VII

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

1882 ГОДА.

II.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1883.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *Г. Цѣхановецкій*.

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія:

ПОПРАВКА.

Стран.	Стр.	Напечатано:	Должно быть:
95	9 *снизу*	$\frac{\int \theta\, dx}{\int \theta\, dx . x - \int x\theta\, dx}$	$\frac{[\int \theta\, dx]^2}{\int \theta\, dx . x - \int x\theta\, dx}$

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

17 октября 1882 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, А. А. Клюшниковъ, Г. В. Левицкій, Д. М. Деларю, И. К. Шейдтъ, И. Д. Штукаревъ, Н. М. Флавицкій, Н. В. Проскурниковъ, П. М. Рудневъ и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Секретарь общества прочелъ отчетъ о дѣятельности и состояніи общества за истекшій академическій годъ.

Прочитано письмо *В. Г. Имшенецкаго*, въ коемъ онъ выражаетъ надежду на продолженіе своей связи съ обществомъ и любезную готовность доставлять обществу свои сообщенія.

По поводу этого письма, собраніе, по предложенію Д. М. Деларю, единогласно постановило: избрать В. Г. Имшенецкаго предсѣдателемъ и на текущій годъ и увѣдомить письмомъ объ избраніи его равно какъ и о мотивахъ этого избранія за подписью всѣхъ членовъ общества.

П. М. Рудневъ сообщилъ содержаніе письма, полученное имъ отъ секретаря математическаго общества, образованнаго въ С.-Петербургѣ студентами физико - математическаго факультета — въ коемъ изложенъ краткій отчетъ о состояніи этого общества, предметахъ занятій и перечень тѣхъ сообщеній, которые были сдѣланы — чтобы по нимъ можно было судить о характерѣ занятій его. Это общество проситъ высылать имъ изданія харьковскаго математическаго общества. Постановлено выслать полный экземпляръ «Сообщеній харьковскаго математическаго общества» и внести с.-петербургское математическое общество въ списокъ корреспондентовъ.

Г. В. Левицкій заявилъ о желаніи вѣнской и лейденской обсерваторій имѣть изданія нашего общества въ обмѣнъ на ихъ изданія.

Проф. *Вейръ* въ Вѣнѣ прислалъ обществу черезъ К. А. Андреева нѣсколько своихъ брошюръ и обѣщалъ высылать и на будущее время. Постановлено — выслать проф. Вейру изданія математическаго общества въ одномъ экземплярѣ, не внося его въ списки постоянныхъ корреспондентовъ.

Д. М. Деларю предложилъ въ члены Ив. Дм. Линицкаго. Баллотировка будетъ произведена въ слѣдующее засѣданіе.

Происходили выборы распорядительнаго комитета. Большинствомъ голосовъ выбраны: товарищами предсѣдателя — Д. М. Деларю и К. А. Андреевъ; секретаремъ — А. П. Грузинцевъ и библіотекаремъ — А. А. Клюшниковъ.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

о дѣятельности математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ,

за 1881—82 годъ.

Въ истекшемъ академическомъ году математическое общество продолжало идти по тому пути, который намѣченъ его уставомъ и котораго оно держалось въ два первые года. Составъ общества въ этомъ году подвергся слѣдующему измѣненію. Три члена вновь избраны въ засѣданія 9-го октября и 18-го марта. 19-го Сентября скончался Александъ Юрьевичъ Зиберъ, преподаватель харьковскаго реальнаго училища, бывшій членомъ общества съ самаго его возникновенія. Кромѣ того общество лишилось непосредственнаго личнаго участія въ дѣлахъ его предсѣдателя Василія Григорьевича Имшенецкаго, который будучи избранъ въ ординарные академики Императорской академіи наукъ, выбылъ изъ Харькова весною настоящаго года. Въ настоящее время общество состоитъ изъ 27-ми членовъ.

Составъ распорядительнаго комитета, избраннаго въ годичномъ собраніи 20 сентября прошедшаго года, былъ слѣдующій. Предсѣдатель—профессоръ (нынѣ академикъ) В. Г. Имшенецкій; товарищи предсѣдателя—профессоры М. Ѳ. Ковальскій и К. А. Андреевъ; секретарь—преподаватель 1-й харьковской гимназіи А. П. Грузинцевъ. Сверхъ того избранъ библіотекаремъ членъ его—помощникъ библіотекаря университета кандидатъ А. А. Клюшниковъ.

Съ 20-го сентября по 18-е марта общество имѣло 6-ть засѣданій, въ которыя было сдѣлано 11-ть сообщеній. Послѣднія относились какъ къ вопросамъ научнымъ по чистой и прикладной математикѣ, такъ и къ вопросамъ педагогическимъ. Были предложены разборы нѣкоторыхъ употребительныхъ учебниковъ и сдѣланы сообщенія педагогическаго характера. Однимъ постороннимъ лицомъ было сдѣлано сообщеніе, касающееся приложенія счетныхъ машинъ къ вычисленію статистическихъ данныхъ.

Засѣданія общества посѣщались посторонними лицами. Особенный же интересъ къ дѣламъ и предметамъ занятій общества обнаруживался какъ и въ предыдущіе годы со стороны гг. студентовъ физико-математическаго факультета, которые, посѣщая засѣданія, съ вниманіемъ слѣдили за докладами и преніями возникавшими по ихъ поводу.

До сего времени общество издавало по двѣ книжки въ годъ своихъ «Сообщеній». Число вышедшихъ книжекъ четыре и въ скоромъ времени выйдутъ еще двѣ, изъ которыхъ одна уже отпечатана.

Общество продолжаетъ сноситься съ нѣкоторыми учеными учрежденіями и другими обществами и отдѣльными лицами. Въ этомъ году число такихъ постоянныхъ корреспондентовъ, съ которыми общество обмѣнивается изданіями, возросло до 15-ти[1].

Въ истекшемъ году общество располагало небольшою денежной суммой, составившейся изъ добровольной складчины членовъ. Часть этой суммы была употреблена на выписку двухъ математическихъ журналовъ для библіотеки общества. По докладу завѣдующаго библіотекой общества въ послѣднее имѣется въ настоящее время 77-мь томовъ разныхъ изданій.

---

[1] Въ прошедшемъ году было 11-ть.

СПИСОКЪ

обществъ и учрежденій, получающихъ изданіе харьковскаго математическаго общества въ обмѣнъ или безвозмездно.

1. Библіотека Императорскаго технологическаго института въ С.-Петербургѣ.

2. Студентская библіотека с.-петербургскаго университета.

3. Библіотека московскаго университета.

4. Студентская библіотека московскаго университета.

5. Библіотека московской астрономической обсерваторіи.

6. Общество испытателей природы въ Москвѣ.

7. Политехническое общество при Императорскомъ техническомъ училищѣ въ Москвѣ.

8. Редакція журнала «Математическій листокъ».

9. Библіотека кіевскаго университета Св. Владиміра.

10. Студентская библіотека кіевскаго университета.

11. Библіотека казанскаго университета.

12. Студентская библіотека казанскаго университета.

13. Société mathématique de France. Paris.

14. Société des sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.

15. Naval Obserwatory. Washington.

16. Московское математическое общество.

17. С.-Петербургское математическое общество студентовъ.

18. Казанскаго общества естествоиспытателей секція физико-математическихъ наукъ.

19. Редакція листка «Россійская библіографія».

Протоколъ засѣданія 15-го ноября.

Присутствовали: Д. М. Деларю, М. Ѳ. Ковальскій, К. А. Андреевъ, Н. В. Проскурниковъ, А. А. Клюшниковъ, И. К. Шейдтъ и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1) Произведена баллотировка въ члены общества Ив. Дм. Линицкаго. Выбранъ единогласно.

2) *М. Ѳ. Ковальскій* прочелъ свою статью — «О приведеніи всякаго линейнаго дифференціальнаго уравненія съ двумя перемѣнными 2-го порядка къ одному частному виду».

3) *К. А. Андреевъ* сообщилъ доказательство теоремы Понселе о многоугольникахъ въ одномъ частномъ случаѣ.

4) Получено обществомъ: Кіевскія университетскія Извѣстія за текущій (1882) годъ № 9-й (годъ XXII).

5) По предложенію секретаря постановлено на наступающій годъ выписывать: a) «Mathesis», какъ и въ этомъ году, и b) «Journal de Mathématiques élémentaires», вмѣсто выписываемаго нынѣ: «Educational times».

Протоколъ засѣданія 6-го декабря.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, Г. В. Левицкій, М. С. Косенко и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1) Г. секретарь сообщилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ: а) Bulletin de la Société Mathématique de France. T. X, № 6. b) Mathesis №№ octobre et septembre и при октябрьскомъ нумерѣ брошюра Mansion'a—«Notes d'Analyse et de Géometrie. 1882. c) Educational times № 259 (November).

2) Предсѣдателемъ представлены отпечатанныя двѣ книжки «Сообщеній» нашего общества: 2-я за 1881 г. и 1-я за 1882. Вышедшія книжки розданы гг. членамъ общества.

3) *М. Ѳ. Ковальскій* прочелъ сообщеніе подъ заглавіемъ—«Интегралъ въ конечныхъ разностяхъ отъ раціональной дроби».

4) *А. П. Грузинцевъ* сообщилъ свою замѣтку подъ заглавіемъ—«Простой способъ рѣшенія основныхъ уравненій кристаллической поляризаціи».

5) По предложенію Г. В. Левицкаго постановлено: вступить въ обмѣнъ съ изданіями гельсингфорскаго (финляндскаго) университета.

I.

О ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЫРАЖЕНІЯХЪ

одныхъ интеграловъ черезъ другіе,

ВЗЯТЫЕ ВЪ ТѢХЪ-ЖЕ ПРЕДѢЛАХЪ.

П. Л. Чебышева.

Въ томъ случаѣ, когда извѣстны значенія функціи $F(x)$ при всѣхъ величинахъ перемѣнной x отъ $x=a$ до $x=b$, послѣдняя изъ выведенныхъ нами формулъ въ мемуарѣ *о непрерывныхъ дробяхъ*[1], по замѣнѣ суммъ интегралами, даетъ такое разложеніе функціи $F(x)$:

$$F(x)=\frac{\int F\psi_0\vartheta dx}{\int\psi_0{}^2\vartheta dx}\psi_0+\frac{\int F\psi_1\vartheta dx}{\int\psi_1{}^2\vartheta dx}\psi_1+$$
$$+\frac{\int F\psi_2\vartheta dx}{\int\psi_2{}^2\vartheta dx}\psi_2+\ldots\ldots,$$

гдѣ ϑ какая нибудь функція, прерывная или непрерывная, но сохраняющая знакъ $+$ между $x=a$, $x=b$, предѣлами, между которыми берутся всѣ интегралы, а ψ_0, ψ_1, ψ_2,....... суть знаменатели подходящихъ дробей интеграла

$$\int_a^b\frac{\vartheta(z)}{x-z}dz,$$

получаемыхъ разложеніемъ его въ непрерывную дробь.

---

[1] Журналъ Ліувилля, 2-я серія, Т. III, 1858, p. 289—323.

Разлагая по этой формулѣ двѣ какія нибудь функціи u, v и интегрируя произведеніе $uv\vartheta dx$ отъ $x=a$, до $x=b$, находимъ, что интегралъ

$$\int_a^b uv\vartheta dx$$

приводится къ ряду, состоящему изъ такихъ членовъ:

$$\frac{\int u\psi_m\vartheta dx.\int v\psi_n\vartheta dx}{\int\psi_m{}^2\vartheta dx.\int\psi_n{}^2\vartheta dx}.\int\psi_m\psi_n\vartheta dx,$$

гдѣ числа m, n принимаютъ всѣ значенія отъ 0 до ∞.

Замѣчая, что, по извѣстному свойству функцій $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots.$ при m не равномъ n интегралъ

$$\int\psi_m\psi_n\vartheta dx$$

обращается въ нуль, мы изъ этого ряда выводимъ такое разложеніе интеграла $\int uv\vartheta dx$:

$$\int uv\vartheta dx=\frac{\int u\psi_0\vartheta dx.\int v\psi_0\vartheta dx}{\int\psi_0{}^2\vartheta dx}+$$

$$+\frac{\int u\psi_1\vartheta dx.\int v\psi_1\vartheta dx}{\int\psi_1{}^2\vartheta dx}+\frac{\int u\psi_2\vartheta dx\int v\psi_2\vartheta dx}{\int\psi_2{}^2\vartheta dx}+\ldots..$$

Останавливая этотъ рядъ на членѣ

$$\frac{\int u\psi_{n-1}\vartheta dx.\int v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int\psi_{n-1}{}^2\vartheta dx}$$

и называя черезъ R_n дополнительный членъ, мы получаемъ равенство

$$\int uv\vartheta dx=\frac{\int u\psi_0\vartheta dx.\int v\psi_0\vartheta dx}{\int\psi_0{}^2\vartheta dx}+\frac{\int u\psi_1\vartheta dx.\int v\psi_1\vartheta dx}{\int\psi_1{}^2\vartheta dx}+$$

$$+\ldots..+\frac{\int u\psi_{n-1}\vartheta dx.\int v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int\psi_{n-1}{}^2\vartheta dx}+R_n.$$

Опредѣляя выраженіе дополнительнаго члена R_n въ этомъ разложеніи интеграла $\int uv\vartheta dx$, мы нашли, что онъ обладаетъ такими свойствами:

1) *Числовая величина его не превосходитъ*

$$\frac{\int \psi_n{}^2 \vartheta dx}{\left(\frac{\partial^n \psi_n(x)}{dx^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ A, B *суть наибольшія числовыя величины производныхъ* $\frac{\partial^n u}{dx^n}$, $\frac{\partial^n v}{dx^n}$ *въ предѣлахъ интегрированія.*

2) *Если въ этихъ предѣлахъ производныя* $\frac{\partial^n n}{dx^n}$, $\frac{\partial^n v}{dx^n}$ *не мѣняютъ своего знака, дополнительный членъ* R_n *имѣетъ одинакій знакъ съ произведеніемъ* $\frac{\partial^n u}{dx^n} \cdot \frac{\partial^n v}{dx^n}$.

Чтобы показать приложеніе этого, мы разсмотримъ случай $n=1$.

Такъ какъ первыя подходящія дроби интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z} dz,$$

получаемыя разложеніемъ его въ непрерывную дробь, суть

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{\int \vartheta dx}{\int \vartheta dx \,.\, x - \int x\vartheta dx},$$

то функціи ψ_0, ψ_1, входящія въ наши формулы, имѣютъ слѣдующія величины:

$$\psi_0 = 1; \; \psi_1 = \int \vartheta dx \,.\, x - \int x\vartheta dx.$$

Полагая въ нашихъ формулахъ

$$n=1$$

и внося въ нихъ эти величины функцій ψ_0, ψ_1, мы получаемъ равенство

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\vartheta\, dx \,.\, \int v\vartheta\, dx}{\int \vartheta dx} + R_1$$

и такое выраженіе для высшаго предѣла числовыхъ величинъ дополнительнаго члена R_1:

$$\frac{\int \vartheta dx \,.\, \int x^2 \vartheta dx - (\int x \vartheta dx)^2}{\int \vartheta dx} AB,$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ въ предѣлахъ интегрированія. — Въ томъ случаѣ, когда производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ въ предѣлахъ интегрированія не мѣняютъ своихъ знаковъ, дополнительный членъ R_1 по вышесказанному будетъ имѣть одинакій знакъ съ произведеніемъ $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Полагая $\vartheta = 1$ и принимая за предѣлы интегрированій 0 и 1, мы по вышенайденной формулѣ получаемъ равенство

$$\int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 u dx \,.\, \int_0^1 v dx + R_1,$$

и такое выраженіе для высшаго предѣла числовыхъ величинъ R_1:

$$\frac{1}{12}\, A\, B.$$

Для другого приложенія мы разсмотримъ случай, когда

$$\vartheta = 1$$

и предѣлы интегрированій суть -1 и $+1$. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, функціи ψ_0, ψ_1, ψ_2, ... приводятся къ функціямъ Лежандра X_0, X_1, X_2, ... и вслѣдствіе того по нашей формулѣ получается такое равенство:

$$\int_{-1}^{+1} uv\,dx = \frac{\int_{-1}^{+1} uX_0 dx \,.\, \int_{-1}^{+1} vX_0 dx}{\int_{-1}^{+1} X_0^{\,2} dx} +$$

$$+ \frac{\int_{-1}^{+1} uX_1 dx \,.\, \int_{-1}^{+1} vX_1 dx}{\int_{-1}^{+1} X_1^{\,2} dx} + \ldots + \frac{\int_{-1}^{+1} uX_{n-1} dx \,.\, \int_{-1}^{+1} vX_{n-1} dx}{\int_{-1}^{+1} X_{n-1}^{\,2} dx} + R_n,$$

откуда по внесеніи величинъ интеграловъ

$$\int_{-1}^{+1} X_0{}^2 dx, \int_{-1}^{+1} X_1{}^2 dx, \ldots \int_{-1}^{+1} X_{n-1}{}^2 dx$$

выходитъ

$$\int_{-1}^{+1} uv dx = \frac{1}{2.}\int_{-1}^{+1} uX_0\, dx . \int_{-1}^{+1} vX_0\, dx + \frac{3}{2.}\int_{-1}^{+1} uX_1\, dx . \int_{-1}^{+1} vX_1\, dx +$$

$$\ldots + \frac{2n-1}{2}\int_{-1}^{+1} uX_{n-1}\, dx . \int_{-1}^{+1} vX_{n-1}\, dx + R_n .$$

Замѣчая же, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\int_{-1}^{+1} \psi_n{}^2 \vartheta\, dx = \int_{-1}^{+1} X_n{}^2\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$\frac{\partial^n \psi_n(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n X_n}{\partial x^n} = 1.\ 3.\ 5 \ldots .(2n-1),$$

мы по вышепоказанному выраженію высшаго предѣла числовой величины дополнительнаго члена R_n, находимъ, что въ выведенномъ нами разложеніи интеграла

$$\int uv\, dx$$

числовая величина дополнительнаго члена не будетъ превосходить количества

$$\frac{2AB}{1^2,\ 3^2,\ 5^2 \ldots .(2n-1)^2\ (2n+1)},$$

гдѣ A, B наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ между $x = -1$ и $x = +1$. Что касается до знака дополнительнаго члена, то, по вышесказанному, онъ несомнѣнно будетъ одинакій съ знакомъ произведенія $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n v}{\partial x^n}$, если производныя $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ между $x = -1$ и $x = +1$ не мѣняютъ своихъ знаковъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что показанное нами относительно дополнительнаго члена въ разложеніи интеграла

$$\int uv\vartheta\, dx$$

можетъ послужить для опредѣленія степени точности, съ которой вышесказанное разложеніе функціи $F(x)$, остановленное на какомъ либо членѣ, даетъ ея величину.

П. Чебышевъ.

С.-Петербургъ.
29-го января 1883 года.

II.

О НЕРАВЕНСТВАХЪ,

ОГРАНИЧИВАЮЩИХЪ ВЕЛИЧИНУ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ОТЪ ПРОИЗВЕДЕНІЯ ФУНКЦІЙ.

В. Г. Имшенецкаго.

Разысканіе алгебраически бо́льшей и мѐньшей границъ, за которыя не можетъ переступить величина опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій, представляетъ, очевидно, задачу неопредѣленную.

Дѣйствительно, можно показать, что эти границы получаютъ выраженія разнообразныя, по мѣрѣ ихъ сближенія между собою и съ интеграломъ, и вмѣстѣ съ различнымъ выборомъ законовъ измѣняемости, въ предѣлахъ интеграла, функцій входящихъ подъ знакомъ его множителями:

§ 1. Недавно *П. Л. Чебышевъ* далъ рѣшеніе такой задачи для интеграла

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Онъ показалъ, что если отъ $x=0$ до $x=1$ обѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постоянно увеличиваются или уменьшаются, то

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx > \text{или} < \int_0^1 \varphi(x)\,dx.\int_0^1 \psi(x)\,dx,$$

смотря потому, измѣняются ли величины обѣихъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ въ одну сторону, или одна изъ нихъ увеличивается, въ то время какъ другая уменьшается.

Это предложеніе получается какъ частный выводъ особой теоріи, которой посвящено сообщеніе П. Л. Чебышева харьковскому математическому обществу надъ названіемъ «О приближенныхъ выраженіяхъ одних интеграловъ черезъ другіе». Сдѣлавшись однако извѣстнымъ прежде общей теоріи, изъ которой оно вытекаетъ, предложеніе это дало случай появиться двумъ замѣчательнымъ его доказательствамъ, изъ которыхъ одно принадлежитъ г. Picard[1], а другое А. Н. Коркину[2].

Послѣднее основывается на легко провѣряемомъ алгебраическомъ равенствѣ

$$n\sum a_i b_i = \sum a_i \sum b_i + \sum_i \sum_k (a_i - a_k)(b_i - b_k),$$

гдѣ простыя суммы распространяются на всѣ значенія $i = 1, 2, 3, \ldots n$, а двойная сумма требуетъ для каждаго изъ этихъ значеній i брать, въ томъ же ряду чиселъ, всѣ значенія $k > i$.

А. Н. Коркинъ замѣтилъ, что достаточно въ его равенствѣ положить

$$a_i = \varphi\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad b_i = \psi\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

и, раздѣливъ его на n^2, перейдти къ предѣлу для $n = \infty$, чтобы получить, какъ непосредственныя его слѣдствія, оба случая теоремы Чебышева.

Я привелъ вполнѣ эту краткую и изящную замѣтку, чтобы яснѣе показать связь съ нею нѣкоторыхъ новыхъ выводовъ того же рода, предлагаемыхъ далѣе.

§ 2. *Коши*[3] далъ слѣдующую теорему:

---

[1] Литографиров. курсъ лекцій г. Hermite, 1883.

[2] Comptes rendus. T. XCVI, 1883. № 5, p. 326

[3] *Analyse algébrique*, Note II, p. 445, Théorème 16.

Если въ двухъ рядахъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n \qquad (a)$$

$$\text{и}\quad b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n \qquad (b)$$

заключающихъ по n *членовъ въ каждомъ, не всѣ отношенія* $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ *соотвѣтствующихъ членовъ равны между собою, то*

$$\sum a_i b_i < \sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}. \qquad (1)$$

Доказательство, подобно предыдущему, основывается на легко провѣряемомъ равенствѣ

$$(\sum a_i b_i)^2 + \sum_i \sum_k (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \sum a_i^2 \sum b_i^2,$$

изъ котораго необходимо слѣдуетъ неравенство (1), если разность отношеній $\frac{a_i}{b_i}$ и $\frac{a_k}{b_k}$ не равна нулю для всѣхъ различныхъ сочетаній по два чиселъ i и k, взятыхъ въ рядѣ $1, 2, 3, \ldots, n$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляютъ двѣ *какія нибудь* функціи отъ x, сохраняющія конечныя значенія отъ $x = x_0$ до $x = X > x_0$. Положимъ $\frac{X - x_0}{n} = h$, $a_i = \varphi\,[x_0 + (i-1)\,h]$, $b_i = \psi[x_0 + (i-1)\,h]$. Вслѣдствіе этого неравенство (1) раздѣленное на n получитъ видъ

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi[x_0 + (i-1)\,h]\,\psi[x_0 + (i-1)\,h]\,h$$

$$< \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n} \varphi[x_0 + (i-1)\,h]^2 h . \sum_{i=1}^{n} \psi[x_0 + (i-1)\,h]^2 h\right\}}.$$

Если же перейдемъ къ предѣлу для $n = \infty$ и $h = 0$, то отсюда находимъ

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx < \sqrt{\left\{\int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2 dx . \int_{x_0}^{X} \psi(x)^2\,dx\right\}} \qquad (\mathrm{I})$$

теорему, аналогичную теоремѣ Чебышева, но при совершенно общихъ предположеніяхъ относительно закона измѣняемости функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ между границами интеграла.

§ 3. Подобнаго же рода слѣдствіе получается еще изъ другой теоремы *Коши*[1]:

Если не всѣ n количествъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ равны между собою, то численное значеніе суммы $\sum a_i$ меньше произведенія $\sqrt{n}\,\sqrt{\sum a_i^2}$.

Замѣтимъ, что алгебраическое значеніе суммы $\sum a_i$ не болѣе ея численнаго значенія, слѣдовательно

$$\sum a_i < \sqrt{n}\,\sqrt{\sum a_i^2}. \qquad (2)$$

Доказательство опять основывается на очевидномъ равенствѣ

$$\left(\sum a_i\right)^2 + \sum_i \sum_k (a_i - a_k)^2 = n \sum a_i^2,$$

доставляющемъ неравенство (2), если количества $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ не всѣ равны между собою.

Замѣтимъ кстати, что это равенство есть частный случай равенства Коркина. Поэтому изъ неравенства (2) получится частный случай теоремы Чебышева. Для этого раздѣливъ неравенство (2) на n и принявъ такія же положенія, какъ въ § 2, въ предѣлѣ для $n = \infty$ находимъ

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx < \sqrt{\left\{\int_{x_0}^{X} \varphi(x)^2\,dx\right\}}\,\sqrt{X - x_0} \qquad \text{(II)}$$

и въ частномъ случаѣ, для $x_0 = 0$ и $X = 1$, будемъ имѣть

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx < \sqrt{\int_0^1 \varphi(x)^2\,dx}.$$

[1] ib. Théorème 15.

§ 4. Перейдемъ къ изложенію еще болѣе простыхъ пріемовъ рѣшенія разсматриваемой задачи, доставляющихъ притомъ сразу бо́льшую и ме́ньшую границы величины интеграла.

Сначала для простоты будемъ предполагать въ обоихъ рядахъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \text{ и } b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

всѣ члены положительными.

Означивъ въ нихъ соотвѣтственно черезъ α и β самые малые, а черезъ A и B самые большіе члены, будемъ имѣть

$$\alpha \sum b_i < \sum a_i b_i < A \sum b_i,$$

$$\beta \sum a_i < \sum a_i b_i < B \sum a_i$$

неравенства, къ которымъ можно присоединить еще слѣдующія:

$$n\alpha < \sum a_i < nA,$$

$$n\beta < \sum b_i < nB.$$

Изъ этихъ двухъ группъ,—черезъ перемноженіе соотвѣтствующихъ частей двухъ неравенствъ и черезъ дѣленіе ихъ на одно и то-же положительное количество, — весьма просто получимъ слѣдующія неравенства:

$$\frac{\alpha}{A} \sum a \sum b_i < n \sum a_i b_i < \frac{A}{\alpha} \sum a_i \sum b_i, \tag{3}$$

$$\frac{\beta}{B} \sum a_i \sum b_i < n \sum a_i b_i < \frac{B}{\beta} \sum a_i \sum b_i, \tag{4}$$

$$\frac{\alpha}{B} (\sum b_i)^2 < n \sum a_i b_i < \frac{A}{\beta} (\sum b_i)^2, \tag{5}$$

$$\frac{\beta}{A} (\sum a_i)^2 < n \sum a_i b_i < \frac{B}{\alpha} (\sum a_i)^2, \tag{6}$$

$$\sqrt{\alpha\beta \sum a_i \sum b_i} < \sum a_i b_i < \sqrt{AB \sum a_i \sum b_i}. \tag{7}$$

Каждую изъ группъ неравенствъ (3), (4),.. (7) легко можно преобразовать въ соотвѣтствующее предложеніе интегральнаго вычисленія, дающее меньшую и большую границы величины одного и того-же опредѣленнаго интеграла отъ произведенія двухъ функцій. Для этого возьмемъ двѣ какія-либо функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, сохраняющія положительныя значенія отъ $x=x_0$ до $x=X>x_0$ и положимъ:

$$\frac{X-x_0}{n}=h \text{ или } \frac{1}{n}=\frac{h}{X-x_0},$$

$$a_i=\varphi[x_0+(i-1)h],\ b_i=\psi[x_0+(i-1)h],$$

$$\alpha=\varphi(g),\ A=\varphi(G),\ \beta=\psi(k),\ B=\psi(K).$$

За-тѣмъ раздѣливъ неравенства (3),..., (6) на n^2, а (7) на n и введя въ нихъ предыдущія положенія, при переходѣ къ предѣламъ для $n=\infty$ и $h=0$, получимъ:

$$\frac{\varphi(g)}{\varphi(G)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\,.\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx}<\frac{\varphi(G)}{\varphi(g)}, \tag{III}$$

$$\frac{\psi(k)}{\psi(K)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\,.\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx}<\frac{\psi(K)}{\psi(k)}, \tag{IV}$$

$$\frac{\varphi(g)}{\psi(K)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\left(\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx\right)^2}<\frac{\varphi(G)}{\psi(k)}, \tag{V}$$

$$\frac{\psi(k)}{\varphi(G)}<\frac{(X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\left(\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\right)^2}<\frac{\psi(K)}{\varphi(g)}, \tag{VI}$$

$$\sqrt{\varphi(g)\psi(k)} < \frac{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx}{\left\{\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx \cdot \int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx\right\}^{1/2}} < \sqrt{\varphi(G)\psi(K)}. \quad \text{(VII)}$$

Эти формулы представляютъ значительное разнообразіе для выбора, въ каждомъ частномъ случаѣ, самыхъ тѣсныхъ границъ, въ которыхъ заключается величина опредѣленнаго интеграла.

Такъ, напримѣръ, если сравнивая неравенства (III) и (IV) найдемъ, что

$$\frac{\psi(k)}{\psi(K)} < \frac{\varphi(g)}{\varphi(G)}, \text{ то слѣдовательно } \frac{\varphi(G)}{\varphi(g)} < \frac{\psi(K)}{\psi(k)}$$

и отсюда видно, что неравенства (III) заключаютъ величину интеграла въ границахъ болѣе тѣсныхъ чѣмъ неравенства (IV).

§ 5. Неравенства (7) и (VII) легко обобщаются на какое угодно число множителей подъ знаками суммы и интеграла. Дѣйствительно, пусть будутъ

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n} \\ a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn} \end{array}$$

m рядовъ съ n положительными членами въ каждомъ.

Означивъ самые малые и самые большіе члены въ этихъ рядахъ соотвѣтственно черезъ

$$\alpha_1 \text{ и } A_1,\ \alpha_2 \text{ и } A_2, \ldots\ \alpha_m \text{ и } A_m,$$

мы будемъ имѣть очевидныя неравенства;

$$\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m\sum_i a_{1i} < \sum_i a_{1i}a_{2i}a_{3i}\ldots a_{mi} < A_2A_3\ldots A_m\sum_i a_{1i}$$

$$\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_m\sum_i a_{2i} < \sum_i a_{1i}a_{2i}\ldots a_{mi} < A_1A_3\ldots A_m\sum_i a_{2i}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\sum_i a_{mi} < \sum_i a_{1i}a_{2i}\ldots a_{mi} < A_1A_2\ldots A_{m-1}\sum_i a_{mi}$$

Перемножая эти неравенства, извлекая изъ результатовъ корень степени m и раздѣливъ на

$$\sqrt[m]{(\sum_i a_{1i} \sum_i a_{2i} \ldots \sum_i a_{mi})}\,,$$

получимъ неравенство

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^{\frac{m-1}{m}} < \frac{\sum_i a_{1i} a_{2i} \ldots a_{mi}}{\left[\sum_i a_{1i} \sum_i a_{2i} \ldots \sum_i a_{mi}\right]^{\frac{1}{m}}} <$$

$$< (A_1 A_2 \ldots A_m)^{\frac{m-1}{m}} \qquad (8)$$

Подобно тому какъ выше изъ (8) получатся легко слѣдующія неравенства

$$\left[\varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)\ldots\varphi_m(g_m)\right]^{\frac{m-1}{m}}$$

$$< \frac{\int_{x_0}^{X} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)dx}{\left\{\int_{x_0}^{X}\varphi_1(x)\,dx \int_{x_0}^{X}\varphi_2(x)\,dx \ldots \int_{x_0}^{X}\varphi_m(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{m}}} < \qquad (\mathrm{VIII})$$

$$\left[\varphi_1(G_1)\varphi_2(G_2)\ldots,\varphi_m(G_m)\right]^{\frac{m-1}{m}}\,,$$

гдѣ между предѣлами $x=x_0$ и $x=X$ функціи $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\ldots$ $\varphi_m(x)$ должны сохранять конечныя положительныя значенія, изъ которыхъ самыя малыя и самыя большія мы обозначили черезъ: $\varphi_1(g_1)$ и $\varphi_1(G_1)$, $\varphi_2(g_2)$ и $\varphi_2(G_2)$ $\ldots$ $\varphi_m(g_m)$ и $\varphi_m(G_m)$.

§ 6. До сихъ поръ мы предполагали функціи, входящія множителями подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла, сохряняющими положительныя значенія между его предѣлами. Въ задачѣ, которую мы разсматриваемъ, къ этому простѣйшему можно привести общій случай, когда упомянутыя функціи между предѣлами интеграла имѣютъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія. Такое приведеніе достаточно объяснить на простѣйшемъ случаѣ двухъ множителей.

Если въ двухъ рядахъ

$$a_1, a_2, \ldots a_n \text{ и } b_1, b_2, \ldots b_n$$

находятся положительные и отрицательные члены, то всегда можно выбрать два такія положительныя количества a_0 и b_0, что, придавъ a_0 ко всѣмъ членамъ перваго ряда и b_0 ко всѣмъ членамъ втораго, мы получимъ два ряда

$$a_1 + a_0, a_2 + a_0, \ldots, a_n + a_0 \text{ и } b_1 + b_0, b_2 + b_0, \ldots, b_n + b_0$$

со всѣми положительными членами.

Такъ-какъ къ двумъ послѣднимъ рядамъ прилагаются предыдущіе выводы, то, означая черезъ $\alpha + a_0$ и $A + a_0$ самой меньшій и самый большій члены въ первомъ изъ нихъ, на основаніи, напр., неравенствъ (3), будемъ имѣть

$$\frac{\alpha + a_0}{A + a_0} \sum (a_i + a_0) \sum (b_i + b_0)$$

$$< n \sum (a_i + a_0)(b_i + b_0) <$$

$$\frac{A + a_0}{\alpha + a_0} \sum (a_i + a_0) \sum (b_i + b_0).$$

Но такъ-какъ

$$\sum (a_i + a_0) \sum (b_i + b_0) = \sum a_i \sum b_i + n a_0 \sum b_i + n b_0 \sum a_i + n^2 a_0 b_0,$$

$$\sum (a_i + a_0)(b_i + b_0) = \sum a_i b_i + a_0 \sum b_i + b_0 \sum a_i + n a_0 b_0$$

то, вычитая изъ каждой части предыдущихъ неравенствъ по

$$n a_0 \sum b_i + n b_0 \sum a_i + n^2 a_0 b_0,$$

мы получимъ

$$\frac{\alpha+a_0}{A+a_0}\sum a_i \sum b_i - \frac{A-\alpha}{A+a_0}\left[na_0\sum b_i + nb_0\sum a_i + n^2 a_0 b_0\right]$$
$$< n\sum a_i b_i <$$
$$\frac{A+a_0}{\alpha+a_0}\sum a_i \sum b_i + \frac{A-\alpha}{\alpha+a_0}\left[na_0\sum b_i + nb_0\sum a_i + n^2 a_0 b_0\right] \quad (9)$$

Раздѣлимъ неравенства (9) на n^2 и положимъ:

$$X > x_0, \quad \frac{X-x_0}{n} = h,$$

$$a_i = \varphi[x_0 + (i-1)h], \; b_i = \psi[x_0 + (i-1)h],$$

предполагая, что отъ $x = x_0$ до $x = X$ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ могутъ имѣть положительныя или отрицательныя значенія, лишь бы $\varphi(x) + a_0$ и $\psi(x) + b_0$ оставались положительными; притомъ пусть $\varphi(g) + a_0$ и $\varphi(G) + a_0$ будутъ самое меньшее и самое большее значеніе $\varphi(x) + a_0$.

При сдѣланныхъ предположеніяхъ перейдя къ предѣлу неравенствъ (9), раздѣленныхъ на n^2, при $n = \infty$, получимъ

$$\frac{\varphi(g)+a_0}{\varphi(G)+a_0}\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx -$$
$$-\frac{\varphi(G)-\varphi(g)}{\varphi(G)+a_0}\left[a\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx + b_0\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx + a_0 b_0\right](X-x_0)$$
$$< (X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)dx < \quad \text{(IX)}$$
$$\frac{\varphi(G)+a_0}{\varphi(g)+a_0}\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx +$$
$$+\frac{\varphi(G)-\varphi(g)}{\varphi(g)+a_0}\left[a_0\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx + b_0\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx + a_0 b_0\right](X-x_0).$$

Подобнымъ-же образомъ можно поступить при выводѣ другихъ выраженій для высшей и низшей границы величины опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій, когда эти послѣднія въ предѣлахъ его могутъ имѣть отрицательныя значенія.

§ 7. Въ заключеніе можно, не выходя изъ области общихъ формулъ и не удаляясь отъ предмета, который мы разсматривали, дать одно приложеніе, состоящее въ слѣдующемъ видоизмѣненіи неравенствъ (III).

Полагая въ нихъ

$$\varphi(x) = \frac{d\omega(x)}{dx} = \omega'(x)\,,\ \psi(x) = f[\omega(x)]\,,$$

будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx = \omega(X) - \omega(x_0)\,,$$

$$\int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f[\omega(x)]\,dx\,,$$

$$\int_{x_0}^{X} f[\omega(x)]\,\omega'(x)\,dx = \int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)} f(y)\,dy;$$

слѣдовательно неравенства (III) доставятъ слѣдующія:

$$\frac{\omega'(g)}{\omega'(G)}\,[\omega(X) - \omega(x_0)] \int_{x_0}^{X} f[\omega(x)]\,dx < (X - x_0) \int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)} f(y)\,dy\,,$$

$$\frac{\omega'(G)}{\omega'(g)}\,[\omega(X) - \omega(x_0)] \int_{x_0}^{X} f[\omega(x)]\,dx > (X - x_0) \int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)} f(y)\,dy\,.$$

Какъ при выводѣ неравенствъ (III) предполагаемъ $X > x_0$, $\varphi(x) = \omega'(x) > 0$, отъ $x = x_0$ до $x = X$, и, слѣдовательно, $\omega(X) > \omega(x_0)$, $\omega'(g) > 0$, $\omega'(G) > 0$.

Поэтому послѣднимъ неравенствамъ можно дать такой видъ

$$\frac{X - x_0}{\omega(X) - \omega(x_0)}\,\frac{\omega'(g)}{\omega'(G)} \int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)} f(y)\,dy$$

$$< \int_{x_0}^{X} f[\omega(x)]\,dx <$$

$$\frac{X - x_0}{\omega(X) - \omega(x_0)}\,\frac{\omega'(G)}{\omega'(g)} \int_{\omega(x_0)}^{\omega(X)} f(y)\,dy\,, \qquad (X)$$

который даетъ меньшую и большую границу величины опредѣленнаго интеграла функціи отъ функціи.

III.

НѢСКОЛЬКО СЛОВЪ

по поводу теоремъ П. Л. Чебышева и В. Г. Имшенецкаго объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ произведенія функцій.

К. А. Андреева.

---

§ 1.

Теорема П. Л. Чебышева, о которой мы будемъ говорить, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ.

Если $f(x)$ и $\psi(x)$ суть такія двѣ функціи, изъ которыхъ каждая постоянно возрастаетъ или постоянно уменьшается при измѣненіи перемѣннаго x отъ 0 до 1, то разность

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \psi(x)dx$$

имѣетъ всегда такой же знакъ, какъ произведеніе производныхъ $f'(x)$ и $\psi'(x)$ этихъ функцій.

Эта теорема доказана весьма просто и изящно А. Н. Коркинымъ, пріемъ котораго состоитъ въ установленіи весьма простаго тождественнаго соотношенія между конечными суммами и въ переходѣ отъ этихъ суммъ къ опредѣленнымъ интеграламъ какъ ихъ предѣламъ [1].

---

[1] Comptes rendus. T. XCVI, № 5, p. 326.

Пользуясь тѣмъ-же самымъ пріемомъ, В. Г. Имшенецкій доказалъ другое предложеніе, которое должно быть поставлено, такъ сказать, въ параллель съ теоремою П. Л. Чебышева, какъ относящееся къ тому-же роду вопросовъ, но тѣмъ не менѣе отъ нея независящее. Это послѣднее предложеніе состоитъ въ слѣдующемъ[1].

Разность

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx\right]^2$$

гдѣ a и b суть какія угодно дѣйствительные предѣлы интеграціи, есть величина положительная.

Не трудно вывести пріемомъ нѣсколько отличнымъ отъ упомянутаго, но столь же простымъ и основывающимся лишь на простѣйшихъ свойствахъ опредѣленныхъ интеграловъ, такое тождественное соотношеніе, изъ котораго названныя двѣ теоремы получаются какъ частные случаи.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ будутъ четыре какія нибудь функціи. Перемноживши разности

$$f_1(x)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_1(x) \text{ и } f_2(x)\psi_2(y) - f_2(y)\psi_2(x),$$

гдѣ x и y суть независимыя между собою перемѣнныя, будемъ имѣть тождество

$$\begin{aligned}
&f_1(x)f_2(x)\psi_1(y)\psi_2(y) + f_1(y)f_2(y)\psi_1(x)\psi_2(x) - \\
&- f_1(x)\psi_2(x)f_2(y)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_2(y)f_2(x)\psi_1(x) = \\
&= [f_1(x)\psi_1(y) - f_1(y)\psi_1(x)][f_2(x)\psi_2(y) - f_2(y)\psi_2(x)]
\end{aligned}$$

Помноживши обѣ части этого тождества на $dx\,dy$ и взявши двойной интегралъ между тѣми же постоянными предѣлами a и b по обоимъ перемѣннымъ, получимъ

[1] См. предыдущую статью, стр. 101 — 102.

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx \int_a^b \psi_1(y) \psi_2(y)\, dy +$$
$$+ \int_a^b f_1(y) f_2(y)\, dy \int_a^b \psi_1(x) \psi_2(x)\, dx -$$
$$- \int_a^b f_1(x) \psi_2(x)\, dx \int_a^b f_2(y) \psi_1(y)\, dy -$$
$$- \int_a^b f_1(y) \psi_2(y)\, dy \int_a^b f_2(x) \psi_1(x)\, dx =$$
$$= \int_a^b \int_a^b \Big[f_1(x) \psi_1(y) - f_1(y) \psi_1(x) \Big] \Big[f_2(x) \psi_2(y) -$$
$$- f_2(y) \psi_2(x) \Big]\, dx\, dy,$$

откуда находимъ

$$\left. \begin{aligned} &\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx \int_a^b \psi_1(x) \psi_2(x)\, dx - \\ &- \int_a^b f_1(x) \psi_2(x)\, dx \int_a^b f_2(x) \psi_1(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \Big[f_1(x) \psi_1(y) - f_1(y) \psi_1(x) \Big] \Big[f_2(x) \psi_2(y) - \\ &\qquad - f_2(y) \psi_2(x) \Big]\, dx\, dy \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

это и есть то соотношеніе, которое мы желали вывести. Очевидно, что первая часть его будетъ положительною, когда разности, находящіяся надъ знакомъ интеграла во второй части, имѣютъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ x и y между предѣлами интеграціи одинакіе знаки, и отрицательною въ противномъ случаѣ.

Если положимъ въ этомъ равенствѣ $f_1 = f$, $f_2 = \psi$, $\psi_1 = \psi_2 = 1$, то получимъ

$$\left. \begin{aligned} &\int_a^b f(x) \psi(x)\, dx \int_a^b dx - \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b \psi(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \Big[f(x) - f(y) \Big] \Big[\psi(x) - \psi(y) \Big]\, dx\, dy \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

откуда въ предположенiи, что предѣлы интеграцiи суть 0 и 1, получается теорема П. Л. Чебышева.

Если же положимъ въ равенствѣ (I) $f_1 = f_2 = f$ и $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, то получимъ

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx\right]^2 = \\ = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \Big[f(x)\psi(y) - f(y)\psi(x)\Big]^2 dx\,dy,\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

откуда заключаемъ о справедливости теоремы В. Г. Имшенецкаго.

Наконецъ, полагая въ равенствѣ (II) $f = \psi$ или въ равенствѣ (III) $\psi = 1$, получимъ

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \Big[f(x) - f(y)\Big]^2 dx\,dy,$$

что даетъ вторую теорему В. Г. Имшенецкаго[1].

Внутреннiй смыслъ прiема употребленнаго нами для вывода равенства (I) есть въ сущности тотъ же самый какъ и въ прiемѣ А. Н. Коркина; различiе состоитъ только въ обозначенiи. Употребляя обычное обозначенiе для функцiй, мы нашли возможнымъ не начинать съ конечныхъ суммъ, а прямо оперировать надъ интегралами. Что же касается заключенiя о знакѣ второй части этого равенства по знаку интегрируемаго произведенiя, то, по основному свойству опредѣленныхъ интеграловъ, мы можемъ его дѣлать и не прибѣгая каждый разъ къ разсмотрѣнiю интеграла какъ предѣла суммы.

Замѣчая, что вторая часть равенства (I) есть двойной интегралъ отъ функцiи симметричной относительно перемѣнныхъ x и y, мы можемъ представить ее слѣдующимъ образомъ:

---

[1] Ibid. p. 102.

$$\int_a^b\int_a^y\Big[f_1(x)\psi_1(y)-f_1(y)\psi_1(x)\Big]\Big[f_2(x)\psi_2(y)-$$
$$-f_2(y)\psi_2(x)\Big]dx\,dy$$

что, впрочемъ, не имѣетъ другаго значенія кромѣ устраненія числоваго множителя $\frac{1}{2}$.

§ 2.

Изъ равенства (I) можно получить много другихъ слѣдствій, которыя могутъ быть формулированы въ видѣ болѣе или менѣе интересныхъ предложеній. Такъ, пользуясь этимъ равенствомъ, можно во многихъ случаяхъ обнаруживать, какое измѣненіе произойдетъ въ произведеніи

$$\int_a^b F_1(x)\,dx\int_a^b F_2(x)\,dx,$$

когда мы отдѣлимъ отъ функціи F_1 одинъ изъ множителей и присоединимъ его къ функціи F_2 или обратно.

Мы дѣлали выше только тѣ предположенія относительно функцій f_1, f_2, ψ_1, ψ_2 въ равенствѣ (I), которыя приводятъ къ теоремамъ П. Л. Чебышева и В. Г. Импенецкаго. Нѣкоторыя другія предположенія могутъ дать подобныя же и даже болѣе общія теоремы. Положимъ, напр., что эти функціи суть цѣлыя степени нѣкоторыхъ двухъ функцій, именно:

$$f_1=f^{m+h},\ f_2=f^{m-h},\ \psi_1=\psi^{m+h},\ \psi_2=\psi^{m-h}$$

гдѣ m и h суть цѣлыя числа положительныя или отрицательныя. Въ такомъ случаѣ равенство (I) обратится въ

$$\int_a^b f^{2m}(x)\,dx \int_a^b \psi^{2m}(x)\,dx -$$

$$-\int_a^b f^{m+h}(x)\,\psi^{m-h}(x)\,dx \int_a^b f^{m-h}(x)\,\psi^{m+h}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \Big[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) -$$

$$- f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)\Big]\Big[f^{m-h}(x)\,\psi^{m-h}(y) -$$

$$- f^{m-h}(y)\,\psi^{m-h}(x)\Big]\,dx\,dy.$$

Такъ-какъ цѣлыя числа $m+h$ и $m-h$ суть оба четныя или оба нечетныя, то разности

$$[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) - f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)] \text{ и }$$
$$[f^{m-h}(x)\,\psi^{m-h}(y) - f^{m-h}(y)\,\psi^{m-h}(x)]$$

имѣютъ одинакіе знаки, всякій разъ какъ $m+h$ и $m-h$ имѣютъ одинакіе знаки, т. е когда $m^2-h^2>0$. Если же допустить сверхъ того, что функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ не мѣняютъ своихъ знаковъ при измѣненіи перемѣннаго въ предѣлахъ интеграціи, то эти разности будутъ имѣть разные знаки, когда $m^2-h^2<0$. Послѣднее дополнительное условіе неизмѣняемости знака функцій имѣетъ, впрочемъ, значеніе только тогда, когда $m+h$ и $m-h$ суть числа нечетныя. Дѣйствительно, полагая, напр., что при этомъ $m+h>0$, а $m-h<0$ мы можемъ произведеніе

$$[f^{m+h}(x)\,\psi^{m+h}(y) - f^{m+h}(y)\,\psi^{m+h}(x)]\,[f^{m-h}(x)\,\psi^{m-h}(y) -$$
$$- f^{m-h}(y)\,\psi^{m-h}(x)]$$

представить въ такомъ видѣ

$$-\frac{\left\{\begin{array}{l}[f^{m+h}(x)\psi^{m+h}(y) - f^{m+h}(y)\psi^{m+h}(x)]\,[f^{h-m}(x)\psi^{h-m}(y) - \\ \qquad - f^{h-m}(y)\,\psi^{h-m}(x)]\end{array}\right\}}{f^{h-m}(x)\,f^{h-m}(y)\,\psi^{h-m}(x)\,\psi^{h-m}(y)};$$

отсюда и видно, что эта величина будетъ непремѣнно отрицательная, когда $f^{h-m}(x)$ и $f^{h-m}(y)$ имѣютъ одинакіе знаки, точно такъ-же какъ $\psi^{h-m}(x)$ и $\psi^{h-m}(y)$. Если же случится, что $f(x)$ и $f(y)$ имѣютъ одинакіе знаки, а $\psi(x)$ и $\psi(y)$ разные или обратно, то послѣднее выраженіе представитъ величину положительную.

На основаніи сказаннаго получаемъ такое предложеніе.

Каковы бы ни были функціи $f(x)$ и $\psi(x)$, разность

$$\int_a^b f^{2m}(x)\,dx \int_a^b \psi^{2m}(x)\,dx -$$

$$-\int_a^b f^{m+h}(x)\,\psi^{m-h}(x)\,dx \int_a^b f^{m-h}(x)\,\psi^{m+h}(x)\,dx,$$

гдѣ m и h суть цѣлыя числа, есть величина положительная, когда $m^2 > h^2$. Если же функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ не мѣняютъ знака въ предѣлахъ интеграціи, то эта разность есть величина отрицательная, когда $m^2 < h^2$.

Отсюда, какъ частный случай при $m=1$, $h=0$, получается опять теорема В. Г. Имшенецкаго.

§ 3.

Послѣдовательное примѣненіе равенства (I) или его слѣдствій къ различнымъ частнымъ случаямъ можетъ также давать интересные выводы. Какъ примѣръ приведемъ весьма простое разсужденіе, приводящее къ распространенію теоремы П. Л. Чебышева на случай произведенія не двухъ только, а какого угодно числа функцій.

Замѣняя въ неравенствѣ

$$\int_0^1 f_1(x)\,\psi(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int \psi(x)\,dx \gtrless 0$$

функцію $\psi(x)$ послѣдовательно чрезъ

$f_2(x)$, $f_2(x)f_3(x)$, $f_2(x)f_3(x)f_4(x)$, и т. д. до $f_2(x)f_3(x)\ldots f_n(x)$

получимъ рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \gtrless 0\\ \int_0^1 f_1(x) f_2(x) f_3(x)\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \int_0^1 f_3(x)\,dx \gtrless 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\,dx -\\ -\int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^1 f_2(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx \gtrless 0.\end{array}\right\}(A)$$

Въ силу теоремы П. Л. Чебышева условія существованія этихъ неравенствъ будутъ послѣдовательно:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dx} \gtrless 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(f_2 f_3\right) \gtrless 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(f_2 f_3 \ldots f_n\right) \gtrless 0\end{array}\right\}(\alpha)$$

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ, а нижніе нижнимъ.

Если назовемъ первыя части неравенствъ (A) послѣдовательно чрезъ $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ и положимъ:

$$\int_0^1 f_3(x)\,dx \int_0^1 f_4(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_1,$$

$$\int_0^1 f_4(x)\,dx \int_0^1 f_5(x)\,dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\,dx = B_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = B_{n-2},$$

$$1 = B_{n-1},$$

то будемъ, очевидно, имѣть

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_{n-1} B_{n-1} = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) dx -$$
$$- \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Но въ силу условій (α) и принимая во вниманіе видъ выраженій $B_1, B_2 \ldots$, должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$A_1 B_1 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dx} \int_0^1 f_3(x)\, dx \int_0^1 f_4(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx \gtrless 0$$

$$A_2 B_2 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{d}{dx}[f_2 f_3] \int_0^1 f_4(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx \gtrless 0$$

$$A_3 B_3 \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{d}{dx}[f_2 f_3 f_4] \int_0^1 f_5(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx \gtrless 0$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$A_{n-1} B_{n-1} \gtrless 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{d}{dx}[f_2 f_3 f_4 \ldots f_n] \gtrless 0$$

которыя, въ случаѣ когда каждая изъ функцій $f_3(x), f_4(x) \ldots f_n(x)$ сохраняетъ свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи, равнозначущи съ слѣдующими:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 B_1 \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{df_1}{dx} \dfrac{df_2}{dx} f_3 f_4 \ldots f_n \gtrless 0 \\ A_2 B_2 \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{df_1}{dx} \dfrac{d}{dx}(f_2 f_3) f_4 f_5 \ldots f_n \gtrless 0 \\ A_3 B_3 \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{df_1}{dx} \dfrac{d}{dx}(f_2 f_3 f_4) f_5 \ldots f_n \gtrless 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ A_{n-1} B_{n-1} \gtrless 0, \text{ когда } \dfrac{df_1}{dx} \dfrac{d}{dx}(f_2 f_3 \ldots f_n) \gtrless 0 \end{array}\right\} (\beta)$$

гдѣ также верхнимъ знакамъ соотвѣтствуютъ верхніе, а нижнимъ — нижніе. Если положимъ, что въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только верхніе знаки, то будемъ имѣть, что разность

$$\int_0^1 f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

имѣетъ величину положительную. Когда же въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только нижніе знаки, то эта разность будетъ отрицательною.

Произведя же въ условіяхъ (β) дифференцированіе произведеній, не трудно видѣть, что первыя ихъ части суть суммы такихъ произведеній, которыя получаются изъ произведенія n функцій $f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)$ чрезъ замѣну двухъ изъ перемножающихся функцій $f_1(x)$ и $f_k(x)$, гдѣ $k = 2, 3, \ldots n$, ихъ производными. Вслѣдствіе этого убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если каждая изъ функцій $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ и ихъ производныя не мѣняютъ знаковъ при измѣненіи перемѣннаго отъ 0 до 1 и притомъ всѣ отношенія $\dfrac{f_1'(x)}{f_1(x)}, \dfrac{f_2'(x)}{f_2(x)}, \ldots \dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ имѣютъ одинакіе знаки, то разность

$$\int_0^1 f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

имѣетъ величину положительную, когда число отрицательныхъ функцій въ рядѣ $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ есть четное, и отрицательную, когда это число нечетное. Если же при условіи неизмѣняемости знаковъ какъ самихъ функцій, такъ и ихъ производныхъ, отношеніе одной изъ функцій къ ея производной имѣетъ знакъ противоположный знаку всѣхъ другихъ подобныхъ-же отношеній, то эта разность есть положительная при нечетномъ числѣ отрицательныхъ функцій и отрицательная при четномъ.

Само собою понятно, что условіями поставляемыми въ этой теоремѣ не исчерпываются всѣ случаи, когда разность

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx - \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

можетъ быть положительною или отрицательною. По мѣрѣ увеличенія числа функцій $f_1, f_2 \ldots f_n$ зависимость между ними, при которой разность эта имѣетъ тотъ или другой знакъ, становится все сложнѣе, такъ что при неопредѣленномъ n формулировать эту зависимость однимъ предложеніемъ было бы затруднительно.

Нелишнее замѣтить, что послѣдняя теорема, также какъ и сама теорема Чебышева, имѣетъ мѣсто при какихъ угодно постоянныхъ предѣлахъ интеграціи. Разница лишь въ томъ, что при произвольныхъ предѣлахъ a и b въ первый членъ разности долженъ входить еще множитель

$$\left[\int_a^b dx\right]^{n-1} \text{ или } (b-a)^{n-1},$$

который обращается въ 1, когда эти предѣлы суть 0 и 1.

§ 4.

Возвращаясь къ равенству (I), укажемъ въ заключеніе, между какими предѣлами должна заключаться числовая величина разности, составляющей его первую часть, при нѣкоторыхъ условіяхъ, налагаемыхъ на входящія въ нее функціи.

Двойной интегралъ, входящій во вторую часть этого равенства, можетъ быть представленъ такимъ образомъ

$$\int_a^b\int_a^b \psi_1(x)\psi_1(y)\psi_2(x)\psi_2(y)\left[\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}-\frac{f_1(y)}{\psi_1(y)}\right]\left[\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}-\frac{f_2(y)}{\psi_2(y)}\right]dxdy$$

или

$$\int_a^b\int_a^b\left\{\psi_1(x)\psi_1(y)\psi_2(x)\psi_2(y)\int_y^x\frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]dz\int_y^x\frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]dz\right\}dxdy.$$

Если положимъ, что производныя

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}\right] \text{ и } \frac{d}{dx}\left[\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}\right]$$

сохраняютъ свои знаки при измѣненіи перемѣннаго между предѣлами a и b, а функціи $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ мѣняютъ знаки не иначе какъ одновременно, то произведеніе, отъ котораго въ послѣднемъ выраженіи берется двойной интегралъ, будетъ функціею, сохраняющею свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи. Вслѣдствіе этого числовая величина разсматриваемаго двойнаго интеграла будетъ представляться послѣднимъ его выраженіемъ въ предположеніи, что всѣ множители интегрируемаго произведенія суть положительные.

Называя буквами A и α наибольшую и наименьшую изъ числовыхъ величинъ функціи $\frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]$, а буквами B и β наибольшую и наименьшую изъ числовыхъ величинъ функціи $\frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]$ для значеній z между предѣлами a и b, будемъ имѣть

$$A\int_a^b dz > \int_a^b \frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]dz > \alpha\int_a^b dz$$

и

$$B\int_a^b dz > \int_a^b \frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]dz > \beta\int_a^b dz,$$

а слѣдовательно и подавно

$$A\int_y^x dz > \int_y^x \frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{\psi_1(z)}\right]dz > \alpha\int_y^x dz$$

и

$$B\int_y^x dz > \int_y^x \frac{d}{dz}\left[\frac{f_2(z)}{\psi_2(z)}\right]dz > \beta\int_y^x dz,$$

гдѣ предѣлы x и y суть величины, заключающіяся между a и b.

На основаніи этихъ неравенствъ заключаемъ изъ предыдущаго выраженія разсматриваемаго двойнаго интеграла, что числовая величина его заключается между предѣлами

$$ABU \text{ и } \alpha\beta U,$$

гдѣ

$$U=\int_a^b\int_a^b\psi_1(x)\psi_1(y)\psi_2(x)\psi_2(y)(x-y)^2\,dx\,dy=$$

$$=\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x^2dx\int_a^b\psi_1(y)\psi_2(y)dy-$$

$$-2\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x\,dx\int_a^b\psi_1(y)\psi_2(y)y\,dy+$$

$$+\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)dx\int_a^b\psi_1(y)\psi_2(y)y^2dy=$$

$$=2\left\{\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x^2\,dx\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)dx-\right.$$

$$\left.-\left[\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)\,x\,dx\right]^2\right\}.$$

Такимъ образомъ получается слѣдующее предложеніе.

Если производныя отношеній $\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}$ *и* $\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}$ *сохраняютъ свои знаки при измѣненіи перемѣннаго отъ* a *до* b, *и притомъ функціи* $\psi_1(x)$ *и* $\psi_2(x)$ *мѣняютъ знаки не иначе какъ одновременно, то числовая величина разности*

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)\psi_2(x)dx\int_a^b f_2(x)\psi_1(x)dx$$

заключается между предѣлами

$$ABU \text{ и } \alpha\beta U,$$

гдѣ U *есть числовая величина разности*

$$\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)x^2\,dx\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)\,dx-\left[\int_a^b\psi_1(x)\psi_2(x)\,x\,dx\right]^2,$$

A *и* α *суть высшій и низшій предѣлы числовыхъ величинъ производной* $\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}\right]$, *а* B *и* β *такіе же предѣлы для* *производной* $\frac{d}{dx}\left[\frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}\right]$ *при названныхъ предѣлахъ измѣняемости перемѣннаго.*

Вторая часть равенства (I), очевидно, не мѣняется, если замѣнить функціи ψ_1 и ψ_2 послѣдовательно чрезъ f_1 и f_2, и обратно. То-же самое можно, слѣдовательно, сдѣлать и въ послѣднемъ предложеніи.

Въ своей статьѣ — «О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе», П. Л. Чебышевъ далъ слѣдующее равенство какъ частный выводъ его общей теоріи

$$\int uv\theta\,dx = \frac{\int u\theta\,dx \int v\theta\,dx}{\int \theta\,dx} + R_1\,,$$

гдѣ u, v и θ суть какія нибудь функціи перемѣннаго x, изъ которыхъ послѣдняя остается положительною въ предѣлахъ интеграціи. При этомъ онъ указалъ, что числовая величина дополнительнаго члена R_1 второй части не превосходитъ произведенія

$$\frac{\int \theta\,dx \int x^2\theta\,dx - \left(\int x\theta\,dx\right)^2}{\int \theta\,dx}\,AB,$$

гдѣ A и B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ въ предѣлахъ интеграціи.

Легко видѣть, что результатъ этотъ получается изъ послѣдняго предложенія, если положимъ:

$$f_1 = u\theta,\ f_2 = v,\ \psi_1 = \theta,\ \psi_2 = 1.$$

IV.

РѢШЕНІЕ ОСНОВНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

ТЕОРІИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦІИ.

А. П. Грузинцева.

Въ математической теоріи кристаллической поляризаціи, данной въ первый разъ Ф. Нейманномъ въ 1835 году въ сочиненіи подъ заглавіемъ — «*Ueber den Einfluss der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls*», основныя уравненія представляютъ систему четырехъ уравненій 1-й степени съ 4-мя неизвѣстными. Уравненія эти на-столько сложны, что рѣшеніе ихъ обычнымъ, непосредственнымъ, если можно такъ выразиться, путемъ представляетъ большія трудности, вслѣдствіе сложности вычисленій; хотя Нейманнъ и рѣшилъ сказанныя уравненія, но путемъ крайне утомительныхъ выкладокъ; чтобы дать понятіе о трудности пріема Неймана, я позволю себѣ привести здѣсь слова извѣстнаго французскаго физика, Корню. Этотъ послѣдній, излагая пріемъ Неймана, говоритъ о немъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ: «Il (M. Neumann) osa attaquer de front les pénibles éliminations de sa théorie et son travail restera un chef-d'œuvre de patience analytique». (Annales de chimie et de physique. 4-ème série, tome XI, p. 299).

Макъ-Куллохъ, занимавшійся тѣмъ-же вопросомъ, предложилъ особый способъ для рѣшенія разбираемыхъ уравненій; пріемъ его въ высшей степени искусственный, хотя и проще способа Нейманна, но все-таки представляетъ неудобства, когда приходится находить окончательныя рѣшенія вопроса; за-то онъ очень удобенъ для общаго изслѣдованія окончательныхъ результатовъ,— каковымъ качествомъ не обладаетъ пріемъ Неймана.

Въ настоящей замѣткѣ будетъ изложенъ новый пріемъ для рѣшенія основныхъ уравненій теоріи кристаллической поляризаціи— пріемъ, не имѣющій, какъ мнѣ кажется, тѣхъ недостатковъ, кои присущи упомянутымъ выше пріемамъ Неймана и Макъ-Куллоха; излагаемый здѣсь пріемъ мнѣ кажется полезнымъ еще потому, что другіе авторы[1], занимавшіеся тѣмъ-же вопросомъ, довольствовались лишь выводомъ основныхъ уравненій, не приводя ихъ рѣшенія,—по всей вѣроятности въ силу сложности вычисленій.

§ 1.

Основныя уравненія теоріи кристаллической поляризаціи мы возьмемъ въ слѣдующей формѣ:

$$(\sin\theta - h\sin\theta')\cos i = \left(\frac{g_1\sin\theta_1\cos\sigma_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\sin\theta_2\cos\sigma_2}{\sin\sigma_2}\right)\sin i$$

$$\sin\theta + h\sin\theta' = g_1\sin\theta_1 + g_2\sin\theta_2$$

$$\cos\theta + h\cos\theta' = \left(\frac{g_1\cos\theta_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\cos\theta_2}{\sin\sigma_2}\right)\sin i$$

$$(\cos\theta - h\cos\theta')\cos i = g_1\cos\sigma_1(\cos\theta_1 + \operatorname{tang} u_1 \operatorname{tg}\sigma_1) + \\ + g_2\cos\sigma_2(\cos\theta_2 + \operatorname{tang} u_2 \operatorname{tang}\sigma_2).$$

Въ этихъ уравненіяхъ буквы имѣютъ слѣдующія значенія:

h, g_1, g_2 амплитуды колебаній отраженнаго и обоихъ преломленныхъ лучей, принимая амплитуду падающаго $=1$;

θ, θ', θ_1, θ_2 азимуты плоскостей поляризаціи падающаго, отраженнаго и обоихъ преломленныхъ лучей;

[1] Кирхгофъ и Кеттелеръ.

i уголъ паденія луча;

σ_1, σ_2 углы преломленія и

u_1, u_2 углы между преломленными лучами и нормалами соотвѣтствующихъ плоскихъ волнъ.

Замѣтимъ, что здѣсь предполагается перпендикулярность плоскостей поляризаціи (θ, θ', θ_1 и θ_2) къ тѣмъ, кои входятъ въ теоріи Неймана.

Въ написанныхъ уравненіяхъ неизвѣстныя суть:

$$h,\ g_1,\ g_2 \text{ и } \theta',$$

остальныя количества суть данныя.

§ 2.

Разсмотримъ сначала случай, когда падающій лучъ поляризованъ въ такъ-называемомъ первомъ азимутѣ. Введемъ *четыре вспомогательныя количества:*

$$g,\ \varphi,\ \sigma \text{ и } u,$$

полагая сначала:

$$(\sin\theta - h\sin\theta')\cos i = \frac{g\sin\varphi\cos\sigma\sin i}{\sin\sigma} \tag{a}$$

$$\sin\theta + h\sin\theta' = g\sin\varphi \tag{b}$$

а за-тѣмъ будемъ имѣть:

$$\frac{g\sin\varphi\cos\sigma}{\sin\sigma} = \frac{g_1\sin\theta_1\cos\sigma_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\sin\theta_2\cos\sigma_2}{\sin\sigma_2} \tag{α}$$

$$g\sin\varphi = g_1\sin\theta_1 + g_2\sin\theta_2. \tag{β}$$

Изъ уравненій (a) и (b) находимъ:

$$h\sin\theta' = -\frac{\sin(i-\sigma)}{\sin(i+\sigma)}\sin\theta \tag{I}$$

$$g\sin\varphi = \frac{2\cos i\sin\sigma}{\sin(i+\sigma)}\sin\theta. \tag{1}$$

§ 3.

Для случая, когда падающій лучъ поляризованъ во второмъ азимутѣ, полагаемъ:

$$\cos\theta + h\cos\theta' = \frac{g\cos\varphi\sin i}{\sin\sigma} \qquad (c)$$

$$(\cos\theta - h\cos\theta')\cos i = g\cos\sigma(\cos\varphi + \operatorname{tang} u \operatorname{tang}\sigma). \qquad (d)$$

Кромѣ того будемъ имѣть:

$$\frac{g\cos\varphi}{\sin\sigma} = \frac{g_1\cos\theta_1}{\sin\sigma_1} + \frac{g_2\cos\theta_2}{\sin\sigma_2} \qquad (\gamma)$$

$$g\cos\sigma(\cos\varphi + \operatorname{tang} u \operatorname{tang}\sigma) = g_1\cos\sigma_1(\cos\theta_1 + \\ + \operatorname{tang} u_1 \operatorname{tang}\sigma_1) + g_2\cos\sigma_2(\cos\theta_2 + \operatorname{tang} u_2 \operatorname{tang}\sigma_2). \qquad (\delta)$$

Понятно, что здѣсь величины g, φ, σ и u тѣ-же, что и въ предыдущемъ параграфѣ.

Уравненія (c) и (d) даютъ:

$$h\cos\theta' = \frac{\sin(i-\sigma)\cos(i+\sigma)\cos\varphi - \sin^2\sigma\operatorname{tang} u}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)\cos\varphi + \sin^2\sigma\operatorname{tang} u}\cos\theta,$$

$$g = \frac{2\cos i\sin\sigma\cos\theta}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)\cos\varphi + \sin^2\sigma\operatorname{tang} u}.$$

Если для симметріи и удобствъ вычисленій положимъ:

$$\operatorname{tang} u = \cos\varphi\operatorname{tang}\tau,$$

причемъ τ будетъ вспомогательное перемѣнное, замѣняющее прежнее u, то двѣ послѣднія формулы обратятся въ слѣдующія:

$$h\cos\theta' = \frac{\sin(i-\sigma)\cos(i+\sigma) - \sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma) + \sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau}\cos\theta. \qquad (\text{II})$$

$$g\cos\varphi = \frac{2\cos i\sin\sigma\cos\theta}{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma) + \sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau}. \qquad (2)$$

Итакъ знаемъ:

$$h\sin\theta' = \text{функ.}\ (\sigma)\quad,\quad h\cos\theta' = \text{функ.}\ (\sigma,\ \tau)$$

$$g\sin\varphi = \text{функ.}\ (\sigma)\quad,\quad g\cos\varphi = \text{функ.}\ (\sigma,\ \tau).$$

§ 4.

Обратимся теперь къ преломленнымъ лучамъ.

Уравненія (α) и (β) § 2 даютъ:

$$g_1\sin\theta_1 = \frac{\sin(\sigma-\sigma_2)\sin\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma_2)\sin\sigma}\,g\sin\varphi\,,$$

$$g_2\sin\theta_2 = -\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)\sin\sigma_2}{\sin(\sigma_1-\sigma_2)\sin\sigma}\,g\sin\varphi\,;$$

подставляя сюда значеніе $g\sin\varphi$ изъ равенства (1), получимъ:

$$g_1\sin\theta_1 = \frac{2\sin(\sigma-\sigma_2)\sin\sigma_1\cos i}{\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)}\sin\theta\,. \qquad \text{(III)}$$

$$g_2\sin\theta_2 = -\frac{2\sin(\sigma-\sigma_1)\sin\sigma_2\cos i}{\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)}\sin\theta. \qquad \text{(IV)}$$

Итакъ знаемъ:

$$g_1\sin\theta_1 = \text{функ.}\ (\sigma),\ g_2\sin\theta_2 = \text{функ.}\ (\sigma)\,.$$

§ 5.

Разрѣшимъ теперь уравненія (γ) и (δ), полагая предварительно для симметріи и удобствъ вычисленія:

$$\operatorname{tang} u_1 = \cos\theta_1\operatorname{tang}\tau_1,\ \operatorname{tang} u_2 = \cos\theta_2\operatorname{tang}\tau_2\,,$$

причемъ τ_1 и τ_2, подобно τ, будутъ играть роль угловъ u_1 и u_2; они имѣютъ простое и очевидное геометрическое значеніе.

Послѣ легкихъ преобразованій, найдемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = \frac{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\sin^2\sigma\operatorname{tang}\tau-\\ -\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2]\sin\sigma_1\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\operatorname{tang}\tau_1-\\ -\sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2]\sin\sigma\end{matrix}\right\}}\,g\cos\varphi,$$

$$g_2 \cos\theta_2 = -\frac{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau - \\ -\sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1]\sin\sigma_2\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1 - \\ -\sin^2\sigma_2 \operatorname{tang}\tau_2]\sin\sigma\end{matrix}\right\}} g\cos\varphi.$$

Подставляя сюда значенie $g\cos\varphi$ изъ равенства (2), найдемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = \frac{\left\{\begin{matrix}2[\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau - \sin^2\sigma_2 \operatorname{tang}\tau_2] \\ \sin\sigma_1 \cos i \cos\theta\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1 - \sin^2\sigma_2 \operatorname{tang}\tau_2] \\ [\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau]\end{matrix}\right\}}.\quad \text{(V)}$$

$$g_2\cos\theta_2 = -\frac{\left\{\begin{matrix}2[\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau - \sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1] \\ \sin\sigma_2 \cos i \cos\theta\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}[\sin(\sigma_1-\sigma_2)\cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1 - \sin^2\sigma_2 \operatorname{tang}\tau_2] \\ [\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau]\end{matrix}\right\}}.\quad \text{(VI)}$$

Итакъ знаемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = \text{функ.}\ (\sigma,\ \tau) \text{ и } g_2\cos\theta_2 = \text{функ.}\ (\sigma,\ \tau).$$

§ 6.

Раздѣляя (III) и (IV) соотвѣтственно на (V) и (VI), найдемъ два уравненія:

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \text{функц.}\ (\sigma,\ \tau) \text{ и } \operatorname{tang}\theta_2 = \text{функц.}\ (\sigma,\ \tau).$$

Изъ этихъ уравненій найдемъ σ и τ въ функціи данныхъ и извѣстныхъ: i, θ, σ_1, σ_2, θ_1, θ_2, τ_1 и τ_2; первыя два количества суть непосредственно данныя, а остальныя находятся по извѣстнымъ законамъ двойнаго преломленія.

Зная σ и τ, опредѣлимъ $h\sin\theta'$, $h\cos\theta'$[1], g_1 и g_2 въ функціи данныхъ и извѣстныхъ, т. е. рѣшимъ предложенную себѣ задачу окончательно; можно опредѣлить также $g\sin\varphi$ и $g\cos\varphi$, т. е. g и φ по уравненіямъ (1) и (2).

[1] Зная $h\sin\theta'$ и $h\cos\theta'$, мы опредѣлимъ h и θ'.

§ 7.

Займемся развитіемъ сейчасъ сказаннаго. Раздѣливъ $\tang\theta_1$ и $\tang\theta_2$ на $\tang\theta$, имѣемъ:

$$\frac{\tang\theta_1}{\tang\theta}=\frac{\left\{\begin{array}{c}\sin(\sigma-\sigma_2)\,\{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma\tang\tau\}\,\{\sin(\sigma_1-\sigma_2)\\ \cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\tang\tau_1-\sin^2\sigma_2\tang\tau_2\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)\,\{\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\\ +\sin^2\sigma\tang\tau-\sin^2\sigma\tang\tau_2\}\end{array}\right\}}$$

$$\frac{\tang\theta_2}{\tang\theta}=\frac{\left\{\begin{array}{c}\sin(\sigma-\sigma_1)\,\{\sin(i+\sigma)\cos(i-\sigma)+\sin^2\sigma\tang\tau\}\,\{\sin^2(\sigma-\sigma_2)\\ \cos(\sigma_1+\sigma_2)+\sin^2\sigma_1\tang\tau_1-\sin^2\sigma_2\tang\tau_2\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)\,\{\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\\ +\sin^2\sigma\tang\tau-\sin^2\sigma_1\tang\tau_1\}\end{array}\right\}}$$

Раздѣляя одно уравненіе на другое и сокращая, найдемъ:

$$\frac{\tang\theta_1}{\tang\theta_2}=\frac{\left\{\begin{array}{c}\sin(\sigma-\sigma_2)\,\{\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)+\\ +\sin^2\sigma\tang\tau-\sin^2\sigma_1\tang\tau_1\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\sin(\sigma-\sigma_1)\,\{\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)+\\ +\sin^2\sigma\tang\tau-\sin^2\sigma_2\tang\tau_2\}\end{array}\right\}}. \quad \text{(A)}$$

Положимъ:

$$\sin(\sigma-\sigma_1)\cos(\sigma+\sigma_1)-\sin^2\sigma_1\tang\tau_1=\lambda_1\sin^2\sigma$$

$$\sin(\sigma-\sigma_2)\cos(\sigma+\sigma_2)-\sin^2\sigma_2\tang\tau_2=\lambda_2\sin^2\sigma.$$

и

$$\frac{\tang\theta_1\sin(\sigma-\sigma_1)}{\tang\theta_2\sin(\sigma-\sigma_2)}=m,$$

тогда равенство (A) превратится въ слѣдующее:

$$m=\frac{\lambda_1+\tang\tau}{\lambda_2+\tang\tau};$$

откуда:

$$\tang\tau=\frac{\lambda_1-m\lambda_2}{m-1}. \quad \text{(B)}$$

Положимъ на-время:

$$\sin(\sigma_1 - \sigma_2)\cos(\sigma_1 + \sigma_2) + \sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1 - \sin^2\sigma_2 \operatorname{tang}\tau_2 = \alpha$$

$$\sin\sigma_1\cos\sigma_1 + \sin^2\sigma_1 \operatorname{tang}\tau_1 - m\,\{\sin\sigma_2\cos\sigma_2 + \sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2\} = \beta$$

$$\operatorname{tang}\theta_1 = n_1 \operatorname{tang}\theta\,,\ \operatorname{tang}\theta_2 = n_2\operatorname{tang}\theta.$$

Подставляя значеніе $\operatorname{tang}\tau$ изъ равенства (B) въ уравненіе для $\operatorname{tang}\theta_1$, найдемъ:

$$n_1\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2) - \beta\sin(\sigma-\sigma_2) + \\ + (m-1)\sin i\cos i\sin(\sigma-\sigma_2) = 0. \qquad (C)$$

замѣтивъ предварительно, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\sin^2\sigma = -\alpha,$$

$$(m\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2\sigma = (m-1)\sin\sigma\cos\sigma + \beta\,.$$

Если-бы пользовались уравненіемъ для $\operatorname{tang}\theta_2$, то нашли бы:

$$n_2\sin(i+\sigma)\sin(\sigma_1-\sigma_2)\,m - \beta\sin(\sigma-\sigma_1) + \\ + (m-1)\sin i\cos i\sin(\sigma-\sigma_1) = 0\,. \qquad (D)$$

Это уравненіе, разумѣется, тождественно[1] съ (C).

Изъ уравненія (C) находимъ:

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{\left\{\begin{array}{l} n_1\sin i\sin(\sigma_1-\sigma_2) + \beta\sin\sigma_2 - \\ -(m-1)\sin i\cos i\sin\sigma_2 \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} n_1\cos i\sin(\sigma_1-\sigma_2) - \beta\cos\sigma_2 + \\ +(m-1)\sin i\cos i\cos\sigma_2 \end{array}\right\}}\,. \qquad (E)$$

Разовьемъ теперь это уравненіе.

Положимъ для краткости письма:

$$p_1 = \sin\sigma_1\cos\sigma_1 + \sin^2\sigma_1\operatorname{tang}\tau_1\,,\ p_2 = \sin\sigma_2\cos\sigma_2 + \sin^2\sigma_2\operatorname{tang}\tau_2$$

$$q_1 = p_1 + \sin i\cos i\ ,\ q_2 = p_2 + \sin i\cos i$$

$$a = n_1\sin(\sigma_1 - \sigma_2)\ ,\ b = n_2\sin(\sigma_1 - \sigma_2);$$

---

[1] Вслѣдствіе соотношеній между σ_1, σ_2, θ_1, θ_2, τ_1 и τ_2, обусловливаемыхъ двойнымъ преломленіемъ.

тогда получимъ сначала

$$\beta = p_1 - m\,p_2\,,$$

а потомъ

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{a\sin i + q_1\sin\sigma_2 - mq_2\sin\sigma_2}{a\cos i - q_1\cos\sigma_2 + mq_2\cos\sigma_2}.$$

Если-бы пользовались уравненіемъ (D), то получили бы сначала

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{\left\{\begin{array}{c} n_2 m\sin i\sin(\sigma_1-\sigma_2) + \beta\sin\sigma_1 - \\ -(m-1)\sin i\cos i\sin\sigma_1 \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} n_2 m\cos i\sin(\sigma_1-\sigma_2) - \beta\cos\sigma_1 + \\ +(m-1)\sin i\cos i\cos\sigma_1 \end{array}\right\}} \qquad \text{(F)}$$

и потомъ

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{b\sin i + q_1\sin\sigma_1 - mq_2\sin\sigma_1}{b\cos i - q_1\cos\sigma_1 + mq_2\cos\sigma_1}.$$

Такъ-какъ m заключаетъ въ себѣ σ, то надо послѣднія выраженія для $\operatorname{tang}\sigma$ раскрыть и затѣмъ опредѣлить σ; но этотъ пріемъ не удобенъ, ибо приводитъ къ большимъ сложностямъ, поэтому мы будемъ дѣйствовать иначе.

Зная, что

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma},$$

составимъ выраженія:

$$-\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\cos\sigma_1 + \sin\sigma_1 = -\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)}{\cos\sigma}$$

и

$$-\frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}\cos\sigma_2 + \sin\sigma_2 = -\frac{\sin(\sigma-\sigma_2)}{\cos\sigma}.$$

По первой формулѣ для $\operatorname{tang}\sigma$ имѣемъ:

$$-\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)}{\cos\sigma} = \frac{a\sin(i+\sigma_1) - q_1\sin(\sigma_1-\sigma_2) + mq_2\sin(\sigma_1-\sigma_2)}{a\cos i - q_1\cos\sigma_2 + mq_2\cos\sigma_2},$$

$$-\frac{\sin(\sigma-\sigma_2)}{\cos\sigma}=\frac{a\sin(i+\sigma_2)}{a\cos i-q_1\cos\sigma_2+mq_2\cos\sigma_2}.$$

Раздѣляя одно изъ этихъ выраженій на другое и замѣчая, что

$$\frac{\sin(\sigma-\sigma_1)}{\sin(\sigma-\sigma_2)}=m\frac{n_2}{n_1},$$

найдемъ:

$$m\frac{n_2}{n_1}=\frac{a\sin(i+\sigma_1)-q_1\sin(\sigma_1-\sigma_2)+mq_2\sin(\sigma_1-\sigma_2)}{a\sin(i+\sigma_2)}$$

или, подставивъ значеніе a и сокративъ на общаго множителя: $\sin(\sigma_1-\sigma_2)$, получимъ:

$$m\frac{n_2}{n_1}=\frac{n_1\sin(i+\sigma_1)-q_1+mq_2}{n_1\sin(i+\sigma_2)}.$$

Отсюда

$$m=\frac{n_1\sin(i+\sigma_1)-q_1}{n_2\sin(i+\sigma_2)-q_2}, \qquad \text{(G)}$$

Это уравненіе весьма простаго вида, изъ него найдемъ $\tan\sigma$ въ функціи данныхъ и извѣстныхъ величинъ. Зная, что

$$m=\frac{n_1}{n_2}\frac{\cos\sigma_1\tan\sigma-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_2\tan\sigma-\sin\sigma_2},$$

имѣемъ

$$\tan\sigma=-\frac{n_1n_2\sin i\sin(\sigma_1-\sigma_2)+q_1n_2\sin\sigma_2-q_2n_1\sin\sigma_1}{n_1n_2\cos i\sin(\sigma_1-\sigma_2)-q_1n_2\cos\sigma_2+q_2n_1\cos\sigma_1}. \qquad \text{(H)}$$

Итакъ, σ найдено, хотя выраженіе для $\tan\sigma$ довольно сложно, но подстановка его значенія въ тѣ формулы, изъ коихъ опредѣляются другія неизвѣстныя, оказывается менѣе сложною вслѣдствіе многихъ сокращеній. Мы можемъ дать $\tan\sigma$ другой видъ, вводя значенія n_1 и n_2 и полагая для краткости:

$$\sin(\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2 = P,$$

$$\sin i P = A\,,\ \cos i P = A_1$$

$$q_1 \sin\sigma_2 \operatorname{tang}\theta_2 - q_2 \sin\sigma_1 \operatorname{tang}\theta_1 = B\,,$$
$$-q_1 \cos\sigma_2 \operatorname{tang}\theta_2 + q_2 \cos\sigma_1 \operatorname{tang}\theta_1 = B_1\,;$$

подставляя все это въ значеніе $\operatorname{tang}\sigma$, найдемъ:

$$\operatorname{tang}\sigma = -\frac{A\cos\theta + B\sin\theta}{A_1\cos\theta + B_1\sin\theta}.$$

§ 8.

Опредѣлимъ теперь τ. Такъ-какъ во всѣ формулы количество σ входитъ или одно или вмѣстѣ съ τ и въ послѣднемъ случаѣ всегда въ видѣ выраженія

$$\sin\sigma\cos\sigma + \sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau\,,$$

поэтому вмѣсто $\operatorname{tang}\tau$ опредѣлимъ количество

$$Q = \sin\sigma\cos\sigma + \sin^2\sigma \operatorname{tang}\tau\,.$$

Пользуясь формулой (B), имѣемъ:

$$Q - \sin\sigma\cos\sigma = \frac{\lambda_1 \sin^2\sigma - m\lambda_2 \sin^2\sigma}{m-1}\,.$$

Подставляя сюда значеніе m изъ формулы (G) и значеніе $\lambda_1 \sin^2\sigma$, $\lambda\ \sin^2\sigma$ изъ формулъ § 7, найдемъ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ и очевидныхъ упрощеній количество Q. Дѣйствительно, сначала найдемъ:

$$Q = \frac{mp_2 - p_1}{m-1}\,,$$

а потомъ

$$Q = \frac{p_2\{n_1\sin(i+\sigma_1) - q_1\} - p_1\{n_2\sin(i+\sigma_2) - q_2\}}{n_1\sin(i+\sigma_1) - n_2\sin(i+\sigma_2) - q_1 + q_2}\,.$$

Полагая же:

$$p_2 \operatorname{tang}\theta_1 \sin(i+\sigma_1) - p_1 \operatorname{tang}\theta_2 \sin(i+\sigma_2) = C,\ p_1 q_2 - p_2 q_1 = D,$$

$$\operatorname{tang}\theta_1 \sin(i+\sigma_1) - \operatorname{tang}\theta_2 \sin(i+\sigma_2) = C_1,\ q_2 - q_1 = D_1,$$

имѣемъ:

$$Q = \frac{C\cos\theta + D\sin\theta}{C_1\cos\theta + D_1\sin\theta}. \qquad (K)$$

§ 9.

Найдемъ теперь $h\sin\theta'$, $h\cos\theta'$ и т. д.

Подставляя значенiе $\operatorname{tang}\sigma$ въ выраженiе для $h\sin\theta'$ и замѣтивъ, что

$$A_1 \sin i - A\cos i = 0,$$

найдемъ:

$$h\sin\theta' = \frac{B_1\sin i + B\cos i}{B\cos i - B_1\sin i}\sin\theta + \frac{A_1\sin i + A\cos i}{B\cos i - B_1\sin i}\cos\theta$$

или

$$h\sin\theta' = h_1\sin\theta + h'_1\cos\theta, \qquad (1)$$

гдѣ

$$h_1 = \frac{B\cos i + B_1\sin i}{B\cos i - B_1\sin i},\ h_1' = \frac{A\cos i + A_1\sin i}{B\cos i - B_1\sin i}$$

Далѣе найдемъ подобнымъ же путемъ:

$$h\cos\theta' = h_2\sin\theta + h'_2\cos\theta, \qquad (2)$$

гдѣ

$$h_2 = \frac{D - D_1\sin i\cos i}{B\cos i - B_1\sin i},\ h'_2 = \frac{C - C_1\sin i\cos i}{B\cos i - B_1\sin i}$$

Потомъ найдемъ:

$$g_1\sin\theta_1 = k_1\sin\theta + k'_1\cos\theta, \qquad (3)$$

гдѣ

$$k_1 = \frac{B\cos\sigma_2 + B_1\sin\sigma_2}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

$$k'_1 = \frac{A\cos\sigma_2 + A_1\sin\sigma_2}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Такъ-же найдемъ:

$$g_2\sin\theta_2 = k_2\sin\theta + k'_2\cos\theta, \tag{4}$$

гдѣ

$$k_2 = -\frac{B.\cos\sigma_1 + B_1\sin\sigma_1}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_2.\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

$$k'_2 = -\frac{A\cos\sigma_1 + A_1\sin\sigma_1}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_2\cos i}{\sin(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Наконецъ найдемъ:

$$g_1\cos\theta_1 = l_1\sin\theta + l'_1\cos\theta \tag{5}$$

$$g_2\cos\theta_2 = l_2\sin\theta + l'_2\cos\theta, \tag{6}$$

гдѣ

$$l_1 = \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\alpha} \cdot \frac{D - D_1 p_2}{B\cos i - B_1\sin i},$$

$$l'_1 = -\frac{C - C_1 p_2}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_1\cos i}{\alpha}.$$

$$l_2 = \frac{2\sin\sigma_2\cos i}{\alpha} \; \frac{D - D_1 p_1}{B\cos i - B_1\sin i},$$

$$l'_2 = \frac{C - C_1 p_1}{B\cos i - B_1\sin i} \cdot \frac{2\sin\sigma_2\cos i}{\alpha}.$$

Такимъ образомъ задача рѣшена.

§ 10.

Въ заключеніе покажемъ выводъ нѣкоторыхъ слѣдствій, найденныхъ Макъ-Куллохомъ.

Умножая (1) уравненіе предыдущаго параграфа на $\cos\delta$, а (2) на $-\sin\delta$; а потомъ на $\sin\delta$ и $\cos\delta$ по сложеніи результатовъ, найдемъ:

$$h\sin(\theta'-\delta)=(h_1\cos\delta-h_2\sin\delta)\sin\theta+(h'_1\cos\delta-h'_2\sin\delta)\cos\theta$$

$$h\cos(\theta'-\delta)=(h_1\sin\delta+h_2\cos\delta)\sin\theta+(h'_1\sin\delta+h'_2\cos\delta)\cos\theta,$$

при этомъ δ есть какой-нибудь уголъ.

Если желаемъ, чтобы отраженный лучъ былъ поляризованъ въ плоскости, азимутъ которой есть δ, то необходимое и достаточное для этого условіе будетъ:

$$h\cos(\theta'-\delta)=0.$$

Такъ-какъ это равенство должно существовать при всякомъ θ, то заключаемъ, что необходимо, чтобы

$$h_1\sin\delta+h_2\cos\delta=0$$

$$h'_1\cos\delta+h'_2\sin\delta=0.$$

Откуда:

$$\operatorname{tang}\delta=-\frac{h_2}{h_1}=-\frac{h'_2}{h'_1}. \qquad (1)$$

Для опредѣленія угла паденія i, при которомъ существуетъ полная поляризація въ азимутѣ δ, имѣемъ уравненіе:

$$h_1h'_2+h'_1h_2=0. \qquad (2)$$

Изъ тѣхъ же формулъ § 9, находимъ:

$$\operatorname{tang}\theta'=\frac{h'_1+h_1\operatorname{tang}\theta}{h'_2+h'_2\operatorname{tang}\theta}.$$

Для maximum'а отклоненія плоскости поляризаціи отраженнаго луча необходимое условіе:

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = 0$$

даетъ:

$$h_1 h'_2 - h'_1 h_2 = 0. \qquad (3)$$

Слѣдовательно, наибольшее отклоненіе плоскости поляризаціи отраженнаго луча опредѣлится изъ уравненія:

$$\operatorname{tang} \eta = \frac{h_1}{h^2} = \frac{h'_1}{h'_2}, \qquad (4)$$

если буквою η назовемъ это отклоненіе.

Сравнивая эту формулу съ (1), находимъ:

$$\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \eta = -1.$$

Это равенство представляетъ извѣстную теорему, найденную Макъ-Куллохомъ.

Подобнымъ же образомъ можемъ вывести и другія любопытныя свойства отраженныхъ или преломленныхъ лучей относительно ихъ поляризаціи; но это выходитъ изъ предѣловъ назначенныхъ нами для этой замѣтки; прибавимъ только, что предварительныя выраженія для неизвѣстныхъ вопроса въ функціи отъ σ, τ, g и u (§§ 2 — 6) очень удобны для вывода и изслѣдованія различнаго рода соотношеній, существующихъ между ними.