quad (2)$$

подобное уравненіе получили бы и для U .

Положимъ въ уравненіи (2) :

$$S = \frac{\sigma - q^2}{q^2} \cdot c_0^2, \quad (3)$$

причемъ σ будетъ новое переменное, вводимое вмѣсто S .

Вычисляя при помощи равенствъ (3) , (α) и (β) коэффициенты (2) , найдемъ:

$$V^2 + \frac{2q[(\kappa - \nu)q^2 - \rho(\sigma - q^2)]}{\sigma - q^2} V = \frac{4\nu\rho q^2(\kappa - \nu)[\sigma^2 + 4\kappa(\kappa - \nu)q^2](1 + \varepsilon_1)q^2}{c_0^2[\sigma^2 + 4(\kappa - \nu)^2q^2](1 + \varepsilon_2)(\sigma - q^2)}, \quad (4)$$

гдѣ положено для краткости письма:

$$(\sigma^2 + 4\kappa(\kappa - \nu)q^2)\varepsilon_1 = 16\kappa\nu\rho^2(\sigma - q^2)[\rho(\sigma - q^2) + 2(\kappa - \nu)q^2],$$

$$(\sigma^2 + 4(\kappa - \nu)^2q^2)\varepsilon_2 = \frac{4(\sigma - q^2)^2}{q^2} - 8(\kappa - \nu)(\sigma - q^2)\rho.$$

Уравнение (4) даетъ два корня для V ; зная ихъ по уравненію (κ), опредѣлимъ два корня U . Одна пара корней U и V относится къ волнѣ, обыкновенной или необыкновенной, распространяющейся въ данномъ направленіи, а другая къ волнѣ противоположной.

Точные корни U и V довольно сложны, но мы можемъ получить сравнительно простыя, приближенныя рѣшенія.

Такъ какъ V очень мало, то, пренебрегая въ уравненіи (4) его квадратомъ, найдемъ:

$$V = \frac{2\nu\rho q[\sigma^2 + 4\kappa(\kappa - \nu)q^2](1 + \varepsilon_1)q^2(\kappa - \nu)}{c_0^2[\sigma^2 + 4(\kappa - \nu)^2q^2](1 + \varepsilon_2)[(\kappa - \nu)q^2 - \rho(\sigma - q^2)]}$$

Эту формулу можно еще упростить; пренебрегая нѣкоторыми множителями, какъ очень малыми въ сравненіи съ оставленными, найдемъ:

$$V = \frac{2\nu\rho q}{c_0^2} \frac{\sigma^2 + 4\kappa(\kappa - \nu)q^2}{\sigma^2 + 4(\kappa - \nu)^2q^2}. \quad (I)$$

Подобнымъ образомъ для U найдемъ приближенное выраженіе:

$$U = -\frac{q^2}{c_0^2} - \frac{4\nu^2\rho q^2}{c_0^2} \frac{\sigma}{\sigma^2 + 4(\kappa - \nu)^2q^2}. \quad (II)$$

При помощи найденныхъ сейчасъ U и V опредѣлимъ F и G § 27 и за-тѣмъ найдемъ показатель преломленія и коэффициентъ поглощенія.

Такимъ образомъ видимъ, что формулы Ломмеля суть формулы приближенныя.

§ 33. Займемся изученіемъ уравненія (V) § 30.

По развертываніи опредѣлителя (V) имѣемъ:

$$S^3 - (n_1 + n_2 + n_3)S^2 + (n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)S - (n_1n_2n_3 + 2t_1t_2t_3 - n_1t_1^2 - n_2t_2^2 - n_3t_3^2) = 0. \quad (1)$$

Значенія n_1, t_1, \dots даны равенствами (а) § 30. Можно установить нѣкоторыя зависимости между коэффициентами a, b, \dots , основываясь на предположеніи, что данная кристаллическая средина можетъ быть получена изъ изотропной, подвергая послѣднюю некоторымъ малымъ деформациямъ вдоль координатныхъ осей.

Пусть $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ будутъ величины тѣхъ сжатій или расширеній (деформаций), параллельныхъ координатнымъ осямъ, подвергая которымъ тѣло, мы превращаемъ его изъ изотропнаго въ кристаллическое; тогда по закону линейности имѣемъ:

$$a = \alpha + m\epsilon + n\epsilon' + p\epsilon''; \quad d = \delta + k\epsilon + h\epsilon' + l\epsilon'';$$

$$b = \alpha + m'\epsilon + n'\epsilon' + p'\epsilon''; \quad e = \delta + k'\epsilon + h'\epsilon' + l'\epsilon'';$$

$$c = \alpha + m''\epsilon + n''\epsilon' + p''\epsilon''; \quad f = \delta + k''\epsilon + h''\epsilon' + l''\epsilon'';$$

причемъ $m, n, \dots, k, h, l, \dots$ суть нѣкоторые постоянные коэффициенты, а α и δ значенія a, b, c и d, e, f въ изотропной срединѣ.

Пользуясь свойствомъ симметріи среды, мы получимъ между коэффициентами m, n, \dots слѣдующія зависимости¹:

¹ Saint-Venant, Journal de Liouville, 1868. p. 246 et suiv.

$$n = p, \quad h = l, \quad k' = l', \quad k'' = l'', \quad m' = p', \quad m'' = n'', \quad m' = n = m'', \\ p'' = m = n', \quad k' = l' = h, \quad k'' = h'' = h, \quad k = h' = l''.$$

На основаніи этихъ зависимостей имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha + m\varepsilon + n(\varepsilon' + \varepsilon''), & d &= \delta + k\varepsilon + h(\varepsilon' + \varepsilon''). \\ b &= \alpha + m\varepsilon' + n(\varepsilon + \varepsilon'), & e &= \delta + k\varepsilon' + h(\varepsilon + \varepsilon''). \\ c &= \alpha + m\varepsilon'' + n(\varepsilon + \varepsilon'), & f &= \delta + k\varepsilon'' + h(\varepsilon + \varepsilon'). \end{aligned} \right\} (a)$$

Предполагая, что деформации симметричны относительно оси x -въ, тогда

$$\varepsilon' = \varepsilon'' \text{ и на основаніи известной теоремы теории упругости}^1 \\ b = c, \quad e = f \text{ и } b = 3d.$$

Подставляя въ последнее равенство значенія b и d изъ уравненій (а), найдемъ по сравненіи членовъ

$$\alpha = 3\delta, \quad n = 3k, \quad m + n = 6h. \quad (\alpha)$$

Предполагая симметрію около осей y -овъ и z -овъ, найдемъ тѣ-же соотношенія (а). Отсюда заключаемъ, что количества α, δ, m, n, k и h удовлетворяютъ вообще соотношеніямъ (а) при всякихъ значеніяхъ $\varepsilon, \varepsilon'$ и ε'' .

Равенства (а) при помощи (а) даютъ:

$$a + b = 6f, \quad a + c = 6e, \quad b + c = 6d. \quad (I)$$

Эти зависимости между a, b, \dots найдены были иными путями Коши и Нейманомъ².

Такъ-какъ d, e, f мало отличаются другъ отъ друга, то можно изъ равенствъ (I) получить другія очень пригодныя для насъ. Изъ равенствъ (I) находимъ:

¹ См. напр. Moigno, Statique, p. 665, § 272.

² Cauchy въ Mémoires de l'Académie de Paris, T. XVIII, p. 191, éq. 169. Neumann въ Pog. Annalen. Bd. XXV, S. 443, Gl. XIX.

$a = 3f + 3e - 3d$, $b = 3d + 3f - 3e$, $c = 3d + 3e - 3f$,
а отсюда

$$ab = 9f^2 - 9(e-d)^2, ac = 9e^2 - 9(d-f)^2, bc = 9d^2 - (f-e)^2; (\beta)$$

пренебрегая квадратами разностей коэффициентов d , e , f , находимъ изъ (β) и (I) :

$$ab - (a+b)f = 3f^2, ac - (a+c)e = 3e^2, bc - (b+c)d = 3d^2. (\Pi)$$

Эти соотношенія вмѣстѣ съ отношеніями (I) и послужатъ намъ для упрощенія уравненія (1) .

§ 34. Вычисляя коэффициенты уравненія (1) при помощи (I) , (Π) и равенствъ (a) § 30, находимъ:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &= am^2 + bn^2 + cp^2 + (f+e)m^2 + (f+d)n^2 + (e+d)p^2; \\ n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 &= fem^2 + fdn^2 + dep^2 + \\ &+ (am^2 + bn^2 + cp^2)\{ (f+e)m^2 + (f+d)n^2 + (d+e)p^2 \}; \\ n_1n_2n_3 + 2t_1t_2t_3 - n_1t_1^2 - n_2t_2^2 - n_3t_3^2 &= \\ &= (am^2 + bn^2 + cp^2)(fem^2 + fdn^2 + dep^2). \end{aligned}$$

Полагая для краткости письма:

$$P = (f+e)m^2 + (f+d)n^2 + (d+e)p^2,$$

$$Q = fem^2 + fdn^2 + dep^2,$$

$$R = am^2 + bn^2 + cp^2,$$

превратимъ уравненіе (1) въ слѣдующее:

$$S^3 - (R+P)S^2 + (Q+RP)S - RQ = 0,$$

или

$$(S-R)(S^2 - PS + Q) = 0.$$

Это уравненіе распадается на два:

$$S - R = 0 \quad (2)$$

$$S^2 - PS + Q = 0. \quad (3)$$

Не трудно убѣдиться, что уравненіе (2) удовлетворяется значеніемъ S , соответствующимъ условіямъ:

$$A = m, \quad B = n, \quad C = p. \quad (c)$$

Дѣйствительно, равенства (IV) § 30 даютъ:

$$n_1 A + t_3 B + t_2 C = AS$$

$$t_3 A + n_2 B + t_1 C = BS$$

$$t_2 A + t_1 B + n_3 C = CS.$$

Умножая эти равенства на A, B, C и складывая результаты, найдемъ:

$$S = A^2 n_1 + B^2 n_2 + C^2 n_3 + 2ABt_3 + 2ACt_2 + 2BCt_1.$$

Вводя сюда значенія n_1, n_2, \dots изъ равенствъ (a) § 30 и пользуясь равенствами (c), по раскрытіи скобокъ найдемъ:

$$S = am^4 + bn^4 + cp^4 + 6fm^2n^2 + 6em^2p^2 + 6dn^2p^2.$$

или, подставляя значенія $6f, 6e, 6d$ изъ уравненій (I) предыдущаго параграфа,

$$S = am^2 + bn^2 + cp^2 = R.$$

И такъ заключаемъ, что S равно R только въ случаѣ существованія условій (c), а такъ какъ послѣднія въ нашемъ вопросѣ не имѣютъ мѣста, то заключаемъ, что S можетъ удовлетворять только уравненію

$$S^2 - PS + Q = 0.$$

Послѣднему равенству полезно придать иную форму.

Положимъ

$$d = -\alpha^2, \quad e = -\beta^2, \quad f = -\gamma^2.$$

тогда

$$P = (\beta^2 + \gamma^2)m^2 + (\gamma^2 + \alpha^2)n^2 + (\alpha^2 + \beta^2)p^2,$$

$$Q = \beta^2\gamma^2m^2 + \gamma^2\alpha^2n^2 + \alpha^2\beta^2p^2$$

и уравнение для S будетъ:

$$S^2 + [(\beta^2 + \gamma^2)m^2 + (\gamma^2 + \alpha^2)n^2 + (\alpha^2 + \beta^2)p^2]S + \beta^2\gamma^2m^2 + \gamma^2\alpha^2n^2 + \alpha^2\beta^2p^2 = 0.$$

Введя при S^2 множитель $m^2 + n^2 + p^2$ равный единицѣ, представимъ это уравнение въ видѣ:

$$m^2(S + \beta^2)(S + \gamma^2) + n^2(S + \alpha^2)(S + \gamma^2) + p^2(S + \alpha^2)(S + \beta^2) = 0,$$

или, наконецъ, раздѣляя на $(S + \alpha^2)(S + \beta^2)(S + \gamma^2)$, въ видѣ:

$$\frac{m^2}{S + \alpha^2} + \frac{n^2}{S + \beta^2} + \frac{p^2}{S + \gamma^2} = 0. \quad (\text{III})$$

§ 35. Пренебрегая поглощеніемъ, мы получимъ:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{F}{c_0^2}, \text{ или еще пренебрегая членомъ } 4(\kappa - \nu)^2 q^2 \text{ въ сравненіи съ } S^2, \text{ найдемъ:}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} - \frac{4\mu\nu^2}{\mu S} = \frac{1}{c_0^2} - \frac{g}{S},$$

отсюда имѣемъ:

$$S = \frac{gc^2c_0^2}{c^2 - c_0^2}; \text{ а потому:}$$

$$\frac{S}{c^2} - 1 = \frac{gc_0^2\lambda^2}{4\pi^2(c^2 - c_0^2)} = \frac{g\lambda^2}{4\pi^2\left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right)}; \text{ но, съ од-}$$

ной стороны, λ^2 есть количество очень малое, съ другой же количество g пропорціонально квадрату коэффициента тренія, поэтому мы можемъ въ уравненіи для S поставить $-c^2$; тогда найдемъ:

$$\frac{m^2}{\alpha^2 - c^2} + \frac{n^2}{\beta^2 - c^2} + \frac{p^2}{\gamma^2 - c^2} = 0,$$

уравненія Фрэнэля.

Разсматривая это уравненіе, встрѣчаемся съ однимъ обстоятельствомъ, трудно разрѣшимымъ при настоящемъ уровнѣ нашихъ знаній. Именно, видимъ, что α , β , γ , будучи съ одной стороны коэффициентами упрукости даннаго тѣла, съ другой же даютъ скорости свѣта вдоль его осей упрукости; мы не знаемъ этихъ коэффициентовъ, а скорости намъ извѣстны, и такъ какъ послѣднія суть очень большія величины, то должно заключить, что и первыя таковы же. Послѣднее заключеніе можетъ подрывать довѣріе къ развиваемой теоріи, а слѣдовательно и къ теоріи Ломмеля.

§ 36. Опредѣлимъ точныя значенія U и V .

Подставляя значеніе $SV + d$ изъ формулы (λ) параграфа 32 въ равенство (γ) и сокращая на общій множитель $SU - q^2$, который, очевидно, не равенъ нулю, найдемъ для опредѣленія U уравненіе:

$$SU^2 - (q^2 - aS)U = aq^2 + \frac{h}{1 + \left(\frac{d + bS}{q^2 + aS}\right)^2} \quad (1)$$

Но полагая $S = c_0^2 s$, найдемъ:

$$q^2 - aS = \frac{4\pi^2 c_0^2}{\lambda^2} (1 - s); \quad \left(\frac{d + bS}{q^2 + aS}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2 c_0^2} \left(\frac{\kappa - \nu + s\rho}{1 + s}\right)^2$$

$$aq^2 = \frac{16\pi^4 c_0^2}{\lambda^4}, \quad h = \frac{16\pi^2 \nu^2 \rho}{\lambda^2}.$$

Затѣмъ положимъ на время:

$$A = \frac{4\pi^2(1-s)}{s}, \quad B = \frac{16\pi^4}{s}, \quad C = \frac{16\pi^2 \nu^2 \rho}{c_0^2 s} \quad \text{и} \quad D = \frac{\pi c_0(1+s)\rho}{\kappa - \nu + s\rho};$$

тогда уравненіе (1) обращается въ слѣдующее:

$$U^2 - \frac{A}{\lambda^2} U = \frac{B}{\lambda^4} + \frac{CD^2}{(D^2 + \lambda^2)\lambda^2}.$$

Откуда находимъ:

$$U = \frac{A}{2\lambda^2} \pm \sqrt{\frac{A^2+4B}{4\lambda^4} + \frac{CD^2}{(D^2+\lambda^2)\lambda^2}} \quad (2)$$

Но въ формулѣ $U = K^2 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} n^2$, если возьмемъ:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} p, \text{ то}$$

$$U = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} (n^2 - p^2).$$

Слѣдовательно:

$$n^2 - p^2 = -\frac{A}{8\pi^2} \mp \sqrt{\frac{A^2+4B}{64\pi^4} + \frac{CD\lambda^2}{16\pi^4(D^2+\lambda^2)}}$$

или, удобнѣе:

$$n^2 - p^2 - 1 = -\frac{A+8\pi^2}{8\pi^2} \mp \sqrt{\frac{A^2+4B}{64\pi^4} + \frac{CD\lambda^2}{16\pi^4(D^2+\lambda^2)}}$$

Но положивъ:

$$\frac{1+s}{2s} = \alpha, \quad \frac{\nu^2 \rho s}{(u - \nu + s\rho)^2} = \beta,$$

безъ труда найдемъ:

$$\frac{A+8\pi^2}{8\pi^2} = \alpha; \quad \frac{A^2+4B}{64\pi^4} = \alpha^2; \quad \frac{CD^2}{16\pi^4} = \alpha^2\beta;$$

слѣдовательно:

$$n^2 - p^2 - 1 = -\alpha \mp \alpha \sqrt{1 + \frac{\beta\lambda^2}{D^2+\lambda^2}}.$$

Разлагая корень въ строку и замѣчая, что количество D очень мало, безъ труда найдемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2} + \frac{d}{\lambda^4} + \dots, \quad (a)$$

Замѣтимъ, что радикаль взять съ —, въ справедливости чего убѣдимся ниже; количества b, c, d очень малы и идутъ

уменьшаясь; и они сами суть строки, расположенныя по степенямъ D^2 ; коэффициентъ b , какъ показываетъ его значение, отрицателенъ.

Строку (a) можно представить въ другой, болѣе удобной формѣ. Можно положить съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$a + b\lambda^2 = a \left(1 + \frac{b}{a}\lambda^2 \right) = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}\lambda^2} = \frac{\frac{a^2}{b}}{\lambda^2 - \frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{A}{\lambda^2 - B}, \text{ положивъ:}$$

$$A = -\frac{a^2}{b}, \quad B = \frac{a}{b}.$$

Точно такъ-же съ тѣмъ-же приближеніемъ можемъ взять послѣдовательно:

$$\frac{c}{\lambda^2} + \frac{d}{\lambda^4} = \frac{c}{\lambda^2} \left(1 + \frac{d}{c\lambda^2} \right) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{1}{1 - \frac{d:c}{\lambda^2}} =$$

$$= \frac{c}{\lambda^2 - \frac{d}{c}} = \frac{D}{\lambda^2 - C}; \text{ положивъ:}$$

$$c = D, \quad \frac{d}{c} = C.$$

Такимъ образомъ находимъ окончательно:

$$n^2 - p^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{D}{\lambda^2 - C}. \quad (I)$$

Подобную формулу далъ эмпирически и повѣрилъ Кеттелеръ¹; повѣрку онъ производилъ, вычисляя по формулѣ (I) показатели преломленія обыкновеннаго луча въ исландскомъ шпатѣ, опре-

¹ Wied. Ann. Bd. XII. S. 367.

дѣленные Маскаромъ; разности между вычисленіемъ и опытомъ достигали вообще немногихъ единицъ 5-го десятичнаго знака.

Замѣтимъ, что у насъ B отрицательно, и Кеттелеръ въ разсматриваемомъ примѣрѣ дѣйствительно нашель то-же самое.)

Подобнымъ образомъ найдемъ для V уравненіе:

$$V^2 + \frac{A}{\lambda} V = \frac{B}{\lambda^2} + \frac{\frac{C}{\lambda^2}}{1 + \frac{D^2}{\lambda^2}} \quad (3)$$

гдѣ $A = \frac{4\pi}{sc_0} [\kappa - \nu - s\rho]$, $B = \frac{16\pi^2}{sc_0^2} \nu(\kappa - \nu)\rho$,

$$C = \frac{16\pi^2}{sc_0^2} \nu^2 \rho, \quad D = \pi c_0 \frac{1+s}{\kappa - \nu + s\rho}.$$

Опредѣляя V изъ (3), разлагая корень въ строку и полагая:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} p,$$

найдемъ:

$$2np = \lambda \left\{ \frac{A_1}{\lambda^2 - B_1} + \frac{D_1}{\lambda^2 - C_1} \right\} \quad (II)$$

Получаемъ формулу, которую повѣряли многіе физики: Гессе¹, Кеттелеръ² и др.

Замѣтимъ, что количества B_1 , C_1 въ формулѣ (II) можемъ замѣнить B , C формулы (I), сохраняя ту-же степень приближенія.

§ 37. Если вмѣсто гипотезы Ломмеля (§ 24) относительно силъ тренія и сопротивленія введемъ гипотезу, аналогичную предложенной Стоксомъ для жидкостей, т. е. положимъ:

$$F_x = 2m\nu \left(\frac{d\Delta_2\pi}{dt} - \frac{d\Delta_2u}{dt} \right), \quad F_y = \dots, \quad F_z = \dots$$

¹ Wied. Ann. Bd. XI, S. 871 (1880).

² Wied. Ann. Bd. XII, S. 481 (1881).

$$(d) \quad F'_x = 2\kappa m \frac{d\Delta_2 u}{dt}, \dots$$

то при прежнихъ обозначеніяхъ найдемъ уравненія:

$$VR \cos \psi + UR \sin \psi = V + \frac{Uc_0^2 - q^2}{2\nu\rho q} \quad (1)$$

$$(e) \quad UR \cos \psi - VR \sin \psi = U - \frac{Vc_0^2}{2\nu\rho q} \quad (2)$$

$$(Aq^2 + L_1) \cos \psi + G_1 \sin \psi + 2\nu_1 q AV = 0 \quad (3)$$

и такихъ уравненій три; далѣе

$$G_1 \cos \psi - (Aq^2 + L_1) \sin \psi + 2\nu_1 q AU = 0 \quad (4)$$

такихъ уравненій тоже три; причеиъ положено:

$$L_1 = -S_1 U + 2(\kappa - \nu) q AV, L_2 = \dots, L_3 = \dots$$

$$G_1 = S_1 V + 2(\kappa - \nu) q AU, G_2 = \dots, G_3 = \dots$$

Изъ системъ (3) и (4) совершенно такимъ же путемъ, какъ въ § 30, найдемъ для S уравненіе (I) § 33.

Уравненія (3) и (4), по умноженіи соотвѣтственно на A, B, C и складываніи результатовъ, даютъ:

$$\left. \begin{aligned} (q^2 + L) R \cos \psi + GR \sin \psi &= -2\nu q V \\ GR \cos \psi - (q^2 + L) R \sin \psi &= -2\nu q U \end{aligned} \right\} (a)$$

здѣсь:

$$L = -US + 2(\kappa - \nu) q V;$$

$$G = VS + 2(\kappa - \nu) q U.$$

Изъ уравненій (a) находимъ:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{S(U^2 + V^2) - q^2 U}{2(\kappa - \nu) q (U^2 + V^2) + q^2 V} \quad (b)$$

Отсюда находимъ приближенную формулу:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{S}{2(n-\nu)q} \quad (b')$$

пренебрегая членами $\frac{U}{U^2 + V^2}$ и $\frac{V}{U^2 + V^2}$ какъ малыми.

Также находимъ:

$$R = \frac{2\nu q \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(U^2 + V^2)(S^2 + 4(n-\nu)^2 q^2) + 2q^2 L + q^4}} \quad (c)$$

или съ тѣмъ же приближеніемъ:

$$R = \frac{2\nu q}{\sqrt{S^2 + 4(n-\nu)^2 q^2}} \quad (c')$$

Формулы (b') и (c') показываютъ связь настоящей теоріи съ теоріей Ломмеля.

Внося значенія ψ и R изъ равенствъ (b) и (c) въ уравненія (1) и (2), получимъ для U и V два уравненія 4-й степени весьма сложнаго вида, поэтому мы ими заниматься не будемъ.

ГЛАВА VII.

§ 38. Въ-виду существенныхъ недостатковъ теорій, развитыхъ въ предыдущихъ главахъ, необходимо поискать — нельзя ли все-таки дать теорію свѣторазсѣянія и двойнаго преломленія болѣе состоятельную, чѣмъ предыдущія. Мнѣ кажется, что это можно сдѣлать и при настоящемъ нашемъ незнаніи внутреннихъ молекулярныхъ силъ тѣль.

Займемся поэтому изложеніемъ новой теоріи двойнаго преломленія и свѣторазсѣянія.

§ 39. На основаніи равенства (3) § 2 мы можемъ написать¹.

¹ При этомъ знакъ S обозначаетъ сумму трехъ членовъ, аналогичныхъ написанному.

$$\iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \left\{ \mu \cdot S \frac{d^2 \pi}{dt^2} \delta \pi + \right. \\ \left. + m \cdot S \frac{d^2 u}{dt^2} \delta u - S E_x \delta \pi - S M_x \delta \pi \right\} = 0. \quad (1)$$

При этомъ предполагаемъ, что силы упругости матеріальной среды безконечно малы въ сравненіи съ упругостью эфира; то-же полагаемъ и относительно силъ, дѣйствующихъ со стороны эфирныхъ частицъ на матеріальныя; силы же M_x , M_y , M_z суть составляющія силы, обусловленной воздѣйствіемъ матеріальной среды на эфирную.

Это воздѣйствіе матеріальныхъ частицъ на эфирную проявляется двояко: 1) въ видѣ сопротивленія уже существующему движенію эфирной частицы и 2) въ измѣненіи упругости эфира.

Обозначимъ составляющія силы 1-го рода буквами

$$R_x, R_y, R_z,$$

а 2-го буквами:

$$F_x, F_y, F_z;$$

тогда:

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_z \end{cases} = \begin{cases} R_x \\ R_y \\ R_z \end{cases} + \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} \quad (1)$$

Относительно силъ M_x, \dots мы можемъ сдѣлать только болѣе или менѣе вѣроятныя гипотезы; эти гипотезы должны быть различны, смотря по тому, какова рассматриваемая среда: поглощающая свѣтъ, или нѣтъ.

Разсмотримъ сначала послѣднюю.

§ 40. Положимъ, что весьма вѣроятно:

$$R_x = \delta_x \pi, \quad R_y = \delta_y \rho, \quad R_z = \delta_z \omega. \quad (1)$$

Что-же касается силы F , то мы можемъ предположить, что измѣненіе упругости эфира, находящагося въ движеніи, зави-

сигъ отъ самой силы его упругости, и такъ - какъ видъ этой зависимости намъ неизвѣстенъ, то, какъ приближеніе, мы можемъ полагать:

$$F_x = \alpha_x E_x + \sum \alpha_x^{(i)} \cdot \frac{\partial^{(i)} E_x}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial z^r} \quad (2)$$

и подобныя формулы для F_y и F_z , при этомъ

$$p + q + r = i.$$

Ясно, что выраженіе (2) можетъ содержать, во-первыхъ, только члены съ производными четныхъ порядковъ и, во-вторыхъ, коэффициенты при производныхъ одного и того-же порядка равны; это суть необходимыя слѣдствія симметричности строенія срединъ, коими мы занимаемся.

Подставивъ въ (1) и (2) значенія π , ζ , ω изъ § 25, мы можемъ представить ихъ въ видѣ:

$$R_x = - \frac{c^2}{q^2} \delta_x E_x \quad (3)$$

и

$$F_x = \left[\alpha_x + \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_x^{(i)} \cdot \frac{q^{2i}}{c^{2i}} \right] \cdot E_x, \quad (4)$$

причемъ δ и α суть нѣкоторые коэффициенты и $\alpha_x^{(i)}$ съ возрастаніемъ номера (i) уменьшается.

Подобныя формулы имѣемъ и для R_y , F_y , ...

Соединяя (3) и (4), имѣемъ:

$$M_x = M'_x E_x, \quad M_y = M'_y E_y, \quad M_z = M'_z E_z, \quad (5)$$

гдѣ

$$M'_x = \alpha_x - \delta_x \cdot \frac{c^2}{q^2} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_x^{(i)} \cdot \frac{q^{2i}}{c^{2i}}. \quad (6)$$

Подобныя выраженія будемъ имѣть для M'_y и M'_z .

Замѣтимъ здѣсь одно важное обстоятельство.

Если бы средина не обладала симметрией, то въ выраженіи M_x, M_y и M_z вошли бы члены съ производными нечетныхъ порядковъ отъ E_x, E_y, E_z , что соотвѣствовало бы новымъ оптическимъ явленіямъ въ такихъ срединахъ, — именно явленіямъ эллиптической или вращательной поляризаціи.

Допустимъ далѣе, что u, v, w суть функціи π, ϱ, ω , и предположимъ вмѣстѣ съ Буссинескомъ¹, что

$$u = m_x \pi, \quad v = m_y \varrho, \quad w = m_z \omega,$$

гдѣ

$$m_x = \gamma_x + \sum_{i=1}^{i=\infty} \gamma_x^{(i)} \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^{2i}, \quad m_y = \dots, \quad m_z = \dots$$

Кoeffициенты $\gamma_x^{(i)}$ того же свойства, что и $\alpha_x^{(i)}$.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ силъ, для полноты рѣшенія введемъ еще силы давленія (гидростатическаго), существующаго въ эфирной средѣ:

$$(1) \quad U_x = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad U_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad U_z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Положимъ, что

$$P = P_0 \sin Q.$$

§ 41. Внеся все найденное въ послѣднемъ параграфѣ въ уравненіе (1) § 39, найдемъ, приравнивая нулю коэффиціенты при $\delta\pi, \delta\varrho, \delta\omega$:

$$(2) \quad (\mu + m m_x^2) \frac{d^2 \pi}{dt^2} = e \Delta_2 \pi + M'_x \Delta_2 \pi + \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$(\mu + m m_y^2) \frac{d^2 \varrho}{dt^2} = e \Delta_2 \varrho + M'_y \Delta_2 \varrho + \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$(\mu + m m_z^2) \frac{d^2 \omega}{dt^2} = e \Delta_2 \omega + M'_z \Delta_2 \omega + \frac{\partial P}{\partial z},$$

или подставляя значеніе π, ϱ, ω и дѣлая очевидныя приведенія:

¹ Journal de Liouville, T. XIII, p. 319 (1868).

$$\left. \begin{aligned} [c^2(\mu + mm_x^2) - (e + M'_x)]A &= mP_0 \frac{c}{q} \\ [c^2(\mu + mm_y^2) - (e + M'_y)]B &= nP_0 \frac{c}{q} \\ [c^2(\mu + mm_z^2) - (e + M'_z)]C &= pP_0 \frac{c}{q} \end{aligned} \right\} (1)$$

§ 42. Какъ первое приближеніе допустимъ въ уравненіяхъ (1) предыдущаго §:

$$m_x = m_y = m_z = M$$

и положимъ:

$$\frac{e + M'_x}{\mu + mM^2} = \alpha^2, \quad \frac{e + M'_y}{\mu + mM^2} = \beta^2, \quad \frac{e + M'_z}{\mu + mM^2} = \gamma^2, \quad (a)$$

$$\frac{P_0 c}{q(\mu + mM^2)} = F,$$

тогда уравненія (1) превращаются въ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} (c^2 - \alpha^2)A^2 &= mF \\ (c^2 - \beta^2)B^2 &= nF \\ (c^2 - \gamma^2)C^2 &= pF \end{aligned} \right\} (1)$$

Эти уравненія даютъ извѣстные законы двойнаго преломленія; умножая ихъ по порядку на

$$\frac{m}{c^2 - \alpha^2}, \quad \frac{n}{c^2 - \beta^2}, \quad \frac{p}{c^2 - \gamma^2},$$

складывая и помня, что

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

найдемъ:

$$\frac{m^2}{c^2 - \alpha^2} + \frac{n^2}{c^2 - \beta^2} + \frac{p^2}{c^2 - \gamma^2} = 0. \quad (2)$$

Это есть извѣстное уравненіе Френеля, найденное имъ въ 1821 году въ немного иной формѣ¹.

¹ Oeuvres complètes d'Aug. Fresnel, T. II, p. 296.

Получивъ уравненіе (2), безъ труда найдемъ всѣ извѣстные законы двойнаго лучепреломленія.

§ 43. Что касается свѣторазсѣянія, то уравненія (1) § 41 даютъ, будучи предварительно умножены на A, B, C и сложены, послѣ простыхъ преобразованій:

$$n^2 - 1 = -K^2 \lambda^2 + a + \frac{bn^2}{\lambda^2} + \frac{cn^4}{\lambda^4} + \dots \quad (1)$$

Формула (1) представляетъ въ первой части безконечную строку; законъ составленія членовъ ея неизвѣстенъ и употреблять ее въ такомъ видѣ неудобно, поэтому постараемся замѣнить ее другими, болѣе удобными для употребленія.

Введемъ длину внутренней волны; называя ее l , имѣемъ:

$$l = \frac{\lambda}{n} \text{ или } \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{l}.$$

Подставляя въ (1), получимъ:

$$n^2 - 1 = -K^2 n^2 l^2 + a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} + \frac{d}{l^6} + \dots \quad (2)$$

Отсюда:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1 + K^2 l^2}{1 + a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} + \dots}$$

или, полагая:

$$\frac{1}{1+a} = a_1, \quad \frac{K^2}{1+a} = K_1^2, \quad \frac{b}{1+a} = b_1, \quad \frac{c}{1+a} = c_1,$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a_1 + K_1^2 l^2}{1 + \frac{b_1}{l^2} + \frac{c_1}{l^4} + \dots}$$

но вслѣдствіе малости κ_1 и γ_1 , β_1 можно взять:

$$\alpha_1 + \kappa_1 l^2 = \frac{\alpha_1}{1 - \frac{\kappa_1}{\alpha_1} l^2} = \frac{\alpha_1^2 : \kappa_1}{\alpha_1 : \kappa_1 - l^2} = \frac{A_1}{B_1 - l^2}.$$

Точно такъ-же:

$$\frac{\beta_1}{l^2} + \frac{\gamma_1}{l^4} = \frac{\beta_1}{l^2} \left(1 + \frac{\gamma_1 : \beta_1}{l^2} \right) = \frac{\beta_1 : l^2}{1 - \frac{\gamma_1 : \beta_1}{l^2}} = \frac{\beta_1}{l^2 - (\gamma_1 : \beta_1)} = \frac{C_1}{D_1 - l^2}.$$

Ограничиваясь 4-мя членами въ формулѣ (2), имѣемъ:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A_1}{B_1 - l^2} + \frac{C_1}{D_1 - l^2}. \quad (a)$$

Изъ той же формулы (1) обращеніемъ строки найдемъ:

$$n^2 - 1 = -K^2 \lambda^2 + a + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{c_1}{\lambda^4} + \dots \quad (1 \text{ bis}).$$

Отсюда, такъ-же какъ и выше, найдемъ:

$$n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 - B} + \frac{C}{\lambda^2 - D}. \quad (b)$$

Въ формулахъ (1) и (1 bis) коэффициенты b, c, d, \dots очень малы и идутъ уменьшаясь; коэффициентъ K тоже очень малъ. Вотъ таблица значеній K^2 для аррагонита и топаза въ случаѣ, когда лучъ идетъ вдоль какой-нибудь изъ осей упругости:

Аррагонитъ	$7,29 \cdot 10^{-5}$	$20,58 \cdot 10^{-5}$	$1,05 \cdot 10^{-5}$
Топазъ	$6,55 \cdot 10^{-5}$	$11,92 \cdot 10^{-5}$	$8,60 \cdot 10^{-5}$

Эти коэффициенты вычислены по даннымъ Рудберга¹ для лучей B, D, F и H , ограничиваясь въ формулѣ (1 bis) первыми четырьмя членами; длины волнъ были взяты среднія изъ опредѣленій Фрауенгофера, Ванъ-деръ-Виллигена, Дитшейнера, Онгстрема, Стефана и Маскара².

¹ Эти данныя взяты изъ французскаго перевода оптики Бера (стр. 325 и 326).

² *Wüllner's, Exp. Physik, Bd. II. S. 136 (3 Aufl.).*

Формула (1 bis), если остановимся на 4-х членах или даже на пяти, даетъ результаты болѣе далекіе отъ данныхъ опыта¹, чѣмъ формулы (a) или (b); математически это ясно, ибо въ формулахъ (a) и (b), если-бы ихъ развернули въ строки, кромѣ 4-хъ членовъ (1 bis), взойдетъ еще рядъ членовъ, хотя не равный суммѣ откидываемыхъ въ (1 bis) членовъ, но мало отъ нея отличающійся, такъ что влияние откидываемыхъ членовъ въ большей своей части формулы (a) и (b) заключаютъ въ себѣ.

Такимъ образомъ для непоглощающихъ срединъ формулы (a) или (b) суть приближенныя формулы, дающія очень надежные результаты.

Если-бы намъ былъ извѣстенъ законъ составленія коэффициентовъ въ строкѣ (1) или (1 bis), то мы знали бы точно ея сумму.

Если-бы отбросили членъ съ K^2 , какъ очень малый, и ограничились бы двумя членами, то формулу (1 bis) можно написать такъ:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{b_1 : a},$$

или, полагая:

$$(1) \quad b_1 : a = \lambda_0^2,$$

въ видѣ:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} \quad (c)$$

Эта формула съ двумя постоянными a и λ_0 даетъ результаты лучшіе, чѣмъ формула (1 bis), ограниченная двумя членами

¹ Относительно поправки формулы (a) см. Ketteler въ Pog. Ann. Bd. 140, S. 1 (1870), а для формулы (b) Wiedemann's Ann. Bd. XII. S. 363 (1881). Ср. также опредѣленіе n для спирта по формулѣ (1 bis) съ 4-мя членами Wied. Ann. Bd. XII. S. 502.

(безъ члена съ K^2 , разумѣется); причина понятна изъ сказаннаго о формулахъ (а) и (b).

Ломмель¹ достаточно многочисленными сравненіями доказалъ это свойство формулы (с).

Формулу (1 bis) можно еще превратить въ такую

$$n^2 - 1 = \frac{\alpha + \beta \cdot \lambda^2 + \gamma : \lambda^2}{1 - (\lambda_0 : \lambda)^2}; \quad (d)$$

эта формула даетъ тоже очень хорошіе результаты, какъ показалъ Ломмель².

Замѣтимъ еще, что изъ (1 bis) можно получить формулу для n вида:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + H\lambda^2; \quad (e)$$

такую формулу повѣрялъ Маскаръ³.

§ 44. Перейдемъ къ срединамъ, поглощающимъ свѣтъ.

Поглощеніе свѣта серединой должно, по нашему мнѣнію, обусловливаться силами, аналогичными тренію; поэтому, полагая треніе пропорціональнымъ скорости колеблющейся частицы, имѣемъ:

$$R_x = \delta_x \pi + \kappa_x \frac{d\pi}{dt}, \quad R_y = \delta_y \varrho + \kappa_y \frac{d\varrho}{dt},$$

$$R_z = \delta_z \omega + \kappa_z \frac{d\omega}{dt}. \quad (1)$$

Далѣе въ этомъ случаѣ можно взять:

$$\pi = Ae^{-Kr+Qi}, \quad \varrho = Be^{-Kr+Qi}, \quad \omega = Ce^{-Kr+Qi},$$

гдѣ K — коэффициентъ поглощенія и

$$r = mx + ny + pz.$$

¹ Wied. Ann. Bd. VIII. S. 628 (1879). Также Bd. III. S. 348 (1878).

² Wied. Ann. Bd. XIII, S. 353 (1881).

³ Annales scientifiques de l'école normale, p. 266 (1864).

Первое уравнение движения будетъ:

$$\left(\mu + mm_x^2\right) \frac{d^2\pi}{dt^2} = e\Delta_2\pi + F_1\Delta_2\pi + \delta_x\pi + \kappa_x \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

причемъ положено

$$F_1 = \sum_{i=0}^{i=\infty} \beta_x^{(i)} N^{2i} \text{ и } N = K + \frac{q}{c} i.$$

(Уравнение (2) и два другихъ ему аналогичныхъ для осей y и z даютъ, какъ и выше (§ 43):

$$v^2 - 1 = G\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2} v^2 + \frac{c}{\lambda^4} v^4 + \dots + H\lambda i \quad (3)$$

гдѣ $v = n + pi$ (4)

n — показатель преломленія, а p связанъ съ коэффициентомъ K равенствомъ

$$K = - \frac{2\pi}{\lambda} p. \quad (5)$$

Коэффициентъ p тоже называютъ коэффициентомъ поглощенія лучей длины волны λ .

Уравнение (3) распадается на два; сравнивая его действительныя и мнимыя части, находимъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = G\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2} (n^2 - p^2) + \frac{c}{\lambda^4} [(n^2 - p^2)^2 - 4n^2 p^2] + \frac{\partial}{\lambda^6} [(n^2 - p^2)^3 - 12(n^2 - p^2)n^2 p^2] + \dots, \quad (6)$$

$$2np = H\lambda + \frac{2b}{\lambda^2} np + \frac{4c}{\lambda^4} (n^2 - p^2) np + \frac{2d}{\lambda^6} [3(n^2 - p^2)^2 - 4n^2 p^2] np + \dots, \quad (7)$$

Занимаясь здѣсь только тѣми срединами, для которыхъ p довольно мало, мы можемъ въ правой части равенства (6) пренебречь членами:

$$\frac{p^2}{n^2}, \frac{p^4}{n^4}, \dots$$

умноженными на малые коэффициенты b, c, \dots тогда оно превращается въ слѣдующее:

$$n^2 - p^2 - 1 = G\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2} n^2 + \frac{c}{\lambda^4} n^4 + \dots \quad (8)$$

Точно такъ-же изъ (7) можемъ извлечь равенство:

$$2np = \lambda \left\{ H + \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda^4} + \dots \right\} \quad (9)$$

Формула (8) того-же вида, какъ и формула (1 bis) § 43; поэтому ее можно представить въ видѣ (b) того-же §; точно такъ-же формулу (9) можно написать подѣ видомъ:

$$2np = \lambda \left(H + \frac{E}{\lambda^2 - F} \right) \quad (10)$$

При этомъ значеніе коэффициентовъ понятно.

Формулы (6) и (7) можно преобразовать иначе, чѣмъ мы это сейчасъ сдѣлали; тогда форма (8) останется та-же, въ равенство же (9) взойдетъ членъ $L\lambda^2$, аналогичный члену $G\lambda^2$ и коэффициентъ L крайне малъ.

§ 45. Формулу (8) мы можемъ съ большимъ или меньшимъ приближеніемъ замѣнить другими; полезно рассмотреть эти различныя формы.

1) Ограничиваясь первыми 4-мя членами, имѣемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = G\lambda^2 + a + \frac{bn^2}{\lambda^2} + \frac{cn^4}{\lambda^4} \quad (1)$$

Пренебрегая p^2 и G , какъ количествами малыми, и полагая

$$a + 1 = n^2 \infty, \quad b = B + M, \quad c : M = L^2$$

найдемъ съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$n^2 = n_\infty^2 + B \frac{n^2}{\lambda^2} + \frac{M}{\frac{\lambda^2}{n^2} - L^2} \quad (2)$$

Видимъ, что n_∞ есть значеніе n для $\lambda = \infty$.

Въ такомъ (2) видѣ повѣрялась формула для дисперсіи Клаесомъ¹ для многихъ поглощающихъ срединъ; при этомъ, какъ можно убѣдиться простымъ вычисленіемъ, коэффициенты B , n_∞ , L связаны съ длиною волны для средины полосы поглощенія, λ_m , соотношеніемъ:

$$\lambda_m^2 - B = n_\infty^2 L^2.$$

2) Пренебрегая G и p^2 и полагая:

$$c : b = L^2, \quad b = D'L^2, \quad n_\infty^2 = a + 1,$$

найдемъ такъ-же какъ и выше:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{D'L^2 n^2}{\lambda^2 - L^2 n^2} \quad (3)$$

Эту формулу, данную Кеттелеромъ, какъ и формулу (2) повѣрялъ Зибенъ¹ для многихъ поглощающихъ срединъ; совпаденіе вычисленій съ данными опыта было вполнѣ удовлетворительно.

3) Поступая, какъ въ § 43 при полученіи формулы (d), найдемъ:

$$n^2 = \alpha + \beta \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right) + \frac{\gamma}{1 - \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right)} \quad (4)$$

¹ Wied. Ann. Bd. III, S. 398 (1878). Клаесъ исходилъ изъ формулы Кеттелера (§ 12).

² Wied. Ann. Bd. VIII, S. 137 (1879).

Эту формулу повѣрялъ Ломмель при помощи наблюденій Кундта¹; согласіе получалось достаточное.

Что-же касается формулы для p , именно формулы (9) или (10), то въ этой формѣ она не повѣрялась, въ формѣ же нѣсколько отличной, но выводимой изъ формулы (7) или (9), повѣрялась Гессе², Пульфрихомъ³ и Кеттелеромъ⁴; совпаденіе, принимая во вниманіе малость p и трудность его опредѣленія, было вполне удовлетворительное.

§ 46. Соединяя все сказанное, должны заключить, что истинныя дисперсіонныя формулы суть (6) и (7), и первая можетъ быть замѣнена формой (b) § 43, а вторая (10) предъидущаго параграфа.

Замѣтимъ, что формулы (6) и (7) § 45 или лучше формула (3) § 44 превращается въ (b) § 43, если положимъ $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 0$, ибо тогда: $H = 0$ и $p = 0$ и $v = n$.

¹ Wied. Ann. Bd. III, S. 352 (1878).

² Wied. Ann. Bd. XI, S. 871 (1880).

³ Wied. Ann. Bd. XIV, S. 177 (1881) и Bd. XV, S. 337 (1882).

⁴ Wied. Ann. Bd. XII, S. 481 (1881).

$$n^2 = \alpha + \beta \left(\frac{v}{\lambda} \right)^2 + \gamma \left(\frac{v}{\lambda} \right)^4$$

СОДЕРЖАНІЕ «ПРИЛОЖЕНІЯ».

	<i>Стран.</i>
Предисловіе	3.
I. ОБЩІЯ УРАВНЕНІЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАГО ДВИЖЕНІЯ ЧАСТИЦЪ ТѢЛА.	
§ 1. Основныя уравненія вопроса.	5.
§ 2. Силы, дѣйствующія въ системѣ	6.
§ 3. Вычисленіе ихъ	7.
§ 4. Окончательныя уравненія.	12.
II. ОБЩІЯ ЗАМѢЧАНІЯ НА ПОЛУЧЕННЫЯ УРАВНЕНІЯ.	
ТЕОРІИ КОШИ И НЕЙМАННА.	
§ 5. Характеръ общихъ уравненій	14.
§ 6. Основное ихъ свойство	14.
§ 7. Теоріи Коши и Нейманна	14.
III. ТЕОРІЯ КЕТТЕЛЕРА.	
§ 8. Основныя уравненія теоріи. Средины, непоглощающія свѣтъ.	16.
§ 9. Средины, поглощающія свѣтъ	20.
§ 10. Второй способъ Кеттелера. Его несостоятельность.	20.
§ 11. Двойное преломленіе по второй теоріи Кеттелера.	23.
§ 12. Свѣторазсѣяніе въ непоглощающихъ срединахъ	25.
§ 13. Двойное преломленіе въ нихъ	28.
§ 14. Эллипсоидъ показателей преломленія	28.
§ 15. Сѣченіе эллипсоида показателей преломленія.	29.
§ 16. Эллипсоидъ скоростей	30.
§ 17. Сѣченіе эллипсоида скоростей	32.
§ 18. Поверхность волны	32.
§ 19. Поглощающія средины. Несостоятельность теоріи Кеттелера въ этомъ случаѣ	33.
IV. ТЕОРІИ МАКСУЭЛЛЯ, ЛЯНГА, СТЕФАНА И ДР.	
§ 20. Теорія Максвелля.	35.
§ 21. Теоріи Лянга и Стефана	37.

§ 22. Теорія Брю	38.
§ 23. Теорія Буссинеска	38.
V. ТЕОРІЯ ЛОММЕЛЯ.	
§ 24. Основныя уравненія теоріи	40.
§ 25. Ихъ рѣшеніе	42.
§ 26. Опредѣленіе R и ψ	45.
§ 27. Опредѣленіе показателя преломленія и коэффици- ціента поглощенія	46.
§ 28. Преобразование полученныхъ формулъ	47.
§ 29. Сравненіе съ данными опыта	49.
VI. ВИДОИЗМѢНЕНІЕ ТЕОРІИ ЛОММЕЛЯ.	
§ 30. Основныя уравненія и рѣшеніе ихъ	50.
§ 31. Опредѣленіе R и ψ . Связь съ рѣшеніями Ломмеля.	52.
§ 32. Опредѣленіе приближенныхъ значеній U и V	54.
§ 33. Преобразование уравненія для S	58.
§ 34. Продолженіе	60.
§ 35. Уравненіе Фрэнеля	62.
§ 36. Опредѣленіе точныхъ значеній U и V	63.
§ 37. Гипотеза Стокса	66.
VII. НОВАЯ ТЕОРІЯ СВѢТОРАЗСѢЯНІЯ И ДВОЙНАГО ПРЕЛОМЛЕНІЯ.	
§ 38. Необходимость новой теоріи.	68.
§ 39. Основныя уравненія	68.
§ 40. Средины, непоглощающія свѣтъ	69.
§ 41. Рѣшеніе основныхъ уравненій	71.
§ 42. Двойное преломленіе	72.
§ 43. Свѣторазсѣяніе. Сравненіе съ данными опыта.	73.
§ 44. Средины, поглощающія свѣтъ	76.
§ 45. Сравненіе съ данными опыта	78.
§ 46. Замѣчаніе объ истинной формулѣ свѣторазсѣянія.	80.

ЗАМЪЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано:	Слѣдуетъ:
		$\beta'z$	$\beta'z$
11	5 <i>снизу</i>	τ	τ^2
19	9 —	$\frac{1}{f'}$	$\frac{1}{f'}$
22	9 —	§ 5	§ 4
35	9 —	$-\frac{4\pi}{\lambda} \sigma$	$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sigma$
37	11 —	§ 5	§ 4
40	10 <i>сверху</i>	§ 23	§ 24
43	5 <i>снизу</i>	§ 23	§ 24
50	3 <i>сверху</i>	§ 9	§ 25
—	8 —	§ 9	§ 25
—	7 <i>снизу</i>	§ 34	§ 31
55	4 <i>сверху</i>	A^2, B^2, C^2	A, B, C
72	11, 12 и 13 <i>св.</i>		
