# О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМЪ ЧЛЕНѢ

## ВЪ ФОРМУЛѢ П. Л. ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННАГО ВЫРАЖЕНІЯ ОДНОГО ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ЧЕРЕЗЪ ДРУГІЕ, ВЗЯТЫЕ ВЪ ТѢХЪ ЖЕ ПРЕДѢЛАХЪ.

*К. А. Поссе.*

Въ «Сообщеніяхъ харьковскаго математическаго общества» за 1882 годъ П. Л. Чебышевъ даетъ разложеніе интеграла

$$\int_a^b uv\vartheta dx\,,$$

гдѣ $u$ и $v$ произвольныя, непрерывныя въ предѣлахъ $a$ и $b$, функціи отъ $x$, $\vartheta$ — прерывная или непрерывная функція отъ $x$, сохраняющая знакъ $+$ въ тѣхъ же предѣлахъ, въ рядъ, общій членъ котораго есть

$$\frac{\int_a^b u\psi_m\vartheta dx.\int_a^b v\psi_m\vartheta dx}{\int_a^b \psi^2{}_m\vartheta dx}$$

гдѣ $\psi_m$ есть знаменатель $(m+1)$-ой подходящей дроби въ разложеніи интеграла

$$\int_a^b\frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь[1].

[1] Статья П. Л. Чебышева прислана обществу въ началѣ 1883 года и по причинѣ живаго интереса, уже возбужденнаго ея предметомъ въ литературѣ, была немедленно помѣщена въ печатавшейся тогда послѣдней тетради «Сообщеній харьк. м. о.» за 1882 г. *(Примѣч. ред.)*.

Останавливая этотъ рядъ на членѣ

$$\frac{\int_a^b u\psi_{n-1}\vartheta dx \int_a^b v\psi_{n-1}\vartheta dx}{\int_a^b \psi^2_{n-1}\vartheta dx}$$

и обозначая черезъ $R_n$ дополнительный членъ, Чебышевъ даетъ, безъ доказательства, слѣдующія свойства его:

1. Числовая величина $R_n$ не превосходитъ

$$\frac{\int_a^b \psi^2_n \vartheta dx}{\left(\frac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2} AB,$$

гдѣ $A$, $B$ суть наибольшія числовыя величины производныхъ $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ въ предѣлахъ интегрированія.

2. Если въ этихъ предѣлахъ производныя $\frac{d^n u}{dx^n}$ и $\frac{d^n v}{dx^n}$ не мѣняютъ своего знака, то $R_n$ имѣетъ одинаковый знакъ съ произведеніемъ $\frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{d^n v}{dx^n}$.

Для частнаго случая $n = 1$ и $\vartheta = 1$ выраженіе дополнительнаго члена дано и оба свойства его доказаны К. А. Андреевымъ[1]. Это выраженіе можетъ быть также легко получено изъ тождества А. Н. Коркина, публикованнаго имъ въ «Comptes rendus, T. XCVI, № 5.

Въ настоящей замѣткѣ я даю общее выраженіе дополнительнаго члена $R_n$ и доказываю оба его свойства, приведенныя выше. Во всѣхъ послѣдующихъ формулахъ мы будемъ, для простоты, опускать обозначеніе предѣловъ интеграловъ, которые всѣ берутся отъ $a$ до $b$; кромѣ того при обозначеніи различныхъ функцій отъ $x$ будемъ писать $fx$, $\varphi x$, $\vartheta x$ и т. д., опуская скобки.

[1] Въ той-же тетради «Сообщеній харьк. мат. общ.».

Относительно функціи $\psi_m x$, изображающихъ знаменатели подходящихъ дробей въ разложеніи интеграла

$$\int \frac{\vartheta z\, dz}{x - z}$$

въ непрерывную дробь, припомнимъ, что

$\psi_0 x = 1$, а $\psi_m x$ — цѣлая функція $m$-ой степени, обладающая свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ

$$\int \psi_m x\, \omega x\, \vartheta x\, dz = 0, \qquad (1)$$

гдѣ $\omega x$ есть произвольная цѣлая функція степени не выше $m-1$.

Введемъ теперь слѣдующія обозначенія:

$x_1, x_2, \ldots. x_n, x_{n+1}$ будутъ обозначать $n+1$ независимыхъ другъ отъ друга величинъ, лежащихъ въ предѣлахъ $a$ и $b$;

$$\Delta_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} \psi_{n-1} x_1, & \psi_{n-1} x_2, & \ldots. & \psi_{n-1} x_{n+1} \\ \psi_{n-2} x_1, & \psi_{n-2} x_2, & \ldots. & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_1, & \psi_1 x_2, & \ldots. & \psi_1 x_{n+1} \\ 1 & 1 & \ldots. & 1 \\ f x_1, & f x_2 & \ldots. & f x_{n+1} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$\Delta_{n-1}(\varphi)$ обозначаетъ опредѣлитель, получаемый изъ $\Delta_{n-1}(f)$ замѣною функціи $f$ функціею $\varphi$;

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1} x_1, & \psi_{n-1} x_2, & \ldots. & \psi_{n-1} x_n \\ \psi_{n-2} x_1, & \psi_{n-2} x_2, & \ldots. & \psi_{n-2} x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1 x_1 & \psi_1 x_2, & \ldots. & \psi_1 x_n \\ 1, & 1 & \ldots. & 1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$\prod_1^n \vartheta x_i dx_i = \vartheta x_1\, \vartheta x_2 \ldots. \vartheta x_n\, dx_1\, dx_2 \ldots. dx_n$$

$$J_{n-1}(f, \varphi) = \int^{(n+1)} \Delta_{n-1}(f) \Delta_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i \qquad (5)$$

гдѣ $\int^{(n+1)}$ обозначаетъ результатъ $(n+1)$-кратнаго интегрированія по всѣмъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ между предѣлами $a$ и $b$;

$$J_{n-1} = \int^{(n)} \Delta^2_{n-1} \prod_1^n \vartheta x_i \, dx_i. \tag{6}$$

Мы будемъ искать формулу приведенія для интеграла $J_{n-1}(f, \varphi)$, т. е. зависимость между $J_{n-1}(f,\varphi)$ и $J_{n-2}(f,\varphi)$; эта формула и приведетъ насъ къ формулѣ Чебышева съ дополнительнымъ членомъ.

Разлагая опредѣлители $\Delta_{n-1}(f)$ и $\Delta_{n-1}(\varphi)$ по элементамъ первой строки, находимъ

$$\Delta_{n-1}(f) = \psi_{n-1} x_1 . A_1 + \psi_{n-1} x_2 . A_2 + \ldots + \psi_{n-1} x_{n+1} . A_{n+1}$$
$$\Delta_{n-1}(\varphi) = \psi_{n-1} x_1 . B_1 + \psi_{n-1} x_2 . B_2 + \ldots + \psi_{n-1} x_{n+1} . B_{n+1},$$

гдѣ $A_i$, $B_i$ суть опредѣлители миноры, независящіе отъ элемента $x_i$.

Отсюда находимъ

$$\Delta_{n-1}(f) \cdot \Delta_{n-1}(\varphi) = \sum \psi^2_{n-1} x_i . A_i B_i +$$
$$+ \sum \psi_{n-1} x_i . \psi_{n-1} x_k . A_i B_k, \tag{7}$$

гдѣ первая сумма распространена на всѣ значенія

$$i = 1,\ 2\ \ 3, \ldots . (n+1),$$

а вторая на всѣ комбинаціи значеній

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots . (n+1)$$
$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots . (n+1),$$

за исключеніемъ комбинацій, въ которыхъ $i = k$, число членовъ первой суммы равно $n+1$, и второй $n(n+1)$; всѣ члены въ каждой изъ суммъ получаются изъ одного перестановкой буквъ: $x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$.

Умножая обѣ части равенства (7) на

$$\prod_{1}^{n+1} \delta x_i\, dx_i$$

и интегрируя $(n+1)$ разъ, находимъ, на основанiи вышесказаннаго,

$$J_{n-1}(f,\varphi) = (n+1)\int^{(n+1)} \psi^2_{n-1}\, x_1\, A_1\, B_1 \prod_{1}^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i +$$

$$+\, n(n+1)\int^{(n+1)} \psi_{n-1}\, x_1\, \psi_{n-1}\, x_2\, A_1\, B \prod_{1}^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i\,. \qquad (8)$$

$$\text{гдѣ } A_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_2\,, & \psi_{n-2}x_3\,, & \dots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1\, x_2\,, & \psi_1\, x_3\,, & \dots & \psi_1\, x_{n+1} \\ 1\,, & 1\,, & \dots & 1 \\ fx_2\,, & fx_3\,, & \dots & fx_{n+1} \end{vmatrix}$$

$B_1$ получается изъ $A_1$ замѣною $f$ на $\varphi$,

$$B_2 = -\begin{vmatrix} \psi_{n-2}x_1\,, & \psi_{n-2}x_3\,, & \dots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1\, x_1\,, & \psi_1\, x_3 & \dots & \psi_1\, x_{n+1} \\ 1\,, & 1\,, & \dots & 1 \\ \varphi x_1\,, & \varphi x_3 & \dots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Первый членъ второй части формулы (8), очевидно, приведется къ

$$(n+1)\int \psi^2{}_{n-1}\, x\, \vartheta x\, dx \,.\int^{(n)} \Delta_{n-2}(f)\, \Delta_{n-2}(\varphi) \prod_{1}^{n} \vartheta x_i\, dx_i,$$

т. е. на основанiи нашихъ обозначенiй къ

$$(n+1)\, J_{n-2}(f\varphi)\,.\int \psi^2{}_{n-1}\, x\, \vartheta x\, dx\,.$$

Второй членъ въ правой части формулы (8) мы можемъ, очевидно, переписать такъ

$$n(n+1)\int^{(n+1)}\left\{\int\psi_{n-1}x_1 B_2\,\vartheta x_1\,dx_1\int\psi_{n-1}x_2 A_1\,\vartheta x_2\,dx_2\right\}\prod_3^{(n+1)}\vartheta x_i\,dx_i$$

Замѣчая же, что

$$A_1=(-1)^{n-1}fx_2.\begin{vmatrix}\psi_{n-2}x_3, & \psi_{n-2}x_4, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_1 x_3, & \psi_1 x_4, & \ldots & \psi_1 x_{n+1}\\ 1, & 1, & \ldots & 1\end{vmatrix}+\omega x_2$$

$$\text{а } B_2=-(-1)^{n-1}\varphi x.\begin{vmatrix}\psi_{n-2}x_3, & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \psi_1 x_3, & \ldots & \psi_1 x_{n+1}\\ 1, & \ldots & 1\end{vmatrix}+\varrho x_1,$$

гдѣ $\omega x$ и $\varrho x$ суть цѣлыя функціи не выше $(n-2)$-ой степени, на основаніи свойства функцій $\psi_m x$, выражаемаго равенствомъ (1), заключаемъ, что второй членъ правой части формулы (8) приведется къ

$$-n(n+1)\int fx\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx.\int^{(n-1)}\Delta^2_{n-2}\prod_1^{n-1}\vartheta x_i dx_i$$

$$=-n(n+1)\,J_{n-2}.\int fx\,\psi_{n-1}\,x\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\psi_{n-1}\,x\,\vartheta x\,dx.$$

Поэтому формула (8) приметъ видъ

$$J_{n-1}(f,\varphi)=(n+1)\,J_{n-2}(f,\varphi).\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\,-$$

$$-\,n\,(n+1)\,J_{n-2}\int fx\psi_{n-1}\,x\vartheta x\,dx.\int\varphi x\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx$$

или $$\frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{n(n+1)\,J_{n-2}\,.\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}=$$

$$=\frac{J_{n-2}(f,\varphi)}{n\,J_{n-2}}-\frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}\,. \qquad (9)$$

Дѣлая здѣсь частное предположеніе о функціяхъ $f$ и $\varphi$, а именно:

$$fx=\varphi x=\psi_{n-1}\,x,$$

причемъ $J_{n-1}(\psi_{n-1},\psi_{n-1})$ обратится въ 0, потому что въ опредѣлителѣ $\Delta_{n-1}(\psi_{n-1})$ двѣ строки будутъ тождественныя, а $J_{n-2}(\psi_{n-1},\psi_{n-1})$ обратится въ $J_{n-1}$, потому что

$$\Delta^2_{n-2}(\psi_{n-1})=\Delta^2_{n-2},$$

находимъ

$$J_{n-1}=n\,J_{n-2}\,.\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx \qquad (10)$$

и формула (9) приметъ видъ

$$\frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}=\frac{J_{n-2}(f,\varphi)}{n\,J_{n-2}}-\frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int\psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}\,. \qquad (11)$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $n=2,\ 3,\ldots\ldots n$, складывая результаты и замѣчая, что

$$\frac{J_0(f,\varphi)}{2\,J_0}=\frac{{}^1\!/_2\iint(fx_2-fx_1)\,(\varphi x_2-\varphi x_1)\,\vartheta x_1\,\vartheta x_2\,dx_1\,dx_2}{\int\vartheta x\,dx}=$$

$$=\int fx\,\varphi x\,\vartheta x\,dx-\frac{\int fx\,\vartheta x\,dx\,.\int\varphi x\,\vartheta x\,dx}{\int\vartheta x\,dx},$$

получаемъ окончательно формулу

$$\int fx\,\varphi x\,\vartheta x\,dx = \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\int fx\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx \,.\, \int \varphi x\,\psi_{n-1}x\,\vartheta x\,dx}{\int \psi^2_{n-1}x\,\vartheta x\,dx} +$$

$$+ \frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}\,. \qquad (12)$$

Это и есть формула Чебышова съ дополнительнымъ членомъ

$$R_n = \frac{J_{n-1}(f,\varphi)}{(n+1)\,J_{n-1}}\,. \qquad (13)$$

Приступая къ доказательству свойствъ $R_n$, мы сперва упростимъ выраженіе его, пользуясь извѣстными свойствами опредѣлителей.

Разсматривая выраженія опредѣлителей $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ и $\Delta_{n-1}$, входящихъ подъ знаки интеграловъ $J_{n-1}(f,\varphi)$ и $J_{n-1}$, и замѣчая, что

$$\psi_{n-1}x = c_{n-1}x^{n-1} + \omega x,$$

гдѣ $\omega x$ цѣлая функція не выше $(n-2)$-ой степени, мы можемъ представить $\psi_{n-1}x$ въ видѣ

$$\psi_{n-1}x = c_{n-1}x^{n-1} + a_0\psi_{n-2}x + a_1\psi_{n-3}x + \ldots + a_{n-2},$$

гдѣ $a_0, a_1 \ldots a_{n-2}$ отъ $x$ не зависитъ; отсюда, по извѣстному свойству опредѣлителей, заключаемъ, что въ выраженіяхъ $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ мы можемъ замѣнить элементы первой строки

$$\psi_{n-1}x_1\,,\ \psi_{n-1}x_2\,,\ \ldots\ldots\ \psi_{n-1}x_{n+1}$$

элементами

$$c_{n-1}x_1^{\,n-1},\ c_{n-1}x_2^{\,n-1},\ \ldots\ldots\ c_{n-1}x_{n+1}^{\,n-1}.$$

Точно также убѣждаемся, что вообще строку

$$\psi_k x_1\,,\ \psi_k x_2\,,\ \ldots\ldots\ \psi_k x_{n+1}$$

можемъ замѣнить строкою

$$c_k x_1^{\,k}\,,\ c_k x_2^{\,k}\,,\ \ldots\ldots\ c_k x_{n+1}^{\,k},$$

гдѣ $c_k$ есть коеффиціентъ при $x^k$ въ $\psi_k x$.

Дѣлая такое-же преобразованіе въ опредѣлителѣ $\Delta_{n-1}$ и раздѣливъ числителя и знаменателя въ выраженіи $R_n$ на постоянное количество $(c_1 c_2 \ldots . c_{n-1})^2$, находимъ для $R_n$ формулу

$$R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_{n-1}(f) D_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{(n+1)\int^{(n)} D^2_{n-1} \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i}, \tag{14}$$

гдѣ $D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & ,\ 1 & ,\ \ldots\ 1 \\ x_1 & ,\ x_2 & ,\ \ldots\ x_{n+1} \\ x_1^{\,2} & ,\ x_2^{\,2} & ,\ \ldots\ x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\,n-1} & ,\ x_2^{\,n-1} & ,\ \ldots\ x_{n+1}^{\,n-1} \\ fx_1 & ,\ fx_2 & ,\ \ldots\ fx_{n+1} \end{vmatrix}$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & ,\ 1 & ,\ \ldots .\ 1 \\ x_1 & ,\ x_2 & ,\ \ldots .\ x_n \\ x_1^{\,2}, & x_2^{\,2} & ,\ \ldots .\ x_n^{\,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\,n-1}, & x_2^{\,n-1}, & \ldots .\ x_n^{\,n-1} \end{vmatrix},$$

или иначе

$$D_{n-1} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Докажемъ теперь одно свойство опредѣлителя $D_{n-1}(f)$, которое и послужитъ для вывода свойствъ $R_n$. Свойство это выражается формулою

$$D_{n-1}(f) = (x_2 - x_1)\ldots .(x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2)\ldots .(x_{n+1} - x_n)\,\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots . n}$$

или $$D_{n-1}(f) = D_n \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2....n}, \qquad (15)$$

гдѣ $f^{(n)}(x)$ обозначаетъ $n$-ую производную отъ $fx$, а $\xi$ число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ числа

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n+1}.$$

Для доказательства замѣчаемъ, что формула (15) очевидно повѣряется въ случаѣ $n=1$, потому что

$$D_0(f) = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ fx_1, & fx_2 \end{vmatrix} = fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

гдѣ $\xi$ число среднее между $x_1$ и $x_2$.

Достаточно, слѣдовательно, убѣдиться, что если формула справедлива для какого-нибудь значенія $n$, то она будетъ справедлива и для значенія $n$ на единицу большаго.

Руководствуясь этимъ, преобразуемъ $D_{n-1}(f)$ слѣдующимъ образомъ

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & , 1, & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ x_1 & , x_2, & \ldots\ldots\ldots & x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & , x_2^{n-1} & \ldots\ldots\ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & , fx_2, & \ldots\ldots\ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & , & x_3 - x_1 & , \ldots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & , & x_3^2 - x_1^2 & , \ldots & x_{n+1}^2 - x_1^2 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & , & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & , \ldots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ fx_2 - fx_1 & , & fx_3 - fx_1 & , \ldots & fx_{n+1} - fx_1 \end{vmatrix}.$$

Раздѣляя элементы перваго столбца на $x_2 - x_1$, втораго на $x_3 - x_1$ и т. д., находимъ

$$\frac{D_{n-1}(f)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2+x_1, & x_3+x_1 & \ldots & x_{n+1}+x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}+x_1x_2^{n-3}+\ldots+x_1^{n-2}, & x_3^{n-2}+x_1x_3^{n-3}+\ldots+x_1^{n-2} & \ldots & x_{n+1}^{n-2}+x_1x_{n+1}^{n-3}+\ldots+x_1^{n-2} \\ \frac{fx_2-fx_1}{x_2-x_1}, & \frac{fx_3-fx_1}{x_3-x_1} & \ldots & \frac{fx_{n+1}-fx_1}{x_{n+1}-x_1} \end{vmatrix}$$

или обозначая $\frac{fx-fx_1}{x-x_1}$ черезъ $F(x)$

и пользуясь извѣстнымъ свойствомъ опредѣлителей, находимъ

$$\frac{D_{n-1}(f)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ x_2, & x_3, & \ldots & x_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}, & x_3^{n-2}, & \ldots & x_{n+1}^{n-2} \\ Fx_2, & Fx_3, & \ldots & Fx_{n+1} \end{vmatrix}=D_{n-2}(F).$$

Допуская справедливость формулы (15) для опредѣлителя $D_{n-2}(F)$, получимъ

$$D_{n-1}(f)=(x_2-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_n)\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\ldots(n-1)}, \quad (16)$$

гдѣ $\xi_1$ — число, лежащее въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ $x_2, x_3, \ldots x_{n+1}$.

Составляя же $(n-1)$-ую производную функціи

$$F(x)=\frac{fx-fx_1}{x-x_1}=(fx-fx_1)(x-x_1)^{-1}$$

находимъ

$$F^{(n-1)}x=(x-x_1)^{-1}f^{(n-1)}x-(n-1)(x-x_1)^{-2}f^{(n-2)}x+$$
$$+(n-1)(n-2)(x-x_1)^{-3}f^{(n-3)}x-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}1.2\ldots(n-1)(x-x_1)^{-n}(fx-fx_1)$$

$$=1.2\ldots(n-1)\,\frac{fx_1-fx-\dfrac{x_1-x}{2}f'x\quad\ldots-\dfrac{(x_1-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}x}{(x_1-x)^n}$$

$$=1.2\ldots(n-1)\frac{f^{(n)}(\varepsilon)}{1.2\ldots n},$$

гдѣ $\varepsilon$ — число, лежащее между $x_1$ и $x$,
а потому

$$\frac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\ldots(n-1)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n},$$

гдѣ $\xi$ — число лежащее между $\xi_1$ и $x_1$, т. е. въ тѣхъ-же предѣлахъ, въ которыхъ лежатъ $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

Подставляя въ формулу (16) найденное выраженіе для $\dfrac{F^{(n-1)}(\xi_1)}{1.2\ldots(n-1)}$, находимъ

$$D_{n-1}(f)=D_n\cdot\frac{f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n},$$

что и доказываетъ формулу (15).

Примѣняя ту же формулу къ $D_{n-1}(\varphi)$, находимъ, что дополнительный членъ формулы Чебышева можетъ быть написанъ въ видѣ

$$R_n=\frac{\int^{(n+1)}D_n{}^2.f^{(n)}(\xi)\,\varphi^{(n)}(\eta)\prod_1^{n+1}\vartheta x_i\,dx_i}{(n+1)\int^{(n)}D^2{}_{n-1}\prod_1^{n}\vartheta x_i\,dx_i}. \quad (17)$$

Изъ этой формулы вытекаетъ прямо второе свойство $R_n$, по которому онъ имѣетъ одинаковый знакъ съ $f^{(n)}x.\varphi^{(n)}x$, если $f^{(n)}x$ и $\varphi^{(n)}x$ не мѣняютъ знака въ предѣлахъ интегрированія.

Далѣе видимъ, что числовая величина $R_n$ не превосходитъ

$$\frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i} . AB, \qquad (18)$$

гдѣ $A$, $B$ суть наибольшія числовыя величины $f^{(n)}x$ и $\varphi^{(n)}x$ въ этихъ предѣлахъ.

Кромѣ того, если положимъ въ формулѣ (12) $Fx = \varphi x = \psi_n x$, то въ силу (1) свойства $\psi_n x$ всѣ члены второй части, кромѣ $R_n$, обратятся въ 0,

$$F^{(n)}x = \varphi^{(n)}x = 1.2\ldots n.c_n = \frac{d^n \psi_n x}{dx^n}.$$

и находимъ

$$\int \psi_n^2 x\, \vartheta x\, dx = \left(\frac{d^n \psi_n x}{dx^n}\right)^2 . \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \prod_1^{n+1} \vartheta x_i\, dx_i}{\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^{n} \vartheta x_i\, dx_i}$$

въ силу чего выраженіе (18) приметъ видъ

$$\frac{\int \psi_n^2 x\, \vartheta x\, dx}{\left(\frac{d^n \psi_n x}{dx^n}\right)^2} . AB.$$

Что и доказываетъ 1-ое свойство дополнительнаго члена.

5-го Мая 1883 года.