

VIII

# СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

## МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

П Р И

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

1883 года.

I.



Х А Р Ъ К О В Ъ.

Въ Университетской Типографіи.

1883.







## СО Д Е Р Ж А Н І Е.

---

	<i>Стран.</i>
ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ:	
31-го января 1883 года . . . . .	1.
28-го февраля . . . . .	3.
14-го марта . . . . .	4.
4-го апрѣля . . . . .	18.
29-го мая . . . . .	68.

### С О О Б Щ Е Н І Я:

1. *К. А. Поссе*, О дополнительномъ членѣ въ формулѣ *П. Л. Чебышева* для приближеннаго выраженія одного опредѣленнаго интеграла черезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ. . . . . 5 — 17.
2. *К. А. Андреева*, Нѣкоторыя обобщенія въ вопросѣ о разложеніи опредѣленнаго интеграла по формулѣ, предложенной *П. Л. Чебышевымъ* . . . . . 19 — 42.
3. *П. М. Новикова*, Особенный случай максимум'а и минимум'а функціи со многими переменными . . . . . 43 — 46.
4. *М. А. Тихомандрицкаго*, Замѣтка о введеніи  $\Theta$ -функцій въ теорію эллиптическихъ функцій . . . . . 47 — 67.



## ПРОТОКОЛЬ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

31 января 1883 года.

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. О. Ковальскій, Г. В. Левицкій, М. С. Косенко, Н. М. Флавицкій, И. Д. Липицкій, А. А. Ключниковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго ф культета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. Д. М. Деларю прочиталъ письмо В. Г. Имшенецкаго, благодарящаго общество за избраніе его въ предсѣдатели общества на текущій годъ.

2. Избранъ въ члены общества, по предложенію Д. М. Деларю, преподаватель 3-й харьковской гимназіи А. В. Маевскій.

3. К. А. Андреевъ сообщилъ содержаніе статьи г. Стефаноса, присланной имъ въ общество, подъ заглавіемъ — « О трехъ равныхъ фигурахъ на плоскости ».

4. М. О. Ковальскій предложилъ задачу: Проинтегрировать линейное дифференціальное уравненіе вида:



$$y'' + [Ce^z + 2]y' + y = 0$$

или, что то-же,

$$y'' - [Ce^z + 2]y' + y = 0.$$

Эту задачу М. Θ. Ковальскій сопровождалъ нѣкоторыми объясненіями.

5. А. П. Грузинцевъ сообщилъ распространеніе способа стариннаго арабскаго геометра Абуль-Джуда, даннаго имъ для вычисленія стороны правильнаго вписаннаго девятиугольника, на случай многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ.

6. Секретаремъ общества сообщено о полученіи слѣдующихъ изданій:

- 1) Educational Times, December. 1882.
- 2) Mathesis, Decembre, 1882.
- 3) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou, № 2. 1882.
- 4) Кіевскія университетскія извѣстія, № 11 (ноябрь), 1882.
- 5) Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 2 série. Tome IV, 3 cahier, 1881, et Tome V, 1 cahier, 1882.



Протоколъ засѣданія 28-го февраля.

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, А. А. Ключниковъ, М. О. Ковальскій, И. Д. Ливницкій, И. К. Шейдтъ, Г. В. Левицкій, А. В. Маевскій, И. Д. Штукаревъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. *К. А. Андреевъ* сообщилъ содержаніе записки академика П. Л. Чебышева, присланной имъ для общества, подъ заглавіемъ — «О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ-же предѣлахъ».

2. *И. К. Шейдтъ* передалъ содержаніе брошюры академика В. Я. Буняковского, присланной имъ черезъ академика В. Г. Имшенецкаго въ даръ харьковскому обществу, подъ заглавіемъ — «Объ одномъ видоизмѣненіи способа, извѣстнаго подъ названіемъ Эратосенова рѣшета». Статья эта была помѣщена въ Запискахъ академіи наукъ за 1882 годъ.

3. Секретарь доложилъ списокъ книгъ, полученныхъ обществомъ въ февралѣ. Получено было:

1) Протоколы физико-математической секціи при казанскомъ обществѣ естествоиспытателей, за все время существованія секціи.

2) Journal de mathématiques élémentaires. № 1. 1883.

3) Journal de mathématiques spéciales. № 1. 1883.

4) Instructions for observing the transit of Venus, Dec.

6. 1882, — отъ вашингтонской морской обсерваторіи.



5) Bulletin de la société mathématique de France, T. X. № 7. (1882).

6) Киевскія университетскія извѣстія № 12. 1882.

7) Преподаваніе чистой математики въ берлинскомъ и лейпцигскомъ университетахъ — изъ «Отчета о путешествіи за-границу лѣтомъ 1882 г.». Присланъ казанскимъ профессоромъ Васильевымъ.

4. Секретарь доложилъ обществу, что имъ посланы три послѣднія книжки «Сообщеній» въ казанское математическое общество.

---

Протоколъ засѣданія 14-го марта.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, А. А. Ключниковъ, И. Д. Линицкій, И. К. Шейдтъ, А. В. Маевскій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. К. А. Андреевъ доложилъ статью В. Г. Имшенецкаго, присланную имъ для харьковскаго общества, подъ заглавіемъ: «О неравенствахъ, ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій».

2. Онъ-же сообщилъ замѣтку по поводу одной теоремы Чебышева и аналогичной съ нею теоремы, находящейся въ статьѣ В. Г. Имшенецкаго.



## О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМЪ ЧЛЕНѢ

ВЪ ФОРМУЛѢ П. Л. ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ПРИВЛИЖЕННАГО ВЫРАЖЕНІЯ ОДНОГО ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗЪ ДРУГІЕ, ВЗЯТЫЕ ВЪ ТѢХЪ ЖЕ ПРЕДѢЛАХЪ.

*К. А. Поссе.*

Въ «Сообщеніяхъ харьковскаго математическаго общества» за 1882 годъ П. Л. Чебышевъ даетъ разложеніе интеграла

$$\int_a^b uv \vartheta dx,$$

гдѣ  $u$  и  $v$  произвольныя, непрерывныя въ предѣлахъ  $a$  и  $b$ , функція отъ  $x$ ,  $\vartheta$  — прерывная или непрерывная функція отъ  $x$ , сохраняющая знакъ  $+$  въ тѣхъ же предѣлахъ, въ рядѣ, общій членъ котораго есть

$$\frac{\int_a^b u \psi_m \vartheta dx \cdot \int_a^b v \psi_m \vartheta dx}{\int_a^b \psi_m^2 \vartheta dx}$$

гдѣ  $\psi_m$  есть знаменатель  $(m + 1)$ -ой подходящей дроби въ разложеніи интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z) dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Статья П. Л. Чебышева прислана обществу въ началѣ 1883 года и по причинѣ живаго интереса, уже возбужденнаго ея предметомъ въ литературѣ, была немедленно помѣщена въ печатавшейся тогда послѣдней тетради «Сообщеній харьк. м. о.» за 1882 г. (Примѣч. ред.).



Останавливая этот ряд на членъ

$$\frac{\int_a^b u \psi_{n-1} \vartheta dx \int_a^b v \psi_{n-1} \vartheta dx}{\int_a^b \psi_{n-1}^2 \vartheta dx}$$

и обозначая через  $R_n$  дополнительный членъ, Чебышевъ даетъ, безъ доказательства, слѣдующія свойства его:

1. Числовая величина  $R_n$  не превосходитъ

$$\frac{\int_a^b \psi_n^2 \vartheta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ  $A, B$  суть наибольшія числовыя величины производныхъ  $\frac{d^nu}{dx^n}$ ,  $\frac{d^nv}{dx^n}$  въ предѣлахъ интегрированія.

2. Если въ этихъ предѣлахъ производныя  $\frac{d^nu}{dx^n}$  и  $\frac{d^nv}{dx^n}$  не мѣняютъ своего знака, то  $R_n$  имѣетъ одинаковый знакъ съ произведеніемъ  $\frac{d^nu}{dx^n} \cdot \frac{d^nv}{dx^n}$ .

Для частнаго случая  $n = 1$  и  $\vartheta = 1$  выраженіе дополнительнаго члена дано и оба свойства его доказаны К. А. Андреевымъ<sup>1</sup>. Это выраженіе можетъ быть также легко получено изъ тождества А. Н. Коркина, опубликованнаго имъ въ «Comptes rendus, T. XCVI, № 5».

Въ настоящей замѣткѣ я даю общее выраженіе дополнительнаго члена  $R_n$  и доказываю оба его свойства, приведенныя выше.

Во всѣхъ послѣдующихъ формулахъ мы будемъ, для простоты, опускать обозначеніе предѣловъ интеграловъ, которые всѣ берутся отъ  $a$  до  $b$ ; кромѣ того при обозначеніи различныхъ функцій отъ  $x$  будемъ писать  $f_x, \varphi_x, \vartheta_x$  и т. д., опуская скобки.

<sup>1</sup> Въ той-же тетради «Сообщеній харьк. мат. общ.».



Относительно функции  $\psi_m x$ , изображающих знаменатели подходящих дробей въ разложеніи интеграла

$$(8) \quad \int \frac{\mathcal{F}z dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь, припомнимъ, что

$\psi_0 x = 1$ , а  $\psi_m x$  — цѣлая функция  $m$ -ой степени, обладающая свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ

$$\int \psi_m x \omega x \mathcal{F}x dz = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $\omega x$  есть произвольная цѣлая функция степени не выше  $m-1$ .

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  будутъ обозначать  $n+1$  независимыхъ другъ отъ друга величинъ, лежащихъ въ предѣлахъ  $a$  и  $b$ ;

$$\Delta_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1, & \psi_{n-1}x_2, & \dots & \psi_{n-1}x_{n+1} \\ \psi_{n-2}x_1, & \psi_{n-2}x_2, & \dots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1 x_1, & \psi_1 x_2, & \dots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ f x_1, & f x_2, & \dots & f x_{n+1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

$\Delta_{n-1}(\varphi)$  обозначаетъ опредѣлитель, получаемый изъ  $\Delta_{n-1}(f)$  замѣною функции  $f$  функциею  $\varphi$ ;

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1, & \psi_{n-1}x_2, & \dots & \psi_{n-1}x_n \\ \psi_{n-2}x_1, & \psi_{n-2}x_2, & \dots & \psi_{n-2}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1 x_1, & \psi_1 x_2, & \dots & \psi_1 x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$\prod_{i=1}^n \mathcal{F}x_i dx_i = \mathcal{F}x_1 \mathcal{F}x_2 \dots \mathcal{F}x_n dx_1 dx_2 \dots dx_n$

$$J_{n-1}(f, \varphi) = \int \Delta_{n-1}(f) \Delta_{n-1}(\varphi) \prod_{i=1}^{n+1} \mathcal{F}x_i dx_i \quad (5)$$



гдѣ  $\int^{(n+1)}$  обозначаетъ результатъ  $(n+1)$ -кратнаго интегрирования по всеѣмъ переменнымъ  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  между предѣлами  $a$  и  $b$ ;

$$J_{n-1} = \int^{(n)} \Delta_{n-1}^2 \prod_{i=1}^n \vartheta x_i dx_i. \quad (6)$$

Мы будемъ искать формулу приведенія для интеграла  $J_{n-1}(f, \varphi)$ , т. е. зависимость между  $J_{n-1}(f, \varphi)$  и  $J_{n-2}(f, \varphi)$ ; эта формула и приведетъ насъ къ формулѣ Чебышева съ дополнительнымъ членомъ.

Разлагая определители  $\Delta_{n-1}(f)$  и  $\Delta_{n-1}(\varphi)$  по элементамъ первой строки, находимъ

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(f) &= \psi_{n-1} x_1 \cdot A_1 + \psi_{n-1} x_2 \cdot A_2 + \dots + \psi_{n-1} x_{n+1} \cdot A_{n+1} \\ \Delta_{n-1}(\varphi) &= \psi_{n-1} x_1 \cdot B_1 + \psi_{n-1} x_2 \cdot B_2 + \dots + \psi_{n-1} x_{n+1} \cdot B_{n+1}, \end{aligned}$$

гдѣ  $A_i, B_i$  суть определители миноры, независящія отъ элемента  $x_i$ .

Отсюда находимъ

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(f) \cdot \Delta_{n-1}(\varphi) &= \sum \psi_{n-1}^2 x_i \cdot A_i B_i + \\ &+ \sum \psi_{n-1} x_i \cdot \psi_{n-1} x_k \cdot A_i B_k, \end{aligned} \quad (7)$$

гдѣ первая сумма распространена на всеѣ значенія

$$i = 1, 2, 3, \dots, (n+1),$$

а вторая на всеѣ комбинаціи значеній

$$i = 1, 2, 3, \dots, (n+1)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, (n+1),$$

за исключеніемъ комбинацій, въ которыхъ  $i = k$ , число членовъ первой суммы равно  $n+1$ , и второй  $n(n+1)$ ; все члены въ каждой изъ суммъ получаются изъ одного перестановкой буквъ:  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ .



Умножая обѣ части равенства (7) на

$$\prod_1^{n+1} \delta x_i dx_i$$

и интегрируя  $(n+1)$  разъ, находимъ, на основаніи вышесказаннаго,

$$J_{n-1}(f, \Phi) = (n+1) \int \Psi_{n-1}^2 x_1 A_1 B_1 \prod_1^{n+1} \delta x_i dx_i + \\ + n(n+1) \int \Psi_{n-1} x_1 \Psi_{n-1} x_2 A_1 B_1 \prod_1^{n+1} \delta x_i dx_i. \quad (8)$$

гдѣ  $A_1 = \begin{vmatrix} \Psi_{n-2} x_2, & \Psi_{n-2} x_3, & \dots & \Psi_{n-2} x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1 x_2, & \Psi_1 x_3, & \dots & \Psi_1 x_{n+1} \\ 1, & 1, & \dots & 1 \\ f x_2, & f x_3, & \dots & f x_{n+1} \end{vmatrix}$

$B_1$  получается изъ  $A_1$  замѣною  $f$  на  $\Phi$ ,

$$B_2 = - \begin{vmatrix} \Psi_{n-2} x_1, & \Psi_{n-2} x_3, & \dots & \Psi_{n-2} x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1 x_1, & \Psi_1 x_3, & \dots & \Psi_1 x_{n+1} \\ 1, & 1, & \dots & 1 \\ \Phi x_1, & \Phi x_3, & \dots & \Phi x_{n+1} \end{vmatrix}$$

Первый членъ второй части формулы (8), очевидно, приведется къ

$$(n+1) \int \Psi_{n-1}^2 x \delta x dx \cdot \int \Delta_{n-2}^{(n)}(f) \Delta_{n-2}(\Phi) \prod_1^n \delta x_i dx_i,$$

т. е. на основаніи нашихъ обозначеній къ

$$(n+1) J_{n-2}(f\Phi) \cdot \int \Psi_{n-1}^2 x \delta x dx.$$







или 
$$\frac{J_{n-1}(f, \Phi)}{n(n+1) J_{n-2} \cdot \int \Psi_{n-1}^2 x \, dx} = \frac{J_{n-2}(f, \Phi)}{n J_{n-2}} \frac{\int f x \Psi_{n-1} x \, dx \cdot \int \Phi x \Psi_{n-1} x \, dx}{\int \Psi_{n-1}^2 x \, dx}. \quad (9)$$

Дѣлая здѣсь частное предположеніе о функціяхъ  $f$  и  $\Phi$ , а именно:

$$f x = \Phi x = \Psi_{n-1} x,$$

причемъ  $J_{n-1}(\Psi_{n-1}, \Psi_{n-1})$  обратится въ 0, потому что въ определителѣ  $\Delta_{n-1}(\Psi_{n-1})$  двѣ строки будутъ тождественныя, а  $J_{n-2}(\Psi_{n-1}, \Psi_{n-1})$  обратится въ  $J_{n-1}$ , потому что

$$\Delta_{n-2}^2(\Psi_{n-1}) = \Delta_{n-2}^2,$$

находимъ

$$J_{n-1} = n J_{n-2} \cdot \int \Psi_{n-1}^2 x \, dx \quad (10)$$

и формула (9) приметъ видъ

$$\frac{J_{n-1}(f, \Phi)}{(n+1) J_{n-1}} = \frac{J_{n-2}(f, \Phi)}{n J_{n-2}} \frac{\int f x \Psi_{n-1} x \, dx \cdot \int \Phi x \Psi_{n-1} x \, dx}{\int \Psi_{n-1}^2 x \, dx}. \quad (11)$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно  $n = 2, 3, \dots, n$ , складывая результаты и замѣчая, что

$$\begin{aligned} \frac{J_0(f, \Phi)}{2 J_0} &= \frac{1}{2} \frac{\iint (f x_2 - f x_1) (\Phi x_2 - \Phi x_1) \, dx_1 \, dx_2}{\int \int x \, dx} = \\ &= \frac{\int f x \Phi x \, dx}{\int \int x \, dx} = \frac{\int f x \, dx \cdot \int \Phi x \, dx}{\int \int x \, dx}, \end{aligned}$$

получаемъ окончательно формулу



$$\int f x \Phi x \mathcal{D} x dx = \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\int f x \psi_{n-1} x \mathcal{D} x dx \cdot \int \Phi x \psi_{n-1} x \mathcal{D} x dx}{\int \psi_{n-1}^2 x \mathcal{D} x dx} +$$

$$+ \frac{J_{n-1}(f, \Phi)}{(n+1) J_{n-1}}. \quad (12)$$

Это и есть формула Чебышева съ дополнительнымъ членомъ

$$R_n = \frac{J_{n-1}(f, \Phi)}{(n+1) J_{n-1}}. \quad (13)$$

Приступая къ доказательству свойствъ  $R_n$ , мы сперва упростимъ выраженіе его, пользуясь известными свойствами определителей.

Разсматривая выраженія определителей  $\Delta_{n-1}(f)$ ,  $\Delta_{n-1}(\Phi)$  и  $\Delta_{n-1}$ , входящихъ подъ знаки интеграловъ  $J_{n-1}(f, \Phi)$  и  $J_{n-1}$ , и замѣчая, что

$$\psi_{n-1} x = c_{n-1} x^{n-1} + \omega x,$$

гдѣ  $\omega x$  цѣлая функція не выше  $(n-2)$ -ой степени, мы можемъ представить  $\psi_{n-1} x$  въ видѣ

$$\psi_{n-1} x = c_{n-1} x^{n-1} + a_0 \psi_{n-2} x + a_1 \psi_{n-3} x + \dots + a_{n-2},$$

гдѣ  $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$  отъ  $x$  не зависятъ; отсюда, по известному свойству определителей, заключаемъ, что въ выраженіяхъ  $\Delta_{n-1}(f)$ ,  $\Delta_{n-1}(\Phi)$  мы можемъ замѣнить элементы первой строки

$$\psi_{n-1} x_1, \psi_{n-1} x_2, \dots, \psi_{n-1} x_{n+1}$$

элементами

$$c_{n-1} x_1^{n-1}, c_{n-1} x_2^{n-1}, \dots, c_{n-1} x_{n+1}^{n-1}.$$

Точно также убѣждаемся, что вообще строку

$$\psi_k x_1, \psi_k x_2, \dots, \psi_k x_{n+1}$$

можемъ замѣнить строкою



$$(61) \quad c_k x_1^k, c_k x_2^k, \dots \dots c_k x_{n+1}^k,$$

гдѣ  $c_k$  есть коэффициентъ при  $x^k$  въ  $\psi_k x$ .

Дѣлая такое-же преобразование въ опредѣлитель  $\Delta_{n-1}$  и раздѣливъ числителя и знаменателя въ выраженіи  $R_n$  на постоянное количество  $(c_1 c_2 \dots c_{n-1})^2$ , находимъ для  $R_n$  формулу

$$R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_{n-1}(f) D_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i dx_i}{(n+1) \int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^n \vartheta x_i dx_i}, \quad (14)$$

гдѣ  $D_{n-1}(f) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & \dots & , & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & \dots & , & x_{n+1} \\ x_1^2 & , & x_2^2 & , & \dots & , & x_{n+1}^2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ x_1^{n-1} & , & x_2^{n-1} & , & \dots & , & x_{n+1}^{n-1} \\ f x_1 & , & f x_2 & , & \dots & , & f x_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & \dots & , & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & \dots & , & x_n \\ x_1^2 & , & x_2^2 & , & \dots & , & x_n^2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ x_1^{n-1} & , & x_2^{n-1} & , & \dots & , & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

или иначе

$$D_{n-1} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Докажемъ теперь одно свойство опредѣлителя  $D_{n-1}(f)$ , которое и послужитъ для вывода свойствъ  $R_n$ . Свойство это выражается формулою

$$D_{n-1}(f) = (x_2 - x_1) \dots (x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n) \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2 \dots n}$$



или 
$$D_{n-1}(f) = D_n \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{1 \cdot 2 \dots n}, \quad (15)$$

гдѣ  $f^{(n)}(x)$  обозначаетъ  $n$ -ую производную отъ  $f(x)$ , а  $\xi$  число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ числа

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1}.$$

Для доказательства замѣчаемъ, что формула (15) очевидно повѣряется въ случаѣ  $n=1$ , потому что

$$D_0(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ fx_1 & fx_2 \end{vmatrix} = fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1)f'(\xi),$$

гдѣ  $\xi$  число среднее между  $x_1$  и  $x_2$ .

Достаточно, слѣдовательно, убѣдиться, что если формула справедлива для какого-нибудь значенія  $n$ , то она будетъ справедлива и для значенія  $n$  на единицу большаго.

Руководствуясь этимъ, преобразуемъ  $D_{n-1}(f)$  слѣдующимъ образомъ

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \dots & fx_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^2 - x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ fx_2 - fx_1 & fx_3 - fx_1 & \dots & fx_{n+1} - fx_1 \end{vmatrix}.$$

Раздѣляя элементы перваго столбца на  $x_2 - x_1$ , втораго на  $x_3 - x_1$  и т. д., находимъ







Составляя же  $(n-1)$ -ую производную функции

$$F(x) = \frac{fx - fx_1}{x - x_1} = (fx - fx_1)(x - x_1)^{-1}$$

находимъ

$$\begin{aligned} F^{(n-1)}x &= (x - x_1)^{-1} f^{(n-1)}x - (n-1)(x - x_1)^{-2} f^{(n-2)}x + \\ &+ (n-1)(n-2)(x - x_1)^{-3} f^{(n-3)}x - \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} 1.2\dots(n-1)(x - x_1)^{-n}(fx - fx_1) \\ &= 1.2\dots(n-1) \frac{fx_1 - fx - \frac{x_1 - x}{2} f'x \dots - \frac{(x_1 - x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}x}{(x_1 - x)^n} \\ &= 1.2\dots(n-1) \frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{1.2\dots n}, \end{aligned}$$

гдѣ  $\varepsilon$  — число, лежащее между  $x_1$  и  $x$ ,

а потому

$$\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\dots(n-1)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\dots n},$$

гдѣ  $\xi$  — число лежащее между  $\xi_1$  и  $x_1$ , т. е. въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ .

Подставляя въ формулу (16) найденное выраженіе для  $\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\dots(n-1)}$ , находимъ

$$D_{n-1}(f) = D_n \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\dots n},$$

что и доказываетъ формулу (15).

Примѣняя ту же формулу къ  $D_{n-1}(\varphi)$ , находимъ, что дополнительный членъ формулы Чебышева можетъ быть написанъ въ видѣ

$$R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \cdot f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i dx_i}{(n+1) \int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^n \vartheta x_i dx_i}. \quad (17)$$



Изъ этой формулы вытекаетъ прямо второе свойство  $R_n$ , по которому онъ имѣетъ одинаковый знакъ съ  $f^{(n)}x \cdot \varphi^{(n)}x$ , если  $f^{(n)}x$  и  $\varphi^{(n)}x$  не мѣняютъ знака въ предѣлахъ интегрированія.

Далѣе видимъ, что числовая величина  $R_n$  не превосходитъ

$$\frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \prod \partial x_i dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod \partial x_i dx_i} \cdot AB, \quad (18)$$

гдѣ  $A, B$  суть наибольшія числовыя величины  $f^{(n)}x$  и  $\varphi^{(n)}x$  въ этихъ предѣлахъ.

Кромѣ того, если положимъ въ формулѣ (12)  $Fx = \varphi x = \psi_n x$ , то въ силу (1) свойства  $\psi_n x$  всѣ члены второй части, кромѣ  $R_n$ , обратятся въ 0,

$$F^{(n)}x = \varphi^{(n)}x = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot c_n = \frac{d^n \psi_n x}{dx^n}.$$

и находимъ

$$\int \psi_n^2 x \partial x dx = \left( \frac{d^n \psi_n x}{dx^n} \right)^2 \cdot \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \prod \partial x_i dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod \partial x_i dx_i}$$

въ силу чего выраженіе (18) приметъ видъ

$$\frac{\int \psi_n^2 x \partial x dx}{\left( \frac{d^n \psi_n x}{dx^n} \right)^2} \cdot AB.$$

Что и доказываетъ 1-ое свойство дополнительнаго члена.

5-го Мая 1883 года.

Сообщенія. 1883.



Протоколъ засѣданія 4-го апрѣля.

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, М. О. Ковальскій, М. С. Косенко, А. В. Маевскій, Г. В. Левицкій, А. А. Ключниковъ, Н. В. Проскурниковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. Г. секретарь доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

- 1) Mathesis, №№ 1, 2 et 3, 1883.
- 2) Bulletin de la société mathématique de France. T. XI, № 1 (1883).
- 3) Киевскія университетскія извѣстія, № 2-й, февраль (1883).

Книги эти переданы г. бібліотекарю общества.

2. В. П. Алексѣевскій сообщилъ свою работу подъ заглавіемъ — «Нѣкоторые случаи интегрируемости линейныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка».

3. П. С. Флоровъ (студентъ университета) показалъ интегрированіе уравненія, предложеннаго проф. Ковальскимъ въ засѣданіи 31 января 1883 года.

4. К. А. Андреевъ дополнилъ свое сообщеніе, сдѣланное въ предыдущемъ засѣданіи.



НѢКОТОРЫЯ ОБОБЩЕНІЯ  
 ВЪ ВОПРОСѢ О РАЗЛОЖЕНІИ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ПО  
 ФОРМУЛѢ, ПРЕДЛОЖЕННОЙ П. Л. ЧЕВЫШЕВЫМЪ<sup>1</sup>.

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ статьѣ подъ заглавіемъ «Нѣсколько словъ и т. д.», помѣщенной нами въ предыдущей статьѣ настоящаго сборника и составляющей, собственно говоря, наскоро набросанную замѣтку по поводу двухъ соотношеній, появившихся передъ тѣмъ въ печати, мы вывели весьма простое тождество, изъ котораго оба эти соотношенія получаются какъ частные случаи<sup>2</sup>. Тождество это, обозначенное въ названной статьѣ номеромъ (I), можетъ быть представлено въ видѣ:

<sup>1</sup> Краткое извлеченіе содержанія этой статьи было сообщено на VII съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Одессѣ 25 августа настоящаго года.

<sup>2</sup> Одно изъ этихъ соотношеній мы назвали теоремой Имшенецкаго, полагая что оно было предложено имъ впервые. Оказывается, однако, что та же самая зависимость была доказана В. Я. Буняковскимъ еще въ 1859 году въ мемуарѣ «Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies». (Mém. de l'Ac. de S. Pétr. VII sér., T. I, № 9). Объ этомъ послѣднемъ обстоятельстве уведомляетъ насъ самъ В. Г. Имшенецкій, выражая сожалѣніе, что вовлекъ насъ въ невольную ошибку тѣмъ, что, не бывши знакомъ, при составленіи своей статьи, съ мемуаромъ В. Я. Буняковскаго, не цитировалъ этого мемуара. Пользуемся первымъ представившимся случаемъ, чтобы исправить печатно эту ошибку.

Въ концѣ настоящей статьи читатель найдетъ исправленными нѣкоторыя другія погрѣшности, допущенныя нами, съ сожалѣніемъ, въ предыдущей статьѣ вследствие поспѣшности ея редактированія.







Произведя здѣсь всевозможныя перемѣщенія буквъ  $x, y, \dots, v$  и взявши сумму полученныхъ такимъ образомъ  $(n+1)!$  равныхъ кратныхъ интеграловъ, будемъ имѣть, что при сложении интегрируемыхъ функций определитель

$$\begin{vmatrix} f_0(x), f_0(y) \dots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \dots f_1(v) \\ \dots \\ f_n(x), f_n(y) \dots f_n(v) \end{vmatrix}$$

есть общій множитель всехъ слагаемыхъ, а многочленъ, на него умножаемый, есть не что иное какъ определитель

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(x), \Phi_0(y) \dots \Phi_0(v) \\ \Phi_1(x), \Phi_1(y) \dots \Phi_1(v) \\ \dots \\ \Phi_n(x), \Phi_n(y) \dots \Phi_n(v) \end{vmatrix}$$

Это и убѣждаетъ насъ въ справедливости тождества (А).

Функции  $f_0, f_1, \dots, \Phi_0, \Phi_1, \dots$  предполагались до сихъ поръ совершенно произвольными. Если положимъ

$$f_0 = f, \Phi_0 = \theta \Phi$$

$$f_1 = \frac{\Phi_1}{\theta} = \psi_0, f_2 = \frac{\Phi_2}{\theta} = \psi_1, \dots, f_n = \frac{\Phi_n}{\theta} = \psi_{n-1}$$

и допустимъ, что функции  $\psi_0, \psi_1, \dots$  удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k \psi_l \theta dx = 0$$



при всякихъ различныхъ между собою  $k$  и  $l$ , то первая часть равенства (А) можетъ быть представлена въ видѣ произведенія

$$\int \Psi_0^2 \theta dx \int \Psi_1^2 \theta dx \dots \int \Psi_{n-1}^2 \theta dx \cdot R_n,$$

гдѣ

$$R_n = \int f \varphi \theta dx - \frac{\int f \Psi_0 \theta dx \int \varphi \Psi_0 \theta dx}{\int \Psi_0^2 \theta dx} - \dots$$

$$\dots - \frac{\int f \Psi_{n-1} \theta dx \int \varphi \Psi_{n-1} \theta dx}{\int \Psi_{n-1}^2 \theta dx}$$

есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ<sup>1</sup>.

Тождествомъ (А) можно, слѣдовательно, воспользоваться для вывода общаго вида и свойствъ этого дополнительнаго члена, подобно тому какъ это въ частности мы уже сдѣлали въ нашей предыдущей статьѣ по отношенію къ дополнительному члену

$$R_1 = \int f \varphi \theta dx - \frac{\int f \Psi_0 \theta dx \int \varphi \Psi_0 \theta dx}{\int \Psi_0^2 \theta dx},$$

гдѣ  $\Psi_0 = \text{const.}$

Профессоръ К. А. Поссе посвятилъ этому вопросу свою статью, напечатанную выше, и въ ней вполне его разрѣшаетъ въ предположеніи, что функціи  $\Psi_0, \Psi_1, \dots$  суть цѣлыя алгебраическія, находящіяся въ известной связи съ интеграломъ

$$\int_a^b \frac{\theta(z) dz}{x-z},$$

указанной самимъ П. Л. Чебышевымъ.

<sup>1</sup> См. «Сообщенія харьк. матем. общ.» за 1882 г. стр. 94.



Настоящее наше исследование преслѣдуетъ главнымъ образомъ ту же цѣль какъ и статья К. А. Поссе, но, будучи основано на началахъ нѣсколько болѣе широкихъ, оно приводитъ и къ результатамъ сравнительно болѣе общимъ. По этому только мы и сочли не лишнимъ публиковать наше исследование, послѣ того какъ исследование К. А. Поссе уже напечатано. Къ тому же настоящая статья примыкаетъ, такъ сказать, непосредственно къ нашей предыдущей статьѣ («Нѣсколько словъ и т. д.»), составляя и по содержанию, и по методу, ея естественное продолженіе и содержа дальнѣйшее развитіе мыслей, нами тамъ уже заявленныхъ (въ парагр. 1-мъ и 4-мъ)<sup>1</sup>.

§ 2.

Полагая, какъ было сказано, въ равенствѣ (А)

$$f_0 = f, \varphi_0 = \theta \varphi$$

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\theta} = \psi_0, f_2 = \frac{\varphi_2}{\theta} = \psi_1, \dots, f_n = \frac{\varphi_n}{\theta} = \psi_{n-1},$$

гдѣ  $\theta$  какая нибудь функція, дадимъ этому равенству видъ

$$\left. \begin{array}{l} \int f \varphi \theta dx, \int f \varphi_0 \theta dx, \dots, \int f \varphi_{n-1} \theta dx \\ \int \varphi \psi_0 \theta dx, \int \varphi_0 \psi_1 \theta dx, \dots, \int \varphi_{n-1} \psi_n \theta dx \\ \int \varphi \psi_{n-1} \theta dx, \int \psi_0 \psi_{n-1} \theta dx, \dots, \int \psi_{n-1}^2 \theta dx \end{array} \right\} \text{(B)}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \int^{(n+1)} P \cdot Q \cdot \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv$$

Основная мысль, обуславливающая, можно сказать, успѣхъ рѣшенія занимающаго насъ вопроса, есть мысль представить дополнительный членъ въ видѣ кратнаго интеграла отъ произведенія двухъ функцій, зависящихъ отдѣльно отъ функцій  $f$  и  $\varphi$ . Изъ сказаннаго уже видно, что мы руководимся этой мыслью



гдѣ для краткости чрезъ  $P$  и  $Q$  обозначены опредѣлители

$$\begin{vmatrix} f(x) & , & f(y) & \dots & f(v) \\ \psi_0(x) & , & \psi_0(y) & \dots & \psi_0(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x) & , & \psi_{n-1}(y) & \dots & \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \phi(x) & , & \phi(y) & \dots & \phi(v) \\ \psi_0(x) & , & \psi_0(y) & \dots & \psi_0(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x) & , & \psi_{n-1}(y) & \dots & \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix}$$

Возьмемъ еще опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x) & , & \lambda_0(y) & \dots & \lambda_0(v) \\ \lambda_1(x) & , & \lambda_1(y) & \dots & \lambda_1(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(x) & , & \lambda_n(y) & \dots & \lambda_n(v) \end{vmatrix} = L$$

и будемъ предполагать во всемъ слѣдующемъ, что функции

$$f, \phi, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

суть конечныя и непрерывныя въ предѣлахъ интеграціи  $a$  и  $b$ , а функция  $\theta$  не мѣняетъ своего знака въ этихъ предѣлахъ.

Если во второй части равенства (B) умножимъ и раздѣлимъ интегрируемую функцию на  $L^2$  и обозначимъ для краткости чрезъ  $\Delta$  опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, то будемъ имѣть

также какъ и К. А. Поссе. Но мы проводили уже эту мысль, и притомъ по тому же, такъ сказать, плану, какъ и теперь, еще въ предыдущей нашей статьѣ хотя и въ примѣненіи только къ частному рѣшенію.

Замѣтимъ кстати, что, цитируя эту статью, К. А. Поссе не совсемъ вѣрно замѣчаетъ, что въ ней дано выраженіе дополнительнаго члена для частнаго случая:  $n=1, \theta=1$ . О функции  $\theta$  у насъ никакого предположенія кромѣ неизмѣнности знака сдѣлано не было.



$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \int \frac{P}{L} \cdot \frac{Q}{L} \cdot L^2 \cdot \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv.$$

Но известно<sup>1</sup>, что, всякій разъ какъ  $u$  и  $v$  суть двѣ функціи одного переменнаго, изъ которыхъ вторая не мѣняетъ своего знака при измѣненіи переменнаго отъ  $a$  до  $b$ ,

$$\int_a^b uv dx = u_0 \int_a^b v dx$$

гдѣ  $u_0$  есть значеніе функціи  $u$  при нѣкоторомъ значеніи переменнаго, заключающемся между  $a$  и  $b$ .

Такъ какъ это свойство простаго опредѣленнаго интеграла имѣетъ, очевидно, мѣсто и для кратнаго интеграла отъ произведенія функцій нѣсколькихъ переменныхъ, то мы можемъ равенство (B) представить еще въ такомъ видѣ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{P_0}{L_0} \cdot \frac{Q_0}{L_0} \int L^2 \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv, \quad (C)$$

гдѣ  $P_0, Q_0, L_0$  суть значенія функцій  $P, Q, L$  при нѣкоторыхъ значеніяхъ переменныхъ  $x, y, \dots, v$ , заключающихся въ предѣлахъ интеграціи, напр. при  $x = x_0, y = y_0, \dots, v = v_0$ .

§ 3.

Функціи  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , входящія въ составъ определителя  $L$ , суть совершенно произвольныя. Въ видахъ воспользоваться выборомъ этихъ функцій для упрощенія послѣдняго равенства подвергнемъ въ немъ преобразованію отношенія  $\frac{P_0}{L_0}$  и  $\frac{Q_0}{L_0}$ .

<sup>1</sup> См. Serret (J. A.) — «Cours de calcul diff. et int.» Т. II, 1868, p. 94, n° 469 (Théorème IV).



Обозначивъ чрезъ  $m$  величину перваго изъ этихъ отношеній, будемъ имѣть

$$P_0 - mL_0 = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f(y_0), \dots, f(v_0) \\ \psi_0(x_0), \psi_0(y_0), \dots, \psi_0(v_0) \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}(y_0), \dots, \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0(y_0), \dots, \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1(y_0), \dots, \lambda_1(v_0) \\ \dots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n(y_0), \dots, \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Если въ обоихъ опредѣлителяхъ, входящихъ въ это тождество, замѣнимъ постоянное  $y_0$  переменною величиною  $y$ , то вся его первая часть будетъ представлять такую функцію, которая обращается въ нуль при  $y = x_0$  и при  $y = y_0$ . Такъ какъ сверхъ того эта функція есть конечная и непрерывная, то ея производная должна обращаться въ нуль при некоторомъ значеніи переменнаго  $y = y_1$ , заключающемся между  $x_0$  и  $y_0$ , а, слѣдовательно, и подално между  $a$  и  $b$ . Такимъ образомъ получается тождество

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f'(y_1), \dots, f(v_0) \\ \psi_0(x_0), \psi_0(y_1), \dots, \psi_0(v_0) \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}(y_1), \dots, \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0'(y_1), \dots, \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1'(y_1), \dots, \lambda_1(v_0) \\ \dots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n'(y_1), \dots, \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Прилагая къ этому послѣднему равенству тѣ же самыя разсужденія два раза относительно переменнаго, входящаго въ третій столбцы опредѣлителей  $P$  и  $L$ , за-тѣмъ три раза относительно переменнаго, входящаго въ четвертые столбцы, и т.д., мы безъ труда придемъ къ заключенію, что слѣдствіемъ тождества

$$P_0 - mL_0 = 0$$



должно быть тождество

$$P_1 - mL_1 = 0$$

и потому

$$\frac{P_0}{L_0} = \frac{P_1}{L_1}$$

гдѣ  $P_1$  и  $L_1$  суть сокращенныя обозначенія опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f'(y_1), f''(z_2), \dots, f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0), \psi_0'(y_1), \psi_0''(z_2), \dots, \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}'(y_1), \psi_{n-1}''(z_2), \dots, \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0'(y_1), \lambda_0''(z_2), \dots, \lambda_0^{(n)}(v_n) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1'(y_1), \lambda_1''(z_2), \dots, \lambda_1^{(n)}(v_n) \\ \dots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n'(y_1), \lambda_n''(z_2), \dots, \lambda_n^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

въ которыхъ  $x_0, y_1, z_2, \dots, v_n$  означаютъ нѣкоторыя частныя величины переменныхъ  $x, y, z, \dots, v$ , заключающіяся между  $a$  и  $b$ .

Подобнымъ же образомъ слѣдуетъ преобразовать и отношеніе

$$\frac{Q_0}{L_0}$$

Вслѣдствіе такого преобразованія равенство (С) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{P_1}{L_1} \cdot \frac{Q_1}{L_1} \cdot \int \dots L^2 \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv (D)$$

гдѣ  $P_1$  и  $L_1$  имѣютъ указанная сейчасъ значенія и гдѣ  $Q_1$  означаетъ также опредѣлителя



$$\begin{vmatrix} \varphi(x_0) & \varphi'(y_1) & \varphi''(z_2) & \dots & \varphi^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0) & \psi_0'(y_1) & \psi_0''(z_2) & \dots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0) & \psi_{n-1}'(y_1) & \psi_{n-1}''(z_2) & \dots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

Нужно замѣтить, что постоянныя  $y_1, z_2, \dots, v_n$  имѣютъ въ выраженіи для  $Q_1$ , (вообще говоря,) другія величины, чѣмъ въ выраженіи для  $P_1$ , но заключаются также между  $a$  и  $b$ .

§ 4.

Положимъ теперь, что

$$\lambda_0(x) = 1, \lambda_1(x) = x, \lambda_2(x) = x^2, \dots, \lambda_n(x) = x^n.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & y & z & \dots & v \\ x^2 & y^2 & z^2 & \dots & v^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & y^n & z^n & \dots & v^n \end{vmatrix}$$

$$L_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_0^2 & 2y_1 & 2! & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & ny_1^{n-1} & n(n-1)z_2^{n-2} & \dots & n! \end{vmatrix}$$

$$L_1 = 2!3!\dots(n-1)!n! = (n!)!$$



Кромѣ того, если положимъ

$$(I) \quad \begin{vmatrix} \int \theta dx & \int x\theta dx & \dots & \int x^n \theta dx \\ \int x\theta dx & \int x^2\theta dx & \dots & \int x^{n+1}\theta dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int x^n \theta dx & \int x^{n+1}\theta dx & \dots & \int x^{2n}\theta dx \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

то на основаніи общаго предложенія, доказаннаго въ первомъ параграфѣ (равенства А), будемъ имѣть

$$\Delta_n = \frac{1}{(n+1)!} \int L^{(n+1)} \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv.$$

Вслѣдствіе этого равенство (D) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{[(n!)!]^2} \cdot P_1 \cdot Q_1 \cdot \Delta_n \quad (E)$$

и въ этомъ видѣ оно представляетъ любопытное соотношеніе, замѣчательное своею общностью, а вмѣстѣ съ тѣмъ и общностью получаемыхъ изъ него слѣдствій.

Было уже сказано, что если предположить, что функціи  $\psi_0, \psi_1, \dots$  удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k \psi_l \theta dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою  $k$  и  $l$ , то

$$\Delta = \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx \cdot R_n$$

гдѣ  $R_n$  есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ.



Изъ равенства (E) находимъ поэтому

$$R_n = \frac{P_1 \cdot Q_1 \cdot \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_n^2 \theta dx} \quad (I)$$

выраженіе, въ которомъ функціи  $\psi_0, \psi_1, \dots$  не подчинены никакимъ другимъ условіямъ кромѣ сейчасъ указаннаго и могутъ быть даже не алгебраическія.

Изъ этого выраженія мы убѣждаемся, напр., въ томъ, что въ случаѣ, когда функція  $\theta$  остается положительною въ предѣлахъ интеграціи  $a$  и  $b > a$ , дополнительный членъ  $R_n$  имѣетъ такой же знакъ какъ произведеніе трехъ опредѣлителей,  $P_1, Q_1$  и  $\Delta_n$ , изъ которыхъ два первые зависятъ послѣдовательно отъ функцій  $f$  и  $\varphi$ , а послѣдній вовсе отъ этихъ функцій не зависитъ. Если же  $\theta$  остается въ предѣлахъ интеграціи отрицательною, то  $R_n$  будетъ имѣть такой-же знакъ какъ это произведеніе лишь тогда, когда  $n$  четное, и противоположный знакъ при  $n$  нечетномъ.

§ 5.

Обратимъ особенное вниманіе на случай, когда  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  суть цѣлыя функціи, степени которыхъ обозначаются указателями, такъ что вообще  $\psi_k$  есть многочленъ  $k$ -ой степени. Въ этомъ случаѣ кромѣ условій

$$\int \psi_k \psi_l \theta dx = 0 \quad (\alpha)$$

имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$\frac{d^{k+1} \psi}{dx^{k+1}} = 0 \quad (\beta)$$

и

$$\frac{d^k \psi_k}{dx^k} \geq 0 \quad (\gamma)$$

каково бы ни было  $k$ .



Изъ условий (β) получаемъ

$$\psi_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n, \quad (1)$$

гдѣ  $c_0, c_1, \dots, c_n$  суть постоянныя, и потому на основаніи условій (α) будемъ имѣть

$$\begin{aligned} c_0 \int \psi_0 \theta dx + c_1 \int \psi_0 x \theta dx + \dots + c_n \int \psi_0 x^n \theta dx &= 0 \\ c_0 \int \psi_1 \theta dx + c_1 \int \psi_1 x \theta dx + \dots + c_n \int \psi_1 x^n \theta dx &= 0 \\ \dots &= 0 \\ \dots &= 0 \\ c_0 \int \psi_{n-1} \theta dx + c_1 \int \psi_{n-1} x \theta dx + \dots + c_n \int \psi_{n-1} x^n \theta dx &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда же, принимая во вниманіе условія (γ), получаемъ слѣдующія  $n$  равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} c_0 \int \theta dx + c_1 \int x \theta dx + \dots + c_n \int x^n \theta dx &= 0 \\ c_0 \int x \theta dx + c_1 \int x^2 \theta dx + \dots + c_n \int x^{n+1} \theta dx &= 0 \\ \dots &= 0 \\ c_0 \int x^{n-1} \theta dx + c_1 \int x^n \theta dx + \dots + c_n \int x^{2n-1} \theta dx &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

изъ которыхъ, какъ изъ линейныхъ и однородныхъ уравненій относительно  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , находимъ величины пропорціональныя этимъ постояннымъ. Внеся затѣмъ эти величины въ предыдущее выраженіе для  $\psi_n$  или, другими словами, исключая  $c_0, c_1, \dots, c_n$  изъ уравненій (1) и (2), находимъ

$$\psi_n = M_n \begin{vmatrix} \int \theta dx & \int x \theta dx & \dots & \int x^n \theta dx \\ \int x \theta dx & \int x^2 \theta dx & \dots & \int x^{n+1} \theta dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int x^{n-1} \theta dx & \int x^n \theta dx & \dots & \int x^{2n-1} \theta dx \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (3)$$



гдѣ  $M_n$  есть неопредѣленный постоянный множитель.

Такимъ образомъ видимъ, что условіями  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(\gamma)$  каждая изъ функций  $\psi_0, \psi_1, \dots$  опредѣляется съ точностью до постоянного множителя.

Изъ выраженія (3) получаютъ непосредственно слѣдующія соотношенія, которыми намъ придется воспользоваться

$$\int \psi_n x^{n\theta} dx = M_n \Delta_n \quad (4)$$

и 
$$\int \psi_n x^k \theta dx = 0,$$

гдѣ  $k$  есть цѣлое положительно число меньшее  $n$ .

Слѣдовательно

$$\int \psi_n^2 \theta dx = M_n \Delta_{n-1} \int \psi_n x^n \theta dx. \quad (5)$$

Исключая же  $M_n$  изъ (4) и (5), находимъ

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots \frac{(\int \psi_n x^n \theta dx)^2}{\int \psi_n^2 \theta dx} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (6)$$

Далѣе, продифференцировавъ  $n$  разъ выраженіе (3), получимъ

$$\frac{d^n \psi_n}{dx^n} = n! M_n \Delta_{n-1}$$

и исключивъ  $M_n$  при помощи равенства (4), будемъ имѣть

$$\frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{\frac{d^n \psi_n}{dx^n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad (7)$$

Наконецъ, возведя въ квадратъ обѣ части этого послѣдняго равенства и раздѣливъ полученное равенство почленно на равенство (6), получимъ соотношеніе



$$(3) \quad \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} = \frac{\Delta^n}{(n!)^2} \cdot \frac{\Delta^n}{\Delta_{n-1}} \quad (8)$$

§ 6.

При условіяхъ (3) опредѣлители  $P_1$  и  $Q_1$ , входящіе въ формулу (I), принимаютъ также весьма простое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли (см. 3 парагр.)

$$P_1 = \begin{vmatrix} f(x_0) & , & f'(y_1) & , & f''(z_2) & \dots & f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0) & , & \psi_0'(y_1) & , & \psi_0''(z_2) & \dots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0) & , & \psi_{n-1}'(y_1) & , & \psi_{n-1}''(z_2) & \dots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

Перемѣстивши строки этого опредѣлителя такъ, чтобы порядокъ ихъ не нарушался и первая строка сдѣлалась послѣднею, получимъ, принимая во вниманіе условія (3),

$$P_1 = (-1)^n \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & , & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1(x_0) & , & \psi_1'(y_1) & , & 0 & \dots & 0 \\ \psi_2(x_0) & , & \psi_2'(y_1) & , & \psi_2''(z_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0) & , & \psi_{n-1}'(y_1) & , & \psi_{n-1}''(z_2) & \dots & 0 \\ f(x_0) & , & f'(y_1) & , & f''(z_2) & \dots & f^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

или

$$P_1 = (-1)^n \psi_0(x_0) \psi_1'(y_1) \psi_2''(z_2) \dots f^{(n)}(v_n)$$

или



$$P_1 = (-1)^n \psi_0 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}} f^{(n)}(\xi),$$

гдѣ  $\psi_0, \frac{d\psi_1}{dx}, \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \dots$  суть постоянныя, т. е. независящія отъ аргументовъ  $x_0, y_1, z_2 \dots$ , а  $\xi$  поставлено вмѣсто  $v_n$  и означаетъ нѣкоторую величину, заключающуюся между  $a$  и  $b$ .

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$Q_1 = (-1)^n \psi_0 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}} \varphi^{(n)}(\eta),$$

гдѣ  $\eta$  означаетъ также величину, заключающуюся между  $a$  и  $b$ .

Если теперь найденныя выраженія для  $P_1$  и  $Q_1$  внесемъ въ равенство (I) [пар. 4], то будемъ имѣть

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \psi_0^2 \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\right)^2 \dots \left(\frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}}\right)^2 \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx},$$

что на основаніи соотношенія (8) приводится къ

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \psi_0^2 \Delta_0 \Delta_n}{(n!)^2 \Delta_{n-1} \int \psi_0^2 \theta dx}.$$

Но изъ общаго выраженія для  $\Delta_n$  (см. § 4) имѣемъ

$$\Delta_0 = \int \theta dx$$

и такъ-какъ  $\psi_0$  есть постоянное, то

$$\psi_0^2 \Delta_0 = \int \psi_0^2 \theta dx$$

вслѣдствіе чего послѣднее равенство обращается въ



$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi) \phi^{(n)}(\eta) \Delta_n}{(n!)^2 \Delta_{n-1}} \quad (\text{II})$$

Это и есть простѣйшій видъ дополнительнаго члена строки П. Л. Чебышева для случая, когда въ ней  $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \dots$  суть функции цѣлыя. Отношение  $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$  можетъ быть здѣсь замѣнено какимъ-либо изъ равныхъ ему выраженій, получаемыхъ изъ равенствъ (6), (7) и (8). Такимъ образомъ получаемъ еще слѣдующіе три вида этого дополнительнаго члена:

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \phi^{(n)}(\eta) \frac{(\int \psi_n x^n \theta dx)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta dx} \quad (\text{III})$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \phi^{(n)}(\eta) \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{n! \frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \quad (\text{IV})$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \phi^{(n)}(\eta) \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad (\text{V})$$

Изъ этихъ выраженій и видно, въ какой зависимости находится знакъ и величина разсматриваемаго дополнительнаго члена отъ свойствъ функций  $f, \phi$  и  $\theta$ . Такъ, предполагая, что  $\theta$  остается положительною величиною при измѣненіи переменнаго отъ  $a$  до  $b > a$ , будемъ имѣть, что интеграль

$$\int_a^b \psi_n^2 \theta dx$$

есть величина также положительная, а потому изъ выраженій (III) и (V) заключаемъ, что въ случаѣ, когда  $n$ -я произ-



водныя отъ функций  $f$  и  $\phi$  сохраняютъ свои знаки въ предѣлахъ  $a$  и  $b$ , знакъ дополнительнаго члена  $R_n$  такой - же какъ знакъ произведенія этихъ производныхъ. Это составляетъ второе его свойство, указанное П. Л. Чебышевымъ.

Имѣя въ виду это свойство, мы заключаемъ изъ равенства (V), что

$$[R_n] = [f^{(n)}(\xi)][\phi^{(n)}(\eta)] \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2},$$

гдѣ скобками  $[ ]$  мы означаемъ числовую величину выраженія, въ нихъ заключеннаго. Отсюда слѣдуетъ, что если  $A$  и  $B$  суть наибольшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \text{ и } \frac{d^n \phi}{dx^n},$$

то числовая величина дополнительнаго члена  $R_n$  не можетъ быть болѣе произведенія

$$A B \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad (V)$$

Это есть первое свойство дополнительнаго члена, указанное Чебышевымъ.

Въ этому можно прибавить на томъ же основаніи, что если  $\alpha$  и  $\beta$  суть наименьшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \text{ и } \frac{d^n \phi}{dx^n},$$

то  $[R_n]$  не можетъ быть менѣе

$$\alpha \beta \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad (V) \text{ и } (III)$$



Вообще же равенства (III), (IV) и (V) показывают, что дополнительный член  $R_n$  (заключается въ) предѣлахъ

$$G H \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta dx} \quad \text{и} \quad g h \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta dx}$$

или

$$G H \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{n! \frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \quad \text{и} \quad g h \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{n! \frac{d^n \psi_n}{dx^n}}$$

или

$$G H \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad \text{и} \quad g h \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^3}$$

гдѣ  $G$  и  $g$  означаютъ самую большую и самую малую изъ величинъ, получаемыхъ  $n$ -ою производною функціи  $f(x)$  при измененіи  $x$  отъ  $a$  до  $b$ ; а  $H$  и  $h$  имѣютъ такое же значеніе для функціи  $\varphi(x)$ .

N. B.

Поправка. — Обратимся, въ заключеніе, еще разъ къ нашей предыдущей статьѣ «Нѣсколько словъ и т. д.» съ цѣлью исправить нѣкоторыя вкравшіяся въ нее погрѣшности. Статья эта<sup>0</sup> вызвана была теоремою П. Л. Чебышева, состоящей въ слѣдующемъ:

*Если каждая изъ двухъ функций  $f(x)$  и  $\psi(x)$  постоянно возрастаетъ или постоянно уменьшается при измененіи переменнаго  $x$  отъ 0 до 1, то разность*



иметь всегда такой же знак, какъ произведение производныхъ  $f'(x)$  и  $\psi'(x)$  этихъ функций.

Обобщенію этой теоремы на случай, когда интегрируемая функция въ первомъ членѣ разности есть произведеніе не двухъ только, а нѣсколькихъ функций, мы посвятили одинъ изъ параграфовъ (третій), но допущенная нами неправильность въ подстановкѣ, сдѣланной на первыхъ же порахъ, повела къ искаженію и дальнѣйшихъ преобразованій. Вотъ въ чемъ должны состоять приводящія къ этому обобщенію разсужденія уже въ строго правильномъ видѣ.

Замѣняя въ неравенствѣ

$$\int_0^1 f(x)\psi(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \psi(x) dx \geq 0$$

функцию  $f(x)$  послѣдовательно чрезъ

$$f_1(x), f_1(x)f_2(x); f_1(x)f_2(x)f_3(x) \text{ и т. д.,}$$

и соотвѣтственно съ этимъ функцию  $\psi(x)$  послѣдовательно чрезъ  $f_2(x), f_3(x), f_4(x)$  и т. д., получимъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 f_1(x)f_2(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \geq 0 \\ & \int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x) dx - \int_0^1 f_1(x)f_2(x) dx \int_0^1 f_3(x) dx \geq 0 \\ & \int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x) dx - \int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x) dx \int_0^1 f_4(x) dx \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{(A)}$$



Въ силу теоремы П. Л. Чебышева условия существованія этихъ неравенствъ будутъ послѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \frac{df_1}{dx} \cdot \frac{df_2}{dx} \geq 0 \\ 0 &\leq \frac{d}{dx} (f_1 f_2) \frac{df_3}{dx} \geq 0 \\ 0 &\leq \frac{d}{dx} (f_1 f_2 \dots f_{n-1}) \frac{df_n}{dx} \geq 0 \end{aligned} \right\} (A)$$

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ, а нижніе — нижнимъ.

Если назовемъ первыя части неравенствъ (A) послѣдовательно чрезъ  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  и положимъ:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 f_3(x) dx \int_0^1 f_4(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx &= B_1 \\ \int_0^1 f_4(x) dx \int_0^1 f_5(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx &= B_2 \\ \dots &\dots \\ \int_0^1 f_n(x) dx &= B_{n-2} \\ 1 &= B_{n-1} \end{aligned} \right\} (B)$$

то будемъ, очевидно, имѣть

$$\begin{aligned} A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_{n-1} B_{n-1} &= \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx - \\ &- \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx. \end{aligned}$$



Но въ силу условій ( $\alpha$ ) и принимая во вниманіе видъ выраженій  $B_1, B_2, \dots$ , должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$A_1 B_1 \geq 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dx} \int_0^1 f_3(x) dx \int_0^1 f_4(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0$$

$$A_2 B_2 \geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} (f_1 f_2) \frac{df_3}{dx} \int_0^1 f_4(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0$$

$$A_3 B_3 \geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} (f_1 f_2 f_3) \frac{df_4}{dx} \int_0^1 f_5(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0$$

$$\dots \dots \dots \frac{d}{dx} (f_1 f_2 \dots f_{n-1}) \frac{df_n}{dx} \geq 0$$

$$A_{n-1} B_{n-1} \geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} (f_1 f_2 \dots f_{n-1}) \frac{df_n}{dx} \geq 0$$

которыя, въ случаѣ когда каждая изъ функций  $f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)$  сохраняетъ свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи, равнозначущи съ слѣдующими

$$\left. \begin{aligned} A_1 B_1 \geq 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dx} f_3 f_4 \dots f_n \geq 0 \\ A_2 B_2 \geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} (f_1 f_2) \frac{df_3}{dx} f_4 f_5 \dots f_n \geq 0 \\ A_3 B_3 \geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} (f_1 f_2 f_3) \frac{df_4}{dx} f_5 \dots f_n \geq 0 \\ \dots \dots \dots \\ A_{n-1} B_{n-1} \geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} (f_1 f_2 \dots f_{n-1}) \frac{df_n}{dx} \geq 0 \end{aligned} \right\} (\beta)$$

гдѣ также верхнимъ знакамъ соотвѣтствуютъ верхніе, а нижнимъ — нижніе.



Если положимъ, что въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только верхніе знаки, то будемъ имѣть, что разность

$$\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx$$

имѣетъ величину положительную. Когда же въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только нижніе знаки, то эта разность будетъ отрицательною.

Произведя же въ условіяхъ (β) дифференцирование произведеній, не трудно видѣть, что первыя ихъ части суть суммы такихъ произведеній, которыя получаютъ изъ произведенія  $n$  функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  чрезъ замѣну послѣдовательно каждой двухъ изъ перемножающихся функций ихъ производными. Вслѣдствіе этого убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если каждая изъ функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  не мѣняетъ своего знака при измѣненіи переменнаго отъ 0 до 1 и при томъ все отношенія  $\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}, \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}, \dots, \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$  имѣютъ одинаковые знаки, то разность

$$\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx$$

имѣетъ величину положительную, когда число отрицательныхъ функций въ рядѣ  $f_1, f_2, \dots, f_n$  есть четное, и отрицательную, когда это число есть нечетное.



Кроме сказаннаго, въ той же нашей статьѣ подлежитъ исправленію слѣдующая опечатка.

На второй страницѣ 1-го параграфа напечатано

$$\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx - \left[ \int_a^b f(x) dx \int_a^b \psi(x) dx \right]^2;$$

должно быть

$$\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx - \left[ \int_a^b f(x)\psi(x) dx \right]^2.$$

Эта же опечатка встрѣчается и на четвертой страницѣ въ равенствѣ, обозначенномъ номеромъ (III).

К. А.



...воту, отамни мерен минерале итоснуи мовоэ йонам ренен вид илии  
...акот видянуф атудуд U, длян нлсн (3) оиненяву дхива роятек  
(y, z) = U. дльк и, y, z дхива мерен дхива нлсн дху д ом  
...оя, дь рудэ ля от, итосн ренен оиненяву се атвн рн ои жом  
...атудуд U и 0 = (y, z) оиненяву дхива роятек U дхт  
...или минихали атвн атудуд U, длян нлсн ренен атвн ренен

О С О В Е Н Н Ы Й С Л У Ч А Й

...дхива роятек атвн ренен минихали или минихали атвн ренен  
...махіум'а и мініум'а функці со многими пере-  
...мьными.

И. М. Н о в и к о в а.

...алон, оиненяву дхива роятек U = (y, z) оиненяву дхива роятек  
...Пологая U = 0, получаемъ съ одной стороны, итосн ренен видянуф

Пусть дана функція  $U = f(x, y, z, \dots)$ ; допустимъ, что  
ея дифференціалъ принимаетъ такой видъ

$$dU = \Phi(x, y, z, \dots) (U_x dx + U_y dy + U_z dz + \dots), \quad (1)$$

гдѣ  $U_x, U_y, U_z, \dots$  функціи  $x, y, z, \dots$ . Тогда для то-  
го, чтобы найти значенія переменныхъ, соответствующія ма-  
хіум'у или мініум'у, нужно или рѣшить систему уравненій

$$U_x = 0, U_y = 0, U_z = 0, \dots \quad (2)$$

или же допустить

$$\Phi(x, y, z, \dots) = 0. \quad (3)$$

Изъ системы уравненій (2) мы найдемъ нѣсколько системъ  
значеній независимыхъ переменныхъ, изъ которыхъ нѣкоторыя  
могутъ удовлетворять дальнѣйшимъ условіямъ махіум'а или  
мініум'а; но кромѣ того  $d^2U$  можетъ при произвольныхъ диф-  
ференціалахъ независимыхъ переменныхъ сохранять постоянный  
знакъ для всѣхъ значеній независимыхъ переменныхъ, удовлетво-  
ряющихъ уравненію (3). Тогда  $U$  будетъ махіум или міні-



шим для непрерывной совокупности значений переменнаго, удовлетворяющих уравненію (3). Если, напр.,  $U$  будетъ функція только двухъ независимыхъ переменныхъ  $x, y$ , и слѣд.  $U = f(x, y)$  можно принять за уравненіе поверхности, то въ случаѣ, когда  $dU$  уничтожится отъ допущенія  $\varphi(x, y) = 0$  и  $d^2U$  будетъ сохранять постоянный знакъ,  $U$  будетъ имѣть maximum или minimum на протяженіи всей кривой  $\varphi(x, y) = 0$ .

Этотъ maximum или minimum отличается тѣмъ свойствомъ, что онъ есть величина постоянная для всѣхъ значений независимыхъ переменныхъ, удовлетворяющихъ уравненію (3); такъ, напр., въ случаѣ двухъ переменныхъ  $U$  величина постоянная для всѣхъ точекъ кривой  $\varphi(x, y) = 0$ . Дѣйствительно, полагая для краткости,

$$U_x dx + U_y dy + U_z dz + \dots = dL,$$

будемъ имѣть

$$(1) \quad (\dots d^2U = d\varphi dL + \varphi d(dL)). \quad (4)$$

Для всѣхъ значений переменныхъ, удовлетворяющихъ уравненію  $\varphi = 0$ , первый членъ правой части, при произвольныхъ дифференціалахъ независимыхъ переменныхъ, можетъ сохранить постоянный знакъ, но при дифференціалахъ, удовлетворяющихъ уравненію  $\varphi = 0$ , должно быть  $d\varphi = 0$  и слѣд.

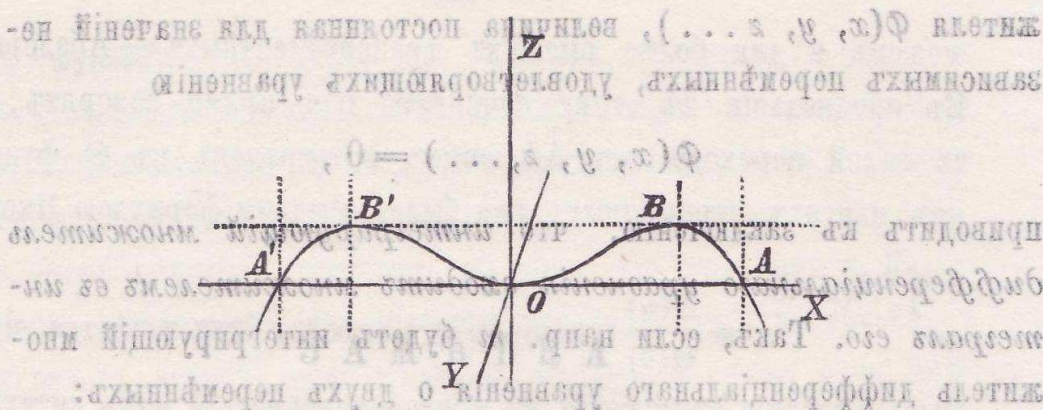
$$d^2U = 0;$$

но такъ какъ для дифференціаловъ, удовлетворяющихъ уравненію  $\varphi = 0$ , не только  $d\varphi = 0$ , но и  $d^2\varphi = 0$ ,  $d^3\varphi = 0 \dots$ , то для нихъ всѣ дальнѣйшіе дифференціалы  $U$  уничтожатся, такъ какъ всѣ они будутъ состоять изъ членовъ, содержащихъ множителями  $\varphi$  и его дифференціалы разныхъ порядковъ.

Для примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе:

$$z = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2;$$





оно выражает поверхность вращения, разръзъ которой изображенъ на прилагаемомъ чертежѣ. Изъ него имѣемъ

$$dz = 4 \left[ \frac{1}{2} - (x^2 + y^2) \right] (x dx + y dy).$$

Полагая  $dz = 0$ , получаемъ съ одной стороны  $x = y = 0$ , съ другой

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Далѣе, опуская общихъ численныхъ множителей, имѣемъ

$$d^2z = -2 (x dx + y dy)^2 + \left[ \frac{1}{2} - (x^2 + y^2) \right] (dx^2 + dy^2).$$

Вторая часть при  $x = y = 0$  дѣлается величиной положительной, именно

$$\frac{1}{2} (dx^2 + dy^2),$$

а при  $x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0$ , т. е. для всѣхъ точекъ круга, но, при произвольныхъ значеніяхъ  $dx, dy$ , она обращается въ

$$-2 (x dx + y dy)^2$$

и есть величина отрицательная; значитъ, при последнемъ условіи функція  $z$  будетъ максимумъ. Наконецъ, для значеній не только  $x$  и  $y$ , но и  $dx$  и  $dy$  удовлетворяющихъ уравненію круга, т. е. когда мы будемъ подвигаться на кругѣ, второй дифференціалъ  $z$  равенъ нулю. Можно показать, что и остальные дифференціалы также нули.

Прибавимъ здѣсь еще одно замѣчаніе. То обстоятельство, что функція, въ первомъ дифференціалѣ которой можно выдѣлить мно-



жителя  $\Phi(x, y, z, \dots)$ , величина постоянная для значений независимых переменных, удовлетворяющих уравнению

$$\Phi(x, y, z, \dots) = 0,$$

приводитъ къ заключенію, что *интегрирующій множитель дифференціального уравненія входитъ множителемъ въ интегралъ его*. Такъ, если напр.  $m$  будетъ интегрирующій множитель дифференціального уравненія о двухъ переменныхъ:

$$Mdx + Ndy = 0,$$

то интегралъ его будетъ имѣть видъ

$$П = X^m + C.$$

Дѣйствительно, продифференцировавъ это выраженіе и приравнявъ коэффициенты при  $dx$  и  $dy$  такимъ же дифференціального уравненія, помноженнаго на  $m$ , получимъ для опредѣленія функции  $X$  два уравненія въ частныхъ производныхъ, именно

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} X = M,$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} X = N,$$

которыя теоретически допускаютъ рѣшеніе.

*Примѣръ.* Интегрирующій множитель для уравненія

$$x dy - y dx = 0$$

будетъ  $\frac{1}{x^2}$ , а интегралъ  $\frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2} yx = C$ . Здѣсь функция  $X$  есть  $xy$ .

Не трудно то же доказательство распространить и на случай многихъ переменныхъ.

Для примѣра возьмемъ следующее уравненіе. Пусть  $P$  — функция отъ  $x, y, z$  и т. д. Тогда имеемъ уравненіе  $P dx + Q dy + R dz + \dots = 0$ . Если  $M$  — интегрирующій множитель, то имеемъ  $M(P dx + Q dy + R dz + \dots) = 0$ . Пусть  $X$  — функция отъ  $x, y, z$  и т. д. Тогда имеемъ  $X^m = C$ . Дифференцируя это уравненіе, получимъ  $m X^{m-1} dX = 0$ . Если  $m \neq 0$ , то  $dX = 0$ . Это означаетъ, что  $X$  — постоянная величина. Следовательно,  $X^m = C$  — это уравненіе не удовлетворяетъ условию. Поэтому  $M$  не существуетъ.



## З А М Ъ Т К А

О ВВЕДЕНІИ  $\Theta$ -ФУНКЦІЙ ВЪ ТЕОРІЮ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

*М. А. Тихомандрицкаго.*

Извѣстно, что  $\Theta$ -функціи вошли въ теорію эллиптическихъ функцій чрезъ разложеніе послѣднихъ въ безконечныя произведенія, и что потомъ Якоби на своихъ лекціяхъ показывалъ какимъ образомъ, на-оборотъ, эти разложенія и вообще вся теорія эллиптическихъ функцій можетъ быть выведена изъ свойствъ  $\Theta$ -функцій. Такое фундаментальнаго свойства значеніе  $\Theta$ -функцій для теоріи эллиптическихъ функцій побудило Эрмита въ его «*Not sur la théorie des fonctions elliptiques*», приложенной къ 6-му изданію «*Traité élémentaire de calcul differential et de calcul intégral*» Лакроа, избрать для введенія въ анализъ этихъ функцій путь обобщеній. Но если даже этотъ путь и не считать до нѣкоторой степени искусственнымъ, то все-таки нужно замѣтить, что онъ не отвѣчаетъ историческому ходу развитія науки, такъ-какъ на самомъ дѣлѣ только интегральное исчисленіе привело науку къ этимъ новымъ трансцендентнымъ; а потому очень желательно было имѣть способъ для непосредственнаго перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ  $\Theta$ -функціямъ, въ особенности послѣ того какъ Клебшъ и Горданъ показали въ своей «*Theorie der Abelschen Functionen*», что такой переходъ воз-



моженъ и для болѣе вышихъ трансцендентныхъ — Абелевыхъ. Въ предисловіи къ этому сочиненію они прямо говорятъ, что на такой переходъ отъ Абелевыхъ интеграловъ къ  $\Theta$ -функціямъ многихъ переменныхъ они были наведены формулою Якоби

$$\int_0^u Z(u) du = e \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)},$$

которую онъ вывелъ, какъ извѣстно, чрезъ

интегрированіе разложенія въ тригонометрической рядъ интеграла второго рода  $Z(u)$  и замѣну получающагося во второй части послѣ перехода отъ логарифма къ числу разложенія  $\Theta$ -функціи въ бесконечное произведеніе знакомъ этой функціи. Этимъ замѣчаніемъ своимъ они намѣтили путь для перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ  $\Theta$ -функціямъ; но никто, сколько мнѣ извѣстно, не указалъ самаго способа перехода по этому пути отъ одной трансцендентной къ другой. Касательно этого предмета я встрѣтилъ только одну замѣтку мюнхенскаго профессора Бриля въ *Mathematischen Annalen*. Bd. 17, S. 87 подъ заглавіемъ «Ueber das Additions-theorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen», въ которой онъ занимается больше выводомъ теоремы сложения для эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ и нормировкою интеграла 2-го рода, и только подъ конецъ указываетъ, что такъ какъ интегралъ третьяго рода выражается линейнымъ образомъ чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода, то этотъ послѣдній, т. е.  $\int_0^u Z(u) du$  слѣдуетъ ввести какъ новый элементъ въ теорію эллиптическихъ функцій, и такъ какъ эта функція имѣетъ бесконечности логарифмическаго характера, то слѣдуетъ положить

$$\int_0^u Z(u) du = \log \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}.$$

Но такое положеніе кажется мнѣ недостаточно мотивированнымъ и не представляетъ естественнаго перехода отъ интеграла



къ  $\Theta$ -функціи, такъ какъ эта функція появляется здѣсь не какъ результатъ аналитическихъ дѣйствій надъ интегралами 2-го рода. Пересматривая по этому поводу сочиненія Якоби и Сомова по теоріи эллиптическихъ функцій, мнѣ удалось замѣтить, что остается очень немного прибавить къ тому, что находимъ у Якоби и Сомова, чтобы имѣть естественный переходъ отъ эллиптическихъ интеграловъ второго рода къ  $\Theta$ -функціямъ, а также и къ Вейерштрассовскимъ  $\Delta_1(u)$ , причемъ само собою выступаетъ наружу то обстоятельство, что какъ тѣ, такъ и другія функціи суть только частные случаи цѣлаго безчисленнаго ряда функцій, которыя нѣмцы называютъ *doppeltmultiplicatorisch-periodische*, а Эрмитъ *fonctions intermédiaires* (см. *Briot et Bouquet Théorie des fonctions elliptiques*, 2 éd. P. 236); обѣ функціи, означенныя въ этомъ сочиненіи Брю и Буке чрезъ  $\theta$  и  $\vartheta$ , суть въ нѣкоторомъ смыслѣ предѣльныя всѣхъ этихъ *fonctions intermédiaires*.

Коротенькая замѣтка объ этомъ предметѣ, подъ заглавіемъ — «Ueber das Umkehr-problem der elliptischen Integrale», была послана мною въ іюнѣ мѣсяцѣ въ редакцію «Mathematischen Annalen», и нынѣ уже появилась въ XXII томѣ *Math. Ann.*, стр. 450. Предлагаемая нынѣ вниманію общества замѣтка посвящена тому-же предмету, но представляетъ дальнѣйшія развитія.

Въ § 53 «Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum» Якоби находимъ такую формулу

$$\frac{k^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \cdot \sin^2 am u}{1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u} =$$

$$= Z(a) + \frac{1}{2} Z(u - a) - \frac{1}{2} Z(u + a); \quad (1)$$



Это равенство *Сомовъ* (Основанія теоріи эллиптическихъ функцій. Спб. 1852, стр. 175), а зъ нимъ и *Хандриковъ* (Элементарная теорія эллиптическихъ функцій и интеграловъ съ приложеніемъ къ рѣшенію основнаго вопроса геодезіи. М. 1867, стр. 97) интегрируютъ по  $a$  отъ  $a=0$  и получаютъ слѣдующее:

$$-\frac{1}{2} \log (1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u) = \\ = \int_0^a Z(a) da + \frac{1}{2} \int_0^a Z(u-a) da - \frac{1}{2} \int_0^a Z(u+a) da, \quad (2)$$

изъ котораго, подражая Якоби (см. «De functionibus ellipticis commentatio prima et altera»; стр. 304 «*Jacobis Gesammelte Werke*». Bd. I, новое изданіе, или *Crelle Journ.* Bd. 4, стр. 371—390), съ помощію выведеннаго ими по способу Якоби равенства

$$\int_0^u Z(u) du = \log \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}, \quad (3)$$

выводятъ такое

$$\frac{\Theta(u+a)\Theta(u-a)}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am a} = \left[ \frac{\Theta(u)\Theta(a)}{\Theta(0)} \right]^2. \quad (4)$$

Но можно, на-оборотъ, изъ (2) получить (4) и изъ него уже (3), чрезъ что выигрывается натуральнѣй. переходъ къ  $\Theta$ -функціи; и для этого стоитъ только перемѣнить въ интегралахъ перемѣнную  $a$  на другую. Положимъ, во второмъ членѣ второй части равенства (2)  $u-a=w$ , тогда будетъ

$$\int_0^u Z(u-a) da = - \int_u^{u-a} Z(w) dw = \int_{u-a}^u Z(w) dw = \\ = \int_0^u Z(w) dw - \int_0^{u-a} Z(w) dw;$$

а въ третьемъ членѣ  $u+a=w$ ; тогда



$$\int_0^a Z(u+a) da = \int_a^{u+a} Z(w) dw = \int_0^{u+a} Z(w) dw - \int_0^u Z(w) dw;$$

послѣ подстановки этихъ выраженій во (2) и умноженія его на — 2 равенство это принимаетъ такой видъ:

$$\begin{aligned} & \log(1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u) = \\ & = \int_0^{u+a} Z(w) dw + \int_0^{u-a} Z(w) dw - 2 \int_0^u Z(w) dw - 2 \int_0^a Z(w) dw, \end{aligned}$$

откуда чрезъ переходъ отъ логарифма къ числу получаемъ

$$1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u = \frac{e^{\int_0^{u+a} Z(w) dw} \cdot e^{\int_0^{u-a} Z(w) dw}}{\left[ e^{\int_0^u Z(w) dw} \right]^2 \cdot \left[ e^{\int_0^a Z(w) dw} \right]^2} \quad (5)$$

Здѣсь вторая часть составлена изъ значеній функціи

$$e^{\int_0^w Z(w) dw}$$

для различныхъ значеній аргумента  $w$ . Если ввести особый знакъ для этой функціи, положивъ:

$$e^{\int_0^u Z(w) dw} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} \quad (6)$$

(чтобы значеніе функціи  $\Theta(u)$  для  $u = 0$  оставить произвольнымъ, а не  $= 1$ ), то полученный результатъ (5) такъ можемъ написать:

$$1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u = \frac{[\Theta(0)]^2 \Theta(u+a) \Theta(u-a)}{[\Theta(u)]^2 \cdot [\Theta(a)]^2} \quad (7)$$



что представляет, только въ другой формѣ, соотношение (4), тогда какъ равенство (6) служитъ *опредѣленіемъ* (definition) функции  $\Theta$ , и изъ этого равенства можетъ быть выведена вся теорія этихъ функций.

Замѣтимъ при этомъ еще, что хотя въ формулѣ (1) у Якоби  $Z(u)$  означаетъ совершенно опредѣленный интеграль 2-го рода, именно такой

$$Z(u) = \frac{F^1 E(\operatorname{am} u) - E^1 \cdot u}{F^1} = \frac{F^1 - E^1}{F^1} u - \int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \, du,$$

но мы можемъ разумѣть подъ  $Z(u)$  въ (1) самый общій интеграль 2-го рода, т. е. вида

$$Cu - \int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \, du,$$

гдѣ  $C$  какая угодно постоянная; потому что равенство (1) не нарушится отъ придачи къ нему тождества:

$$0 = \left( C - \frac{F^1 - E^1}{F^1} \right) \left( a + \frac{1}{2} (u - a) - \frac{1}{2} (u + a) \right),$$

а тогда и можно будетъ принять въ немъ

$$Z(u) = Cu - \int_0^u k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \, du. \quad (8)$$

Но тогда и наша  $\Theta$ -функция будетъ общиѣе Якобіевой, заключаая въ себѣ какъ частный случай и Якобіеву — когда  $C = \frac{F^1 - E^1}{F^1}$ , и Вейерштрассовскую  $A_1(u)$ , когда  $C = 0$  и  $\Theta(0) = 1$ .



Пусть

$$\left. \begin{aligned} \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \, du &= J_0 \\ \int_K^{K+K'i} k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \, du &= J_0' i \end{aligned} \right\} (9)$$

далее пусть

$$\left. \begin{aligned} Z(K) &= CK - J_0 = J \\ Z(K+K'i) - Z(K) &= CK'i - \int_K^{K+K'i} k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \, du = \\ &= (CK' - J_0') i = J' i; \end{aligned} \right\} (10)$$

тогда изъ (1) легко получаются, какъ извѣстно, такія равенства:

$$\left. \begin{aligned} Z(u+2K) &= Z(u) + 2J \\ Z(u+2K'i) &= Z(u) + 2J'i. \end{aligned} \right\} (11)$$

Съ помощію этихъ равенствъ найдемъ интеграль  $\int_0^{u+2K} Z(w) \, dw$  такимъ образомъ:

$$\int_0^{u+2K} Z(w) \, dw = \int_0^{2K} Z(w) \, dw + \int_{2K}^{2K+u} Z(w) \, dw; \quad (12)$$

первый членъ второй части

$$\begin{aligned} \int_0^{2K} Z(w) \, dw &= \int_0^K Z(w) \, dw + \int_K^{2K} Z(w) \, dw = \\ &= \int_0^K Z(w) \, dw - \int_K^0 Z(2K-w) \, dw = \\ &= \int_0^K (Z(2K-w) - Z(-w)) \, dw, \end{aligned}$$

или на основаніи перваго изъ (11) равенствъ:

$$\int_0^{2K} Z(w) \, dw = 2J \cdot K. \quad (13)$$



Второй членъ въ (12)

$$\int_{2K}^{2K+u} Z(w) dw = \int_0^u Z(w+2K) dw = \int_0^u Z(w) dw + 2Ju;$$

подставляя отсюда и изъ (13) въ (12), получимъ:

$$(10) \int_0^{u+2K} Z(w) dw = \int_0^u Z(w) dw + 2J(u+K). \quad (14)$$

Точно также

$$(11) \int_0^{u+2K'i} Z(w) dw = \int_0^{K+2K'i} Z(w) dw + \int_{K+2K'i}^{u+2K'i} Z(w) dw; \quad (15)$$

но

$$\int_0^{K+2K'i} Z(w) dw = \int_0^K Z(w) dw + \int_K^{K+2K'i} Z(w) dw = \\ = J + \int_0^{3K'i} Z(w+K) dw,$$

а

$$\int_0^{2K'i} Z(w+K) dw = \int_0^{K'i} J(w+K) dw + \int_{K'i}^{2K'i} Z(w+K) dw = \\ = \int_0^{K'i} Z(w+K) dw - \int_{K'i}^0 Z(2K'i-w-K) dw - \\ = \int_0^{K'i} (Z(2K'i-w-K) - Z(-w-K)) dw = 2J'i.K'i,$$

такъ что

$$\int_0^{K+2K'i} Z(w) dw = J + 2J'i.K'i; \quad (16)$$

второй же членъ въ (15)



$$\begin{aligned} \int_{K+2K'i}^{u+2K'i} Z(w) dw &= \int_K^u Z(w + 2K'i) dw = \\ &= \int_K^u Z(w) dw + 2J'i(u - K) = \\ &= - \int_u^K Z(w) dw + 2J'i(u - K). \end{aligned}$$

Подставляя отсюда и изъ (16) въ (15), получимъ

$$\int_0^{u+2K'i} Z(w) dw = \int_0^u Z(w) dw + 2J'i(u - K + K'i), \quad (17)$$

такъ какъ  $J - \int_u^K Z(w) dw = \int_0^u Z(w) dw$ .

Интегралы (14) и (17) получены нами при опредѣленномъ пути интегрированія; если измѣнить путь интегрированія, то значенія интеграловъ измѣнятся на кратное  $2\pi i$ , что слѣдуетъ изъ того, что функція  $\int_0^u Z(w) dw$  въ точкахъ  $u = 2mK + (2n + 1)K'i$  обращается въ безконечность какъ  $\log u$ , но легко можетъ быть и прямо провѣрено вычисленіемъ интеграла вокругъ такой точки; при этомъ, такъ какъ по (11)

$$\begin{aligned} Z(w + 2mK + (2n + 1)K'i) &= Z(w + K'i) + \\ &+ 2mJ + 2nJ'i, \end{aligned}$$

достаточно сдѣлать это для точки  $w = K'i$ . Интегрированіе вокругъ этой точки  $K'i$  можетъ быть сдѣлано по параллелограму, котораго эта точка есть центръ и котораго основаніе есть часть вещественной оси отъ  $w = -K$  до  $w = +K$ , а высота, часть мнимой длиною  $2K'$ . Этотъ интеграль разобьется на сумму четырехъ такимъ образомъ:



$$\begin{aligned} & \int_{-K}^{+K} Z(w) dw + \int_{+K}^{+K+2K'i} Z(w) dw + \int_{+K+2K'i}^{-K+2K'i} Z(w) dw + \\ & + \int_{-K+2K'i}^{-K} Z(w) dw = \int_{-K}^{+K} (Z(w) - Z(w + 2K'i)) dw + \\ & + \int_0^{2K'i} (Z(w+K) - Z(w-K)) dw = -2J'i \cdot 2K + \\ & + 2J \cdot 2K'i = 4(JK' - J'K)i; \end{aligned}$$

но по теоремѣ Лежандра:

$$KJ'_0 - K'J_0 = \frac{\pi}{2}; \quad (18)$$

слѣдовательно интеграль вокругъ точки  $w = K'i$  есть  $2\pi i$ , что и требовалось доказать.

На функцію  $\Theta(u)$  этотъ придаточный членъ, кратный  $2\pi i$ , не будетъ имѣть вліянія, какъ то видно изъ (6), потому что  $e^{2m\pi i} = 1$ ; слѣд. въ этой формулѣ (6) путь интегрированія отъ 0 до  $u$  остается произвольнымъ, ничѣмъ неограниченнымъ какъ только тѣмъ, чтобы не проходилъ чрезъ безконечности, а функція  $\Theta(u)$  для каждаго  $u$  получаетъ одно опредѣленное значеніе, слѣд. есть однозначная функція отъ  $u$ .

Съ помощію (15) и (17) получаютъ слѣдующія функциональныя уравненія для  $\Theta$ -функціи:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u + 2K) &= e^{2J(u+K)} \Theta(u), \\ \Theta(u + 2K'i) &= e^{2J'i(u-K+K'i)} \Theta(u), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

откуда и видно, что вообще это суть функціи *intermédiaires* Эрмита.

Если  $C$  опредѣлить такъ, чтобы было

$$J = CK - J_0 = 0,$$



что даетъ:  $C = \frac{J_0}{K}$  и слѣдовательно

$$J' = CK' - J'_0 = \frac{J_0K' - KJ'_0}{K} = -\frac{\pi}{2K},$$

на основаніи (18); то формулы (19) примутъ такой видъ

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u + 2K) &= \Theta(u) \\ \Theta(u + 2K'i) &= -e^{-\frac{\pi i}{K}(u + K'i)} \Theta(u) \end{aligned} \right\} (20)$$

или полагая вмѣстѣ съ Якоби  $e^{-\pi \frac{K'}{K}} = q$ ;

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u + 2K) &= \Theta(u) \\ \Theta(u + 2K'i) &= -\frac{1}{q} e^{-\frac{K\pi i}{K}} \Theta(u) \end{aligned} \right\} (21)$$

что представляетъ функціональныя уравненія Якобевой  $\Theta$ -функціи. Изъ этихъ уравненій онъ вывелъ въ своихъ лекціяхъ и разложеніе этихъ функцій въ тригонометрическіе ряды и безконечныя произведенія, а также теоремы сложенія и дифференціальныя уравненія эллиптическихъ функцій<sup>1</sup>.

Если опредѣлить  $C$  подъ условіемъ, чтобы было:

$$J' = CK' - J'_0 = 0,$$

что даетъ  $C = \frac{J'_0}{K'}$ , и слѣдовательно:

<sup>1</sup> Въ изданныхъ нынѣ его лекціяхъ нѣтъ разложеній въ ряды, но въ имѣющихся у меня рукописныхъ лекціяхъ эта статья разработана очень подробно, равно какъ и другіе отдѣлы этой теоріи, а также и начала ультра-эллиптическихъ интеграловъ.



$$J = CK - J_0 = \frac{KJ'_0 - K'J_0}{K} = \frac{\pi}{2K},$$

то уравненія (19) примуть такой видъ:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{(0)}(u + 2K) &= e^{\frac{\pi}{K'}(u+K)} \Theta_{(0)}(u) \\ \Theta_{(0)}(u + 2K'i) &= \Theta_{(0)}(u), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или, полагая  $q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{(0)}(u + 2K) &= \frac{1}{q'} e^{\frac{\pi u}{K'}} \Theta_{(0)}(u) \\ \Theta_{(0)}(u + 2K'i) &= \Theta_{(0)}(u). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Функции, удовлетворяющія уравненіямъ (21), и функции, удовлетворяющія уравненіямъ (23), соответствующія обращенію перваго или втораго періоднаго множителя въ единицу, суть какъ бы крайнія въ ряду безчисленнаго множества функций съ двумя періодными множителями. Послѣднія, т. е. опредѣляемыя системою уравненій (23), выведены были Якоби въ его лекціяхъ изъ первыхъ чрезъ преобразование ряда, въ который разлагаются первыя; способъ этотъ изложенъ у Эннепера (*Enneper Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle. 1876. § 17 стр. 86*).



Покажемъ теперь, какъ можно изъ (6) вывести выраженія эллиптическихъ функцій чрезъ  $\Theta$ -функцію. Для этого воспользуемся извѣстнымъ преобразованиемъ дифференціального уравненія эллиптическихъ функцій:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = k^2 \sin^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u},$$

которое можно и такъ представить:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = k^2 \sin^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am} (u + K'i). \quad (24)$$

Изъ (6) посредствомъ двукратнаго дифференцированія по взятіи сначала логариѳма находимъ:

$$Z(u) = \frac{d \log \Theta(u)}{du}, \quad (25)$$

и

$$C - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u = \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2}; \quad (26)$$

съ помощію послѣдняго изъ (24) получаемъ сперва:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = C - \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2} - \left( C - \frac{d^2 \log \Theta(u + K'i)}{du^2} \right)$$

или

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = \frac{d^2 \log \frac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)}}{du^2},$$

откуда чрезъ интегрированіе находимъ

$$\sin \operatorname{am} u = e^{cu + c'} \frac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)}, \quad (27)$$

гдѣ  $c$  и  $c'$  постоянныя интегрированія, которыя опредѣлятся слѣдующимъ образомъ.



Перемѣняя въ (27)  $u$  на  $u + K'i$  и сличая результатъ съ первоначальнымъ видомъ этого равенства, получимъ такое:

$$\frac{1}{k \sin am u} = e^{c(u+K'i)+c'} \frac{\Theta(u+2K'i)}{\Theta(u+K'i)} = \frac{1}{k} e^{-cu-c'} \frac{\Theta(u)}{\Theta(u+K'i)},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\Theta(u+2K'i) = \frac{1}{k} e^{-c(2u+K'i)-2c'} \Theta(u);$$

сличая это со вторымъ изъ (19), находимъ:

$$-\log k - c(2u + K'i) - 2c' = 2J'i(u - K + K'i) + 2m\pi i,$$

гдѣ  $m$  какое угодно цѣлое число; это уравненіе распадается на два слѣдующія:

$$-2c = 2J'i;$$

$$-\log k - cK'i - 2c' = -2J'iK - 2J'K' + 2m\pi i.$$

Изъ перваго получаемъ  $c = -J'i$ ; изъ втораго:

$$c' = -\log \sqrt{k} + \frac{1}{2} J'K' + (J'K - m\pi)i.$$

Внося это въ (27) будемъ имѣть:

$$\sin am u = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-J'i(u - K + \frac{1}{2} K'i)} \frac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)},$$

или

$$\sin am u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad (28)$$

если положить

$$H(u) = \pm e^{-J'i(u - K + \frac{1}{2} K'i)} \Theta(u + K'i), \quad (29)$$



Для Якобевых  $\Theta$ -функций  $J=0$ , и слѣд.  $J'K = -\frac{\pi}{2}$ ;  
потому эта формула принимаетъ такой видъ:

$$H(u) = \mp i e^{-\frac{\pi}{4K}(K' - 2ui)} \Theta(u + K'i)$$

или

$$H(u) = \mp i \sqrt{q} e^{\frac{u\pi i}{2K}} \Theta(u + K'i). \quad (30)$$

На-счетъ двойнаго знака въ этой послѣдней формулѣ вопросъ рѣшится такимъ образомъ.

Полагая въ (28)  $u=K$ , находимъ

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)}, \quad (31)$$

откуда выводимъ, что знаки  $H(K)$  и  $\Theta(K)$  должны быть одинакіе, если  $\sqrt{k} > 0$ , что мы принимаемъ обыкновенно. Далѣе, изъ (6) слѣдуетъ, что:

$$e^{\int_0^{K+K'i} Z(w) dw} = e^{\int_K^{K+K'i} Z(w) dw} e^{\int_0^K Z(w) dw} = \frac{\Theta(K+K'i)}{\Theta(0)},$$

откуда

$$\frac{\Theta(K+K'i)}{\Theta(K)} = e^{\int_K^{K+K'i} Z(w) dw} \quad (32)$$

Но вторая часть этого равенства есть вещественное положительное количество. Дѣйствительно:

$$\int_K^{K+K'i} Z(w) dw = \int_0^{K'i} Z(w+K) dw = i \int_0^{K'} Z(K+vi) dv; \quad (33)$$

но



$$\begin{aligned} Z(K + vi) &= C(K + vi) - \int_0^{K+vi} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw = \\ &= CK + Cvi - \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw - \int_K^{K+vi} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw = \\ &= Cvi - \int_K^{K+vi} k^2 \sin^2 \operatorname{am} w \, dw = Cvi - \int_0^{vi} k^2 \sin^2 \operatorname{am} (w + K) \, dw; \end{aligned}$$

такъ какъ  $\sin \operatorname{am} (w + K) = \frac{\cos \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w}$ ,

и:  $\cos \operatorname{am} (vi) = \frac{1}{\cos \operatorname{am} (v, k')}$

$$\Delta \operatorname{am} (vi) = \frac{\Delta \operatorname{am} (v, k')}{\cos \operatorname{am} (v, k')},$$

слѣд.  $\sin \operatorname{am} (K + vi) = \frac{1}{\Delta \operatorname{am} (v, k')}$ ,

то

$$\begin{aligned} \int_0^{vi} k^2 \sin^2 \operatorname{am} (w + K) \, dw &= i \int_0^v k^2 \sin^2 \operatorname{am} (K + vi) \, dv = \\ &= i \int_0^v \frac{k^2 \, dv}{\Delta^2 \operatorname{am} (v, k')}; \end{aligned}$$

а потому

$$Z(K + vi) = \left( Cv - \int_0^v \frac{k^2 \, dv}{\Delta^2 \operatorname{am} (v, k')} \right) i$$

и на основаніи (33)

$$\int_K^{K+K'i} Z(w) \, dw = - \int_0^{K'} \left( Cv - \int_0^v \frac{k^2 \, dv}{\Delta^2 \operatorname{am} (v, k')} \right) \, dv;$$

что очевидно вещественное, и слѣд. вторая часть (32) есть положительное количество, что и требовалось доказать.

Раздѣлимъ теперь уравненіе (30) для  $u = K$  на  $\Theta(K)$  и



воспользуемся (31) и (32); будем имѣть:

$$\sqrt{k} = \mp i^2 \sqrt[4]{q} \cdot e \int_K^{K+K'i} Z(w) dw$$

здѣсь первая часть положительная, множитель  $\sqrt[4]{q} \cdot e \int_K^{K+K'i} Z(w) dw$  также положительный по сей часъ доказанному, если еще подъ  $\sqrt[4]{q}$  разумѣть ариѳметическій корень;  $i^2 = -1$ . Отсюда слѣдуетъ, что нужно взять знакъ (—) въ (30), такъ что оконча- тельно:

$$(33) \quad H(u) = -i \sqrt[4]{q} e^{\frac{u\pi i}{2K}} \Theta(u + K'i). \quad (34)$$

Выраженія  $\cos am u$  и  $\Delta am u$  найдутся на основаніи формулы, которою мы сей часъ пользовались:

$$\sin am(u + K) = \frac{\sin am u}{\Delta am u};$$

подставляя сюда вмѣсто  $\sin am(u + K)$  его выраженіе изъ (28), будемъ имѣть:

$$\frac{\cos am u}{\Delta am u} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u + K)}{\Theta(u + K)},$$

откуда, на основаніи извѣстнаго свойства пропорцій, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos am u}{\frac{1}{\sqrt{k}} H(u + K)} &= \frac{\Delta am u}{\Theta(u + K)} = \frac{k' \sin am u}{\sqrt{\Theta^2(u + K) - \frac{1}{k} H^2(u + K)}} \\ &= \frac{k'}{\sqrt{\Theta^2(u + K) - k H^2(u + K)}} \end{aligned} \right\} (35)$$



Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{\Theta^2(u+K) - \frac{1}{k} H^2(u+K)}}{\sqrt{\frac{1}{k} \Theta^2(u+K) - H^2(u+K)}};$$

сличая это съ (28) и принимая во вниманіе, что въ этой формулѣ числитель и знаменатель не могутъ обращаться въ нуль для одного и того же значенія  $u$ , мы заключаемъ, что должно быть

$$\left. \begin{aligned} \Theta^2(u+K) - \frac{1}{k} H^2(u+K) &= H^2(u) \cdot C \\ \frac{1}{k} \Theta^2(u+K) - H^2(u+K) &= \Theta^2(u) \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

гдѣ  $C$  не зависитъ отъ  $u$ . Полагая въ обоихъ равенствахъ  $u=0$ , и принимая во вниманіе, что  $H(0)=0$ , какъ то слѣдуетъ изъ (28), мы получимъ:

$$\frac{H^2(K)}{\Theta^2(K)} = k \quad (a)$$

согласно съ тѣмъ, что мы уже имѣли, и

$$\frac{1}{k} \Theta^2(K) - H^2(K) = \Theta^2(0)C,$$

откуда съ помощію (a) получаемъ

$$C = \frac{\Theta^2(K)}{\Theta^2(0)} \cdot \frac{k^2}{k}.$$

Это равенство показываетъ, что  $C$  положительное количество, ибо таково

$$\frac{\Theta(K)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^K Z(u) du}$$



какъ легко видѣть, и  $\frac{k'^2}{k}$ . Полагая за-тѣмъ въ первомъ (39)  
 $u = -K$ , получаемъ изъ него

$$C = \frac{\Theta^2(o)}{H^2(K)}.$$

Перемножая оба выраженія  $C$ , при помощи опять (а) полу-  
 чимъ:  $C^2 = \frac{k'^2}{k^2}$  и слѣд.

$$C = \frac{k'}{k}.$$

Подставляя это въ (36), мы имъ дадимъ такой видъ:

$$\left. \begin{aligned} (1\pm) \quad & k\Theta^2(u+K) - H^2(u+K) = k'H^2(u) \\ & \Theta(u+K) - kH^2(u+K) = k'\Theta^2(u). \end{aligned} \right\} (37)$$

На основаніи послѣдняго изъ этихъ двухъ равенствъ пропор-  
 ція (35) такъ можетъ быть написана:

$$(1\pm) \quad \frac{\cos am u}{\sqrt{k} H(u+K)} = \frac{\Delta am u}{\Theta(u+K)} = \frac{\sqrt{k'}}{\Theta(u)} \quad (38)$$

откуда и получаемъ искомыя выраженія:

$$\left. \begin{aligned} \cos am u &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H(u+K)}{\Theta(u)} \\ \Delta am u &= \sqrt{k} \frac{H(u+K)}{\Theta(u)}. \end{aligned} \right\} (39)$$



Интеграль второго рода чрез  $\Theta$ -функцию выражается формулою

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

получаемою изъ (6) логарифмическимъ дифференцированиемъ. Что же касается до интеграловъ третьяго рода, то легко получить сперва выраженіе ихъ чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода. Для этого проинтегрируемъ равенство (1) по  $u$  отъ  $u = 0$ ; мы получимъ тогда:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^u \frac{k^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \cdot \sin^2 am u du}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am a} = \\ & = u Z(a) + \frac{1}{2} \int_0^u Z(u - a) du - \frac{1}{2} \int_0^u Z(u + a) du. \end{aligned} \right\} (41)$$

Намъво здѣсь мы имѣемъ интеграль третьяго рода, для котораго Якоби употребляетъ такое знакоположеніе:

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \sin^2 am u du}{1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u}; \quad (42)$$

что касается до второй части, то замѣчаемъ, что

$$\begin{aligned} \int_0^u Z(u - a) du &= \int_{-a}^{u-a} Z(w) dw = \int_0^{u-a} Z(w) dw + \int_{-a}^0 Z(w) dw = \\ &= \int_0^{u-a} Z(w) dw - \int_0^a Z(w) dw; \end{aligned}$$

$$\int_0^u Z(u + a) du = \int_a^{u+a} Z(w) dw = \int_0^{u+a} Z(w) dw - \int_0^a Z(w) dw;$$

слѣд. равенство (41) можемъ такъ представить:



$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \frac{1}{2} \int_0^{u-a} Z(w) dw - \frac{1}{2} \int_0^{u+a} Z(w) dw. \quad (43)$$

Изъ этого равенства между прочимъ прямо слѣдуетъ теорема о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ; потому что

$$\int_0^{a-u} Z(w) dw = \int_0^{u-a} Z(w) dw;$$

слѣдовательно, переставивъ въ (43)  $u$  съ  $a$  и вычитая изъ (43), получимъ

$$\Pi(u, a) - \Pi(a, u) = uZ(a) - aZ(u), \quad (44)$$

что и выражаетъ упомянутую теорему.

Подставляя теперь выраженіе  $\int_0^w Z(w) dw$  чрезъ  $\Theta$  изъ (6) въ (43), получимъ искомое выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ  $\Theta$ -функцию, именно:

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}. \quad (45)$$



(81)  $\dots \left[ \frac{1}{2} - \omega b(\omega) \Sigma^{n-1} \right] \frac{1}{2} + (\omega) \Sigma^n = (\omega, \omega) \Pi$

ПРОТОКОЛЬ ЗАСѢДАНІЯ 29-ГО МАЯ.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. О. Ковальскій, Г. В. Левицкій, И. К. Шейдтъ, А. А. Ключниковъ, А. В. Маевскій, И. Д. Линицкій, А. П. Грузинцевъ и студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. секретарь доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:
  - 1) *Mathesis* № 4.
  - 2) *Journal de mathématiques élémentaires* №№ 3 et 4.
  - 3) *Journal de mathématiques spéciales*, №№ 3 et 4.
  - 4) Математическій листокъ № 7, 8 и 9. Годъ II, 1881—1882.
  - 5) Математическій сборникъ. Т. X (1882) и I-й выпускъ XI тома.
  - 6) *Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Képler le principe de l'attraction*, par *M. J. Graindorge* (отъ автора).
  - 7) *Sur certaines formules du mouvement elliptique*, par *J. Graindorge* (отъ автора).
  - 8) *Sur le multiplicateur des équations différentielles linéaires du 2-e ordre*, par *V. G. Imschenetsky* (отъ автора).



2. *К. А. Андреевъ* доложилъ о полученіи статьи профессора *К. А. Поссе* подъ заглавіемъ: О дополнительномъ членѣ въ формулѣ *П. Л. Чебышева* для приближеннаго выраженія одного опредѣленнаго интеграла чрезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ.

3. *П. С. Флоровъ* (студентъ университета) сообщилъ о обобщенныхъ *Риккатиѣвскихъ* уравненіяхъ.

4. *В. П. Алексѣевскій* сообщилъ то же объ обобщеніяхъ уравненія *Риккати*.