

I.

О ПРИБЛИЖЕННЫХЪ ВЫРАЖЕНІЯХЪ

ОДНИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ЧЕРЕЗЪ ДРУГІЕ,

ВЗЯТЫЕ ВЪ ТѢХЪ-ЖЕ ПРЕДѢЛАХЪ.

П. Л. Чебышева.

Въ томъ случаѣ, когда извѣстны значенія функции $F(x)$ при всѣхъ величинахъ переменнѣй x отъ $x = a$ до $x = b$, послѣдняя изъ выведенныхъ нами формулъ въ мемуарѣ о непрерывныхъ дробяхъ¹, по замѣнѣ суммъ интегралами, даетъ такое разложеніе функции $F(x)$:

$$F(x) = \frac{\int F\psi_0 \vartheta dx}{\int \psi_0^2 \vartheta dx} \psi_0 + \frac{\int F\psi_1 \vartheta dx}{\int \psi_1^2 \vartheta dx} \psi_1 + \\ + \frac{\int F\psi_2 \vartheta dx}{\int \psi_2^2 \vartheta dx} \psi_2 + \dots,$$

гдѣ ϑ какаѣ нибудь функция, прерывная или непрерывная, но сохраняющая знакъ $+$ между $x = a$, $x = b$, предѣлами, между которыми берутся всѣ интегралы, а $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ суть знаменатели подходящихъ дробей интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z} dz,$$

получаемыхъ разложеніемъ его въ непрерывную дробь.

¹ Журналъ Ливинія, 2-я серія, Т. III, 1858, р. 289—323.

Разлагая по этой формулѣ двѣ какія нибудь функціи u , v и интегрируя произведение $uv \partial dx$ отъ $x = a$, до $x = b$, находимъ, что интеграль

$$\int_a^b uv \partial dx$$

приводится къ ряду, состоящему изъ такихъ членовъ:

$$\frac{\int u \psi_m \partial dx \cdot \int v \psi_n \partial dx}{\int \psi_m^2 \partial dx \cdot \int \psi_n^2 \partial dx} \cdot \int \psi_m \psi_n \partial dx,$$

гдѣ числа m , n принимаютъ всѣ значенія отъ 0 до ∞ .

Замѣчая, что, по извѣстному свойству функцій $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ при m не равномъ n интеграль

$$\int \psi_m \psi_n \partial dx$$

обращается въ нуль, мы изъ этого ряда выводимъ такое разложение интеграла $\int uv \partial dx$:

$$\int uv \partial dx = \frac{\int u \psi_0 \partial dx \cdot \int v \psi_0 \partial dx}{\int \psi_0^2 \partial dx} + \\ + \frac{\int u \psi_1 \partial dx \cdot \int v \psi_1 \partial dx}{\int \psi_1^2 \partial dx} + \frac{\int u \psi_2 \partial dx \cdot \int v \psi_2 \partial dx}{\int \psi_2^2 \partial dx} + \dots$$

Останавливая этотъ рядъ на членѣ

$$\frac{\int u \psi_{n-1} \partial dx \cdot \int v \psi_{n-1} \partial dx}{\int \psi_{n-1}^2 \partial dx}$$

и называя черезъ R_n дополнительный членъ, мы получаемъ равенство

$$\int uv \partial dx = \frac{\int u \psi_0 \partial dx \cdot \int v \psi_0 \partial dx}{\int \psi_0^2 \partial dx} + \frac{\int u \psi_1 \partial dx \cdot \int v \psi_1 \partial dx}{\int \psi_1^2 \partial dx} + \\ + \dots + \frac{\int u \psi_{n-1} \partial dx \cdot \int v \psi_{n-1} \partial dx}{\int \psi_{n-1}^2 \partial dx} + R_n$$

Опредѣляя выраженіе дополнительнаго члена R_n въ этомъ разложеніи интеграла $\int uv \vartheta dx$, мы нашли, что онъ обладаетъ такими свойствами:

1) Числовая величина его не превосходитъ

$$\frac{\int \psi_n^2 \vartheta dx}{\left(\frac{\partial^n \psi_n(x)}{\partial x^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ A, B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ въ предѣлахъ интегрированія.

2) Если въ этихъ предѣлахъ производныя $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ не мѣняютъ своего знака, дополнительный членъ R_n имѣетъ одинакій знакъ съ произведеніемъ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n v}{\partial x^n}$.

Чтобы показать приложеніе этого, мы рассмотримъ случай $n=1$.

Такъ какъ первыя подходящія дроби интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z} dz,$$

получаемыя разложеніемъ его въ непрерывную дробь, суть

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{\int \vartheta dx}{\int \vartheta dx \cdot x - \int x \vartheta dx},$$

то функціи ψ_0, ψ_1 , входящія въ наши формулы, имѣютъ слѣдующія величины:

$$\psi_0 = 1; \quad \psi_1 = \int \vartheta dx \cdot x - \int x \vartheta dx.$$

Полагая въ нашихъ формулахъ

$$n = 1$$

и внося въ нихъ эти величины функцій ψ_0, ψ_1 , мы получаемъ равенство

$$\int uv \vartheta dx = \frac{\int u \vartheta dx \cdot \int v \vartheta dx}{\int \vartheta dx} + R_1$$

и такое выраженіе для высшаго предѣла числовыхъ величинъ дополнительнаго члена R_1 :

$$\frac{\int \vartheta dx \cdot \int x^2 \vartheta dx - (\int x \vartheta dx)^2}{\int \vartheta dx} AB,$$

гдѣ A , B суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ въ предѣлахъ интегрированія. — Въ томъ случаѣ, когда производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ въ предѣлахъ интегрированія не мѣняютъ своихъ знаковъ, дополнительный членъ R_1 по вышесказанному будетъ имѣть одинакій знакъ съ произведеніемъ $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

Полагая $\vartheta = 1$ и принимая за предѣлы интегрированій 0 и 1, мы по вышенайденной формулѣ получаемъ равенство

$$\int_0^1 uv dx = \int_0^1 u dx \cdot \int_0^1 v dx + R_1,$$

и такое выраженіе для высшаго предѣла числовыхъ величинъ R_1 :

$$\frac{1}{12} AB.$$

Для другого приложенія мы разсмотримъ случай, когда

$$\vartheta = 1$$

и предѣлы интегрированій суть -1 и $+1$. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, функціи $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ приводятся къ функціямъ Лежандра X_0, X_1, X_2, \dots и вслѣдствіе того по нашей формулѣ получается такое равенство:

$$\int_{-1}^{+1} uv dx = \frac{\int_{-1}^{+1} u X_0 dx \cdot \int_{-1}^{+1} v X_0 dx}{\int_{-1}^{+1} X_0^2 dx} +$$

$$+ \frac{\int_{-1}^{+1} u X_1 dx \cdot \int_{-1}^{+1} v X_1 dx}{\int_{-1}^{+1} X_1^2 dx} + \dots + \frac{\int_{-1}^{+1} u X_{n-1} dx \cdot \int_{-1}^{+1} v X_{n-1} dx}{\int_{-1}^{+1} X_{n-1}^2 dx} + R_n,$$

откуда по внесении величинъ интеграловъ

$$\int_{-1}^{+1} X_0^2 dx, \int_{-1}^{+1} X_1^2 dx, \dots, \int_{-1}^{+1} X_{n-1}^2 dx$$

выходитъ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} uv dx = & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u X_0 dx \cdot \int_{-1}^{+1} v X_0 dx + \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} u X_1 dx \cdot \int_{-1}^{+1} v X_1 dx + \\ & \dots + \frac{2n-1}{2} \int_{-1}^{+1} u X_{n-1} dx \cdot \int_{-1}^{+1} v X_{n-1} dx + R_n. \end{aligned}$$

Замѣчая же, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\int_{-1}^{+1} \psi_n^2 \vartheta dx = \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$\frac{\partial^n \psi_n(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n X_n}{\partial x^n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1),$$

мы по вышепоказанному выраженію высшаго предѣла числовой величины дополнительнаго члена R_n , находимъ, что въ выведенномъ нами разложеніи интеграла

$$\int uv dx$$

числовая величина дополнительнаго члена не будетъ превосходить количества

$$\frac{2AB}{1^2, 3^2, 5^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)^2}$$

гдѣ A, B наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$,

$\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ между $x = -1$ и $x = +1$. Что касается до знака дополнительнаго члена, то, по вышесказанному, онъ несомнѣнно будетъ одинакій съ знакомъ произведенія $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n v}{\partial x^n}$, если производныя

$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ между $x = -1$ и $x = +1$ не мѣняютъ своихъ знаковъ.

Въ заключеніе замѣтимъ, что показанное нами относительно дополнительнаго члена въ разложеніи интеграла

$$\int uv \vartheta dx$$

можетъ послужить для опредѣленія степени точности, съ которою вышесказанное разложеніе функціи $F(x)$, остановленное на какомъ либо членѣ, даетъ ея величину.

П. Чебышевъ.

С. - Петербургъ.

29-го января 1883 года.

СОДЕРЖАНИЕ

Протокол заседания

Стр.

80 — 81	17-го октября 1881 года
81	18-го октября
82	19-го октября
87 — 88	20-го октября 1881 года
89 — 90	21-го октября

Содержание

88 — 89	1. П. Л. Федосеев, О приращении выроста
90 — 91	2. В. Л. Минеманов, О неравенствах, образующихся при определении выроста
92 — 93	3. К. А. Андреев, Пролог по поводу

ПОПРАВКА.

Стр. 95

Стр. 9 снизу

Напечатано: $\int \theta dx$

Должно быть: $\frac{[\int \theta dx]^2}{\int \theta dx \cdot x - \int x \theta dx}$