

ОД ПИМІПІОДЖУСЗВІ ПТЭОПІНУЭ ГЯ ЭЖ ПІМІТ П ОТООПІ ЭЖ ЛКОТЭ  
 -ОІВРОКІЯ , СВТЭ  
**НѢКОТОРЫЯ ОБОБЩЕНІЯ**  
 -ОДЖОТ ОИНОМН ПІВРУЛО ПІНТЭСР ЛЯЛЭ ЭОПІУМІКЕРІ ФДЭЭ ГЯ ОТАПІ  
 ВЪ ВОПРОСѢ О РАЗЛОЖЕНІИ ОПРЕДѢЛЕННАГО ИНТЕГРАЛА ПО  
 ФОРМУЛѢ, ПРЕДЛОЖЕННОЙ П. Л. ЧЕБЫШЕВЫМЪ<sup>1</sup>.

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ статьѣ подъ заглавіемъ «Нѣсколько словъ и т. д.», помѣщенной нами въ предыдущей статьѣ настоящаго сборника и составляющей, собственно говоря, наскоро набросанную замѣтку по поводу двухъ соотношеній, появившихся передъ тѣмъ въ печати, мы вывели весьма простое тождество, изъ котораго оба эти соотношенія получаются какъ частные случаи<sup>2</sup>. Тождество это, обозначенное въ названной статьѣ номеромъ (I), можетъ быть представлено въ видѣ:

<sup>1</sup> Краткое извлеченіе содержанія этой статьи было сообщено на VII съездѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Одессѣ 25 августа настоящаго года.

<sup>2</sup> Одно изъ этихъ соотношеній мы назвали теоремой Имшенецкаго, полагая что оно было предложено имъ впервые. Оказывается, однако, что та же самая зависимость была доказана В. Я. Буняковскимъ еще въ 1859 году въ мемуарѣ «Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies». (Mém. de l'Ac. de S. Pétr. VII sér., T. I, № 9). Объ этомъ послѣднемъ обстоятельстве уведомляетъ насъ самъ В. Г. Имшенецкій, выражая сожалѣніе, что вовлекъ насъ въ невольную ошибку тѣмъ, что, не бывши знакомъ, при составленіи своей статьи, съ мемуаромъ В. Я. Буняковскаго, не цитировалъ этого мемуара. Пользуемся первымъ представившимся случаемъ, чтобы исправить печатно эту ошибку.

Въ концѣ настоящей статьи читатель найдетъ исправленными нѣкоторыя другія погрѣшности, допущенныя нами, къ сожалѣнію, въ предыдущей статьѣ вслѣдствіе поспѣшности ея редактированія.

$$\left| \begin{array}{cc} \int f_1 f_2 dx & \int f_1 \psi_2 dx \\ \int \psi_1 f_2 dx & \int \psi_1 \psi_2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \iint \left| \begin{array}{cc} f_1(x), f_1(y) \\ \psi_1(x), \psi_1(y) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} f_2(x), f_2(y) \\ \psi_2(x), \psi_2(y) \end{array} \right| dx dy.$$

Столь же просто и теми же в сущности разсужденіями доказывается справедливость болѣе общаго тождества, включающаго въ себѣ предыдущее какъ частный случай, именно тождества

$$\left| \begin{array}{ccc} \int f_0 \Phi_0 dx & \int f_0 \Phi_1 dx & \dots \int f_0 \Phi_n dx \\ \int f_1 \Phi_0 dx & \int f_1 \Phi_1 dx & \dots \int f_1 \Phi_n dx \\ \dots & \dots & \dots \\ \int f_n \Phi_0 dx & \int f_n \Phi_1 dx & \dots \int f_n \Phi_n dx \end{array} \right| = \frac{1}{(n+1)!} \int \left| \begin{array}{cc} f_0(x), f_0(y) \dots f_0(v) & \Phi_0(x), \Phi_0(y) \dots \Phi_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \dots f_1(v) & \Phi_1(x), \Phi_1(y) \dots \Phi_1(v) \\ \dots & \dots \\ f_n(x), f_n(y) \dots f_n(v) & \Phi_n(x), \Phi_n(y) \dots \Phi_n(v) \end{array} \right| dx dy \dots dv \quad (A)$$

гдѣ всѣ интегралы суть опредѣленные съ одними и теми же постоянными предѣлами  $a$  и  $b$ , а указатель  $(n+1)$  при знакѣ интеграла означаетъ степень его кратности.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, можно, очевидно, представить въ видѣ

$$\int \left| \begin{array}{ccc} f_0(x), f_0(y) \dots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \dots f_1(v) \\ \dots \\ f_n(x), f_n(y) \dots f_n(v) \end{array} \right| \Phi_0(x) \Phi_1(y) \dots \Phi_n(v) dx dy \dots dv.$$

Произведя здѣсь всѣ возможные перемѣщенія буквъ  $x, y, \dots, v$  и взявши сумму полученныхъ такимъ образомъ  $(n+1)!$  равныхъ кратныхъ интеграловъ, будемъ имѣть, что при сложении интегрируемыхъ функций определитель

$$\begin{vmatrix} f_0(x), f_0(y) \dots f_0(v) \\ f_1(x), f_1(y) \dots f_1(v) \\ \dots \\ f_n(x), f_n(y) \dots f_n(v) \end{vmatrix}$$

есть общій множитель всѣхъ слагаемыхъ, а многочленъ, на него умножаемый, есть не что иное какъ определитель

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(x), \Phi_0(y) \dots \Phi_0(v) \\ \Phi_1(x), \Phi_1(y) \dots \Phi_1(v) \\ \dots \\ \Phi_n(x), \Phi_n(y) \dots \Phi_n(v) \end{vmatrix}$$

Это и убѣждаетъ насъ въ справедливости тождества (А).

Функции  $f_0, f_1, \dots, \Phi_0, \Phi_1, \dots$  предполагались до сихъ поръ совершенно произвольными. Если положимъ

$$f_0 = f, \Phi_0 = \theta \Phi$$

$$f_1 = \frac{\Phi_1}{\theta} = \psi_0, f_2 = \frac{\Phi_2}{\theta} = \psi_1, \dots, f_n = \frac{\Phi_n}{\theta} = \psi_{n-1}$$

и допустимъ, что функции  $\psi_0, \psi_1, \dots$  удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k \psi_l \theta dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою  $k$  и  $l$ , то первая часть равенства (А) можетъ быть представлена въ видѣ произведенія

$$\int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx \cdot R_n,$$

гдѣ

$$R_n = \int f \varphi \theta dx - \frac{\int f \psi_0 \theta dx \int \varphi \psi_0 \theta dx}{\int \psi_0^2 \theta dx} - \dots$$

$$\dots - \frac{\int f \psi_{n-1} \theta dx \int \varphi \psi_{n-1} \theta dx}{\int \psi_{n-1}^2 \theta dx}$$

есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ<sup>1</sup>.

Тождествомъ (А) можно, слѣдовательно, воспользоваться для вывода общаго вида и свойствъ этого дополнительнаго члена, подобно тому какъ это (въ частности мы) уже сдѣлали въ нашей предыдущей статьѣ по отношенію къ дополнительному члену

$$R_1 = \int f \varphi \theta dx - \frac{\int f \psi_0 \theta dx \int \varphi \psi_0 \theta dx}{\int \psi_0^2 \theta dx},$$

гдѣ  $\psi_0 = \text{const.}$

Профессоръ К. А. Поссе посвятилъ этому вопросу свою статью, напечатанную выше, и въ ней вполне его разрѣшаетъ въ предположеніи, что функціи  $\psi_0, \psi_1, \dots$  суть цѣлыя алгебраическія, находящіяся въ извѣстной связи съ интеграломъ

$$\psi = \frac{\theta}{\theta'} = \dots \psi = \frac{\theta}{\theta'} = \dots \psi = \frac{\theta}{\theta'} = \dots$$

$$\int_a^b \frac{\theta(z) dz}{x-z},$$

указанной самимъ П. Л. Чебышевымъ.

<sup>1</sup> См. «Сообщенія харьк. матем. общ.» за 1882 г. стр. 94.

Настоящее наше изслѣдованіе преслѣдуетъ главнымъ образомъ ту же цѣль какъ и статья К. А. Поссе, но, будучи основано на началахъ нѣсколько болѣе широкихъ, оно приводитъ и къ результатамъ сравнительно болѣе общимъ. По этому только мы и сочли не лишнимъ публиковать наше изслѣдованіе, послѣ того какъ изслѣдованіе К. А. Поссе уже напечатано. Къ тому же настоящая статья примыкаетъ, такъ сказать, непосредственно къ нашей предыдущей статьѣ («Нѣсколько словъ и т. д.»), составляя и по содержанію, и по методу, ея естественное продолженіе и содержа дальнѣйшее развитіе мыслей, нами тамъ уже заявленныхъ (въ парагр. 1-мъ и 4-мъ)<sup>1</sup>.

§ 2.

Полагая, какъ было сказано, въ равенствѣ (А)

$$f_0 = f, \varphi_0 = \theta \varphi$$

$$f_1 = \frac{\varphi_1}{\theta} = \psi_0, f_2 = \frac{\varphi_2}{\theta} = \psi_1, \dots, f_n = \frac{\varphi_n}{\theta} = \psi_{n-1},$$

гдѣ  $\theta$  какая нибудь функція, дадимъ этому равенству видъ

$$\left. \begin{aligned} & \int f \varphi \theta dx, \int f \psi_0 \theta dx, \dots, \int f \psi_{n-1} \theta dx \\ & \int \varphi \psi_0 \theta dx, \int \psi_0^2 \theta dx, \dots, \int \psi_0 \psi_{n-1} \theta dx \\ & \int \varphi \psi_{n-1} \theta dx, \int \psi_0 \psi_{n-1} \theta dx, \dots, \int \psi_{n-1}^2 \theta dx \end{aligned} \right\} (B)$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \int^{(n+1)} P \cdot Q \cdot \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv$$

<sup>1</sup> Основная мысль, обуславливающая, можно сказать, успѣхъ рѣшенія занимающаго насъ вопроса, есть мысль представить дополнительный членъ въ видѣ кратнаго интеграла отъ произведенія двухъ функцій, зависящихъ отдѣльно отъ функцій  $f$  и  $\varphi$ . Изъ сказаннаго уже видно, что мы руководимся этой мыслью

гдѣ для краткости чрезъ  $P$  и  $Q$  обозначены опредѣлители

$$\begin{vmatrix} f(x) & , & f(y) & \dots & f(v) \\ \psi_0(x) & , & \psi_0(y) & \dots & \psi_0(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x) & , & \psi_{n-1}(y) & \dots & \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \varphi(x) & , & \varphi(y) & \dots & \varphi(v) \\ \psi_0(x) & , & \psi_0(y) & \dots & \psi_0(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x) & , & \psi_{n-1}(y) & \dots & \psi_{n-1}(v) \end{vmatrix}$$

Возьмемъ еще опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_0(x) & , & \lambda_0(y) & \dots & \lambda_0(v) \\ \lambda_1(x) & , & \lambda_1(y) & \dots & \lambda_1(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(x) & , & \lambda_n(y) & \dots & \lambda_n(v) \end{vmatrix} = L$$

и будемъ предполагать во всемъ слѣдующемъ, что функціи

$$f, \varphi,$$

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1} \quad \text{и} \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

суть конечныя и непрерывныя въ предѣлахъ интеграціи  $a$  и  $b$ , а функція  $\theta$  не мѣняетъ своего знака въ этихъ предѣлахъ.

Если во второй части равенство (В) умножимъ и раздѣлимъ интегрируемую функцію на  $L^2$  и обозначимъ для краткости чрезъ  $\Delta$  опредѣлителя, составляющаго первую часть этого равенства, то будемъ имѣть

также какъ и К. А. Поссе. Но мы проводили уже эту мысль, и притомъ по тому же, такъ сказать, плану, какъ и теперь, еще въ предыдущей нашей статьѣ хотя и въ примѣненіи только къ частному рѣшенію.

Замѣтимъ кстати, что, цитируя эту статью, К. А. Поссе не совсѣмъ вѣрно замѣчаетъ, что въ ней дано выраженіе дополнительнаго члена для частнаго случая:  $n=1, \theta=1$ . О функціи  $\theta$  у насъ никакого предположенія кромѣ неизмѣняемости знака сдѣлано не было.

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \int \frac{P}{L} \cdot \frac{Q}{L} \cdot L^2 \cdot \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv.$$

Но известно<sup>1</sup>, что, всякій разъ какъ  $u$  и  $v$  суть двѣ функціи одного переменнаго, изъ которыхъ вторая не мѣняетъ своего знака при измѣненіи переменнаго отъ  $a$  до  $b$ ,

$$\int_a^b uv dx = u_0 \int_a^b v dx$$

гдѣ  $u_0$  есть значеніе функціи  $u$  при нѣкоторомъ значеніи переменнаго, заключающемся между  $a$  и  $b$ .

Такъ какъ это свойство простаго опредѣленнаго интеграла имѣетъ, очевидно, мѣсто и для кратнаго интеграла отъ произведенія функцій нѣсколькихъ переменныхъ, то мы можемъ равенство (В) представить еще въ такомъ видѣ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{P_0}{L_0} \cdot \frac{Q_0}{L_0} \cdot \int L^2 \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv, \quad (C)$$

гдѣ  $P_0, Q_0, L_0$  суть значенія функцій  $P, Q, L$  при нѣкоторыхъ значеніяхъ переменныхъ  $x, y, \dots, v$ , заключающихся въ предѣлахъ интеграціи, напр. при  $x = x_0, y = y_0, \dots, v = v_0$ .

### § 3.

Функціи  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , входящія въ составъ опредѣлителя  $L$ , суть совершенно произвольныя. Въ видахъ воспользоваться выборомъ этихъ функцій для упрощенія послѣдняго равенства подвергнемъ въ немъ преобразованію отношенія  $\frac{P_0}{L_0}$  и  $\frac{Q_0}{L_0}$ .

<sup>1</sup> См. Serret (J. A.) — «Cours de calcul diff. et int.» Т. II, 1868, p. 94, n° 469 (Théorème IV).

Обозначивъ чрезъ  $m$  величину перваго изъ этихъ отношеній, будемъ имѣть

$$P_0 - mL_0 = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f(y_0), \dots, f(v_0) \\ \psi_0(x_0), \psi_0(y_0), \dots, \psi_0(v_0) \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}(y_0), \dots, \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0(y_0), \dots, \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1(y_0), \dots, \lambda_1(v_0) \\ \dots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n(y_0), \dots, \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Если въ обоихъ опредѣлителяхъ, входящихъ въ это тождество, замѣнимъ постоянное  $y_0$  переменною величиною  $y$ , то вся его первая часть будетъ представлять такую функцію, которая обращается въ нуль при  $y = x_0$  и при  $y = y_0$ . Такъ какъ сверхъ того эта функція есть конечная и непрерывная, то ея производная должна обращаться въ нуль при некоторомъ значеніи переменнаго  $y = y_1$ , заключающемся между  $x_0$  и  $y_0$ , а, слѣдовательно, и подално между  $a$  и  $b$ . Такимъ образомъ получается тождество

$$\begin{vmatrix} f(x_0), f'(y_1), \dots, f(v_0) \\ \psi_0(x_0), \psi_0(y_1), \dots, \psi_0(v_0) \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}(y_1), \dots, \psi_{n-1}(v_0) \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \lambda_0(x_0), \lambda_0'(y_1), \dots, \lambda_0(v_0) \\ \lambda_1(x_0), \lambda_1'(y_1), \dots, \lambda_1(v_0) \\ \dots \\ \lambda_n(x_0), \lambda_n'(y_1), \dots, \lambda_n(v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Прилагая къ этому послѣднему равенству тѣ же самыя разсужденія два раза относительно переменнаго, входящаго въ третьи столбцы опредѣлителей  $P$  и  $L$ , за-тѣмъ три раза относительно переменнаго, входящаго въ четвертые столбцы, и т.д., мы безъ труда придемъ къ заключенію, что слѣдствіемъ тождества

$$P_0 - mL_0 = 0$$



должно быть тождество

$$\begin{vmatrix}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix}$$

и потому

$$\frac{P_0}{L_0} = \frac{P_1}{L_1}$$

гдѣ  $P_1$  и  $L_1$  суть сокращенныя обозначенія определителей

$$\begin{vmatrix}
 f(x_0), f'(y_1), f''(z_2), \dots, f^{(n)}(v_n) \\
 \psi_0(x_0), \psi_0'(y_1), \psi_0''(z_2), \dots, \psi_0^{(n)}(v_n) \\
 \dots \\
 \psi_{n-1}(x_0), \psi_{n-1}'(y_1), \psi_{n-1}''(z_2), \dots, \psi_{n-1}^{(n)}(v_n)
 \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix}
 \lambda_0(x_0), \lambda_0'(y_1), \lambda_0''(z_2), \dots, \lambda_0^{(n)}(v_n) \\
 \lambda_1(x_0), \lambda_1'(y_1), \lambda_1''(z_2), \dots, \lambda_1^{(n)}(v_n) \\
 \dots \\
 \lambda_n(x_0), \lambda_n'(y_1), \lambda_n''(z_2), \dots, \lambda_n^{(n)}(v_n)
 \end{vmatrix}$$

въ которыхъ  $x_0, y_1, z_2, \dots, v_n$  означаютъ нѣкоторыя частныя величины переменныхъ  $x, y, z, \dots, v$ , заключающіяся между  $a$  и  $b$ .

Подобнымъ же образомъ слѣдуетъ преобразовать и отношеніе

$$\frac{Q_0}{L_0}$$

Вслѣдствіе такого преобразования равенство (С) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{P_1}{L_1} \cdot \frac{Q_1}{L_1} \cdot \int \dots \int L^2 \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv (D)$$

гдѣ  $P_1$  и  $L_1$  имѣютъ указанная сейчасъ значенія и гдѣ  $Q_1$  означаетъ также определителя

$$\begin{vmatrix} \varphi(x_0) & , & \varphi'(y_1) & , & \varphi''(z_2) & , & \dots & \dots & \varphi^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0) & , & \psi_0'(y_1) & , & \psi_0''(z_2) & , & \dots & \dots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0) & , & \psi_{n-1}'(y_1) & , & \psi_{n-1}''(z_2) & , & \dots & \dots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

Нужно замѣтить, что постоянныя  $y_1, z_2, \dots, v_n$  имѣютъ въ выраженіи для  $Q_1$ , (вообще говоря,) другія величины, чѣмъ въ выраженіи для  $P_1$ , но заключаются также между  $a$  и  $b$ .

§ 4.

Положимъ теперь, что

$$\lambda_0(x) = 1, \lambda_1(x) = x, \lambda_2(x) = x^2, \dots, \lambda_n(x) = x^n.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$L = \begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 & , & \dots & , & 1 \\ x & , & y & , & z & , & \dots & , & v \\ x^2 & , & y^2 & , & z^2 & , & \dots & , & v^2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ x^n & , & y^n & , & z^n & , & \dots & , & v^n \end{vmatrix}$$

$$L_1 = \begin{vmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 \\ x_0 & , & 1 & , & 0 & , & \dots & , & 0 \\ x_0^2 & , & 2y_1 & , & 2! & , & \dots & , & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ x_0^n & , & ny_1^{n-1} & , & n(n-1)z_2^{n-2} & , & \dots & , & n! \end{vmatrix}$$

$$L_1 = 2!3!\dots(n-1)!n! = (n!)!$$

Кромѣ того, если положимъ

$$(I) \quad \begin{vmatrix} \int \theta dx & , & \int x \theta dx & , & \dots & \dots & \int x^n \theta dx \\ \int x \theta dx & , & \int x^2 \theta dx & , & \dots & \dots & \int x^{n+1} \theta dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int x^n \theta dx & , & \int x^{n+1} \theta dx & , & \dots & \dots & \int x^{2n} \theta dx \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

то на основаніи общаго предложенія, доказаннаго въ первомъ параграфѣ (равенства А), будемъ имѣть

$$\Delta_n = \frac{1}{(n+1)!} \int L^{(n+1)} \theta(x) \theta(y) \dots \theta(v) dx dy \dots dv.$$

Вслѣдствіе этого равенство (D) принимаетъ видъ

$$\Delta = \frac{1}{[(n!)!]^2} \cdot P_1 \cdot Q_1 \cdot \Delta_n \quad (E)$$

и въ этомъ видѣ оно представляетъ любопытное соотношеніе, замѣчательное своею общностью, а вмѣстѣ съ тѣмъ и общностью получаемыхъ изъ него слѣдствій.

Было уже сказано, что если предположить, что функции  $\psi_0, \psi_1, \dots$  удовлетворяютъ условію

$$\int_a^b \psi_k \psi_l \theta dx = 0$$

при всякихъ различныхъ между собою  $k$  и  $l$ , то

$$\Delta = \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx \cdot R_n$$

гдѣ  $R_n$  есть дополнительный членъ въ рядѣ, предложенномъ П. Л. Чебышевымъ.

Изъ равенства (E) находимъ поэтому

$$R_n = \frac{P_1 \cdot Q_1 \cdot \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx} \quad (I)$$

выраженіе, въ которомъ функціи  $\psi_0, \psi_1, \dots$  не подчинены никакимъ другимъ условіямъ кромѣ сейчасъ указаннаго и могутъ быть даже не алгебраическія.

Изъ этого выраженія мы убѣждаемся, напр., въ томъ, что въ случаѣ, когда функція  $\theta$  остается положительною въ предѣлахъ интеграціи  $a$  и  $b > a$ , дополнительный членъ  $R_n$  имѣетъ такой же знакъ какъ произведеніе трехъ опредѣлителей,  $P_1, Q_1$  и  $\Delta_n$ , изъ которыхъ два первые зависятъ послѣдовательно отъ функцій  $f$  и  $\Phi$ , а послѣдній вовсе отъ этихъ функцій не зависитъ. Если же  $\theta$  остается въ предѣлахъ интеграціи отрицательною, то  $R_n$  будетъ имѣть такой-же знакъ какъ это произведеніе лишь тогда, когда  $n$  четное, и противоположный знакъ при  $n$  нечетномъ.

### § 5.

Обратимъ особенное вниманіе на случай, когда  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  суть цѣлыя функціи, степени которыхъ обозначаются указателями, такъ что вообще  $\psi_k$  есть многочленъ  $k$ -ой степени. Въ этомъ случаѣ кромѣ условій

$$\int \psi_k \psi_l \theta dx = 0 \quad (\alpha)$$

имѣютъ мѣсто еще слѣдующія

$$\frac{d^{k+1} \psi}{dx^{k+1}} = 0 \quad (\beta)$$

и

$$\frac{d^k \psi_k}{dx^k} > 0 \quad (\gamma)$$

каково бы ни было  $k$ .

Изъ условій (β) получаемъ

$$\psi_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n, \quad (1)$$

гдѣ  $c_0, c_1, \dots, c_n$  суть постоянныя, и потому на основаніи условій (α) будемъ имѣть

$$c_0 \int \psi_0 \theta dx + c_1 \int \psi_0 x \theta dx + \dots + c_n \int \psi_0 x^n \theta dx = 0$$

$$c_0 \int \psi_1 \theta dx + c_1 \int \psi_1 x \theta dx + \dots + c_n \int \psi_1 x^n \theta dx = 0$$

$$\dots \dots \dots 0 = \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_0 \int \psi_{n-1} \theta dx + c_1 \int \psi_{n-1} x \theta dx + \dots + c_n \int \psi_{n-1} x^n \theta dx = 0$$

Отсюда же, принимая во вниманіе условія (γ), получаемъ слѣдующія  $n$  равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} c_0 \int \theta dx + c_1 \int x \theta dx + \dots + c_n \int x^n \theta dx &= 0 \\ c_0 \int x \theta dx + c_1 \int x^2 \theta dx + \dots + c_n \int x^{n+1} \theta dx &= 0 \\ \dots \dots \dots \Delta \dots \dots \dots & \\ \dots \dots \dots \Delta \dots \dots \dots & \\ c_0 \int x^{n-1} \theta dx + c_1 \int x^n \theta dx + \dots + c_n \int x^{2n-1} \theta dx &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

изъ которыхъ, какъ изъ линейныхъ и однородныхъ уравненій относительно  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , находимъ величины пропорціональныя этимъ постояннымъ. Внеся затѣмъ эти величины въ предыдущее выраженіе для  $\psi_n$  или, другими словами, исключая  $c_0, c_1, \dots, c_n$  изъ уравненій (1) и (2), находимъ

$$\psi_n = M_n \begin{vmatrix} \int \theta dx & \int x \theta dx & \dots & \int x^n \theta dx \\ \int x \theta dx & \int x^2 \theta dx & \dots & \int x^{n+1} \theta dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int x^{n-1} \theta dx & \int x^n \theta dx & \dots & \int x^{2n-1} \theta dx \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (3)$$

гдѣ  $M_n$  есть неопредѣленный постоянный множитель.

Такимъ образомъ видимъ, что условіями  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(\gamma)$  каждая изъ функцій  $\psi_0, \psi_1, \dots$  опредѣляется съ точностью до постоянного множителя.

Изъ выраженія (3) получаютъ непосредственно слѣдующія соотношенія, которыми намъ придется воспользоваться

$$\int \psi_n x^n \theta dx = M_n \Delta_n \quad (4)$$

и 
$$\int \psi_n x^k \theta dx = 0,$$

гдѣ  $k$  есть цѣлое положительно число меньше  $n$ .

Слѣдовательно

$$\int \psi_n^2 \theta dx = M_n \Delta_{n-1} \int \psi_n x^n \theta dx. \quad (5)$$

Исключая же  $M_n$  изъ (4) и (5), находимъ

$$\frac{(\int \psi_n x^n \theta dx)^2}{\int \psi_n^2 \theta dx} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad (6)$$

Далѣе, продифференцировавъ  $n$  разъ выраженіе (3), получимъ

$$\frac{d^n \psi_n}{dx^n} = n! M_n \Delta_{n-1}$$

и исключивъ  $M_n$  при помощи равенства (4), будемъ имѣть

$$\frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{\frac{d^n \psi_n}{dx^n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad (7)$$

Наконецъ, возведя въ квадратъ обѣ части этого послѣдняго равенства и раздѣливъ полученное равенство почленно на равенство (6), получимъ соотношеніе

$$(3)^{(n)} \quad \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} = \frac{\psi_1}{(n!)^2} \cdot \frac{\Delta^n}{\Delta_{n-1}} \cdot (1 - ) = (8)$$

§ 6.

При условіяхъ (3) опредѣлители  $P_1$  и  $Q_1$ , входящіе въ формулу (1), принимаютъ также весьма простое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли (см. 3 парагр.).

$$P_1 = \begin{vmatrix} f(x_0) & , & f'(y_1) & , & f''(z_2) & \dots & f^{(n)}(v_n) \\ \psi_0(x_0) & , & \psi_0'(y_1) & , & \psi_0''(z_2) & \dots & \psi_0^{(n)}(v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0) & , & \psi_{n-1}'(y_1) & , & \psi_{n-1}''(z_2) & \dots & \psi_{n-1}^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

Перемѣстивши строки этого опредѣлителя такъ, чтобы порядокъ ихъ не нарушался и первая строка сдѣлалась послѣднею, получимъ, принимая во вниманіе условія (3),

$$P_1 = (-1)^n \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & , & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1(x_0) & , & \psi_1'(y_1) & , & 0 & \dots & 0 \\ \psi_2(x_0) & , & \psi_2'(y_1) & , & \psi_2''(z_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-1}(x_0) & , & \psi_{n-1}'(y_1) & , & \psi_{n-1}''(z_2) & \dots & 0 \\ f(x_0) & , & f'(y_1) & , & f''(z_2) & \dots & f^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}$$

или

$$P_1 = (-1)^n \psi_0(x_0) \psi_1'(y_1) \psi_2''(z_2) \dots f^{(n)}(v_n)$$

или

$$(8) P_1 = (-1)^n \psi_0 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}} f^{(n)}(\xi),$$

гдѣ  $\psi_0, \frac{d\psi_1}{dx}, \frac{d^2\psi_2}{dx^2}, \dots$  суть постоянныя, т. е. независящія отъ аргументовъ  $x_0, y_1, z_2, \dots$ , а  $\xi$  поставлено вмѣсто  $v_n$  и означаетъ нѣкоторую величину, заключающуюся между  $a$  и  $b$ .

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$Q_1 = (-1)^n \psi_0 \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}} \varphi^{(n)}(\eta),$$

гдѣ  $\eta$  означаетъ также величину, заключающуюся между  $a$  и  $b$ .

Если теперь найденныя выраженія для  $P_1$  и  $Q_1$  внесемъ въ равенство (I) [пар. 4], то будемъ имѣть

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \psi_0^2 \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\right)^2 \dots \left(\frac{d^{n-1}\psi_{n-1}}{dx^{n-1}}\right)^2 \Delta_n}{[(n!)!]^2 \int \psi_0^2 \theta dx \int \psi_1^2 \theta dx \dots \int \psi_{n-1}^2 \theta dx},$$

что на основаніи соотношенія (8) приводится къ

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \psi_0^2 \Delta_0 \Delta_n}{(n!)^2 \Delta_{n-1} \int \psi_0^2 \theta dx}.$$

Но изъ общаго выраженія для  $\Delta_n$  (см. § 4) имѣемъ

$$\Delta_0 = \int \theta dx$$

и такъ-какъ  $\psi_0$  есть постоянное, то

$$\psi_0^2 \Delta_0 = \int \psi_0^2 \theta dx,$$

вслѣдствіе чего послѣднее равенство обращается въ



$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \Delta_n}{(n!)^2 \Delta_{n-1}} \quad (\text{II})$$

Это и есть простѣйшій видъ дополнительнаго члена строки П. Л. Чебышева для случая, когда въ ней  $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \dots$  (V)

суть функціи цѣлыя. Отношеніе  $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$  можетъ быть здѣсь замѣнено какимъ-либо изъ равныхъ ему выраженій, получаемыхъ изъ равенствъ (6), (7) и (8). Такимъ образомъ получаемъ еще слѣдующіе три вида этого дополнительнаго члена:

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \frac{(\int \psi_n x^n \theta dx)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta dx} \quad (\text{III})$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{n! \frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \quad (\text{IV})$$

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\eta) \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad (\text{V})$$

Изъ этихъ выраженій и видно, въ какой зависимости находится знакъ и величина разсматриваемаго дополнительнаго члена отъ свойствъ функцій  $f, \varphi$  и  $\theta$ . Такъ, предполагая, что  $\theta$  остается положительною величиною при измѣненіи переменнаго отъ  $a$  до  $b > a$ , будемъ имѣть, что интеграль

$$\int_a^b \psi_n^2 \theta dx$$

есть величина также положительная, а потому изъ выраженій (III) и (V) заключаемъ, что въ случаѣ, когда  $n$ -ья произ-

водныя отъ функций  $f$  и  $\phi$  сохраняютъ свои знаки въ предѣлахъ  $a$  и  $b$ , знакъ дополнительнаго члена  $R_n$  такой - же какъ знакъ произведенія этихъ производныхъ. Это составляетъ второе его свойство, указанное П. Л. Чебышевымъ.

Имѣя въ виду это свойство, мы заключаемъ изъ равенства (V), что

$$[R_n] = [f^{(n)}(\xi)][\phi^{(n)}(\eta)] \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2},$$

гдѣ скобками [ ] мы означаемъ числовую величину выраженія, въ нихъ заключеннаго. Отсюда слѣдуетъ, что если  $A$  и  $B$  суть наибольшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{и} \quad \frac{d^n \phi}{dx^n},$$

то числовая величина дополнительнаго члена  $R_n$  не можетъ быть болѣе произведенія

$$A B \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2}$$

Это есть первое свойство дополнительнаго члена, указанное Чебышевымъ.

Къ этому можно прибавить на томъ же основаніи, что если  $\alpha$  и  $\beta$  суть наименьшія числовыя величины производныхъ

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{и} \quad \frac{d^n \phi}{dx^n},$$

то  $[R_n]$  не можетъ быть менѣе

$$\alpha \beta \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2}$$

Вообще же равенства (III), (IV) и (V) показывают, что дополнительный член  $R_n$  (заключается въ) предѣлахъ

$$G \cdot H \frac{(\int \psi_n x^n \theta dx)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta dx} \quad \text{и} \quad g \cdot h \frac{(\int \psi_n x^n \theta dx)^2}{(n!)^2 \int \psi_n^2 \theta dx}$$

или

$$G \cdot H \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{n! \frac{d^n \psi_n}{dx^n}} \quad \text{и} \quad g \cdot h \frac{\int \psi_n x^n \theta dx}{n! \frac{d^n \psi_n}{dx^n}}$$

или

$$G \cdot H \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^2} \quad \text{и} \quad g \cdot h \frac{\int \psi_n^2 \theta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n}{dx^n}\right)^3}$$

гдѣ  $G$  и  $g$  означаютъ самую большую и самую малую изъ величинъ, получаемыхъ  $n$ -ою производною функціи  $f(x)$  при измѣненіи  $x$  отъ  $a$  до  $b$ ; а  $H$  и  $h$  имѣютъ такое же значеніе для функціи  $\Phi(x)$ .

N. B.

Поправка. — Обратимся, въ заключеніе, еще разъ къ нашей предыдущей статьѣ «Нѣсколько словъ и т. д.» съ цѣлью исправить нѣкоторыя вкравшіяся въ нее погрѣшности. Статья эта<sup>0</sup> вызвана была теоремою П. Л. Чебышева, состоящей въ слѣдующемъ:

*Если каждая изъ двухъ функций  $f(x)$  и  $\psi(x)$  постоянно возрастаетъ или постоянно уменьшается при измѣненіи переменнаго  $x$  отъ 0 до 1, то разность*

$$\int_0^1 f(x)\psi(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \psi(x) dx$$

имѣетъ всегда такой же знакъ, какъ произведение производныхъ  $f'(x)$  и  $\psi'(x)$  этихъ функций.

Обобщенію этой теоремы на случай, когда интегрируемая функція въ первомъ членѣ разности есть произведение не двухъ только, а нѣсколькихъ функцій, мы посвятили одинъ изъ параграфовъ (третій), но! допущенная нами неправильность въ постановкѣ, сдѣланной на первыхъ же порахъ, повела къ искаженію и дальнѣйшихъ преобразованій. Вотъ въ чемъ должны состоять приводящія къ этому обобщенію разсужденія уже въ строго правильномъ видѣ.

Замѣняя въ неравенствѣ

$$\int_0^1 f(x)\psi(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \psi(x) dx \geq 0$$

функцію  $f(x)$  послѣдовательно чрезъ

$$f_1(x), f_1(x)f_2(x), f_1(x)f_2(x)f_3(x) \text{ и т. д.,}$$

и соотвѣтственно съ этимъ функцію  $\psi(x)$  послѣдовательно чрезъ  $f_2(x), f_3(x), f_4(x)$  и т. д., получимъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 f_1(x)f_2(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \geq 0 \\ & \int_0^1 f_1(x)f_2(x)f_3(x) dx - \int_0^1 f_1(x)f_2(x) dx \int_0^1 f_3(x) dx \geq 0 \\ & \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x) dx - \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\dots f_{n-1}(x) dx \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0 \end{aligned} \right\} (A)$$

Въ силу теоремы П. Л. Чебышева условія существованія этихъ неравенствъ будутъ послѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \dots \frac{df_1}{dx} \cdot \frac{df_2}{dx} \leq 0 \\ 0 \leq \dots \frac{d}{dx} (f_1 f_2) \frac{df_3}{dx} \leq 0 \\ \dots \dots \dots \frac{d}{dx} (f_1 f_2 \dots f_{n-1}) \frac{df_n}{dx} \leq 0 \end{aligned} \right\} (\alpha)$$

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ верхнимъ, а нижніе — нижнимъ.

Если назовемъ первая части неравенствъ (А) послѣдовательно чрезъ  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  и положимъ:

$$\int_0^1 f_3(x) dx \int_0^1 f_4(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx = B_1$$

$$\int_0^1 f_4(x) dx \int_0^1 f_5(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx = B_2$$

$$\dots \dots \dots \int_0^1 f_n(x) dx = B_{n-2}$$

$$1 = B_{n-1}$$

то будемъ, очевидно, имѣть

$$\begin{aligned} A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_{n-1} B_{n-1} &= \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx - \\ &- \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Но въ силу условій (α) и принимая во вниманіе видъ выр-  
женій  $B_1, B_2, \dots$ , должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} A_1 B_1 &\geq 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dx} \int_0^1 f_3(x) dx \int_0^1 f_4(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0 \\ A_2 B_2 &\geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} \left( f_1 f_2 \right) \frac{df_3}{dx} \int_0^1 f_4(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0 \\ A_3 B_3 &\geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} \left( f_1 f_2 f_3 \right) \frac{df_4}{dx} \int_0^1 f_5(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx \geq 0 \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n-1} B_{n-1} &\geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} \left( f_1 f_2 \dots f_{n-1} \right) \frac{df_n}{dx} \geq 0 \end{aligned}$$

которые, въ случаѣ когда каждая изъ функций  $f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)$  сохраняетъ свой знакъ въ предѣлахъ интеграціи, равно-  
значущи съ слѣдующими

$$\begin{aligned} A_1 B_1 &\geq 0, \text{ когда } \frac{df_1}{dx} \frac{df_2}{dx} f_3 f_4 \dots f_n \geq 0 \\ A_2 B_2 &\geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} \left( f_1 f_2 \right) \frac{df_3}{dx} f_4 f_5 \dots f_n \geq 0 \\ A_3 B_3 &\geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} \left( f_1 f_2 f_3 \right) \frac{df_4}{dx} f_5 \dots f_n \geq 0 \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n-1} B_{n-1} &\geq 0, \text{ когда } \frac{d}{dx} \left( f_1 f_2 \dots f_{n-1} \right) \frac{df_n}{dx} \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \\ A_3 B_3 \\ \dots \\ A_{n-1} B_{n-1} \end{aligned}} \right\} (\beta)$$

гдѣ также верхнимъ знакамъ соотвѣтствуютъ верхніе, а ниж-  
нимъ — нижніе.

Если положимъ, что въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только верхніе знаки, то будемъ имѣть, что разность

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx$$

имѣетъ величину положительную. Когда же въ послѣднихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто только нижніе знаки, то эта разность будетъ отрицательною.

Произведя же въ условіяхъ (β) дифференцирование произведеній, не трудно видѣть, что первыя ихъ части суть суммы такихъ произведеній, которыя получаются изъ произведенія  $n$  функцій  $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)$  чрезъ замѣну послѣдовательно каждаго двухъ изъ перемножающихся функцій ихъ производными. Вслѣдствіе этого убѣждаемся въ справедливости слѣдующаго предложенія,

Если каждая изъ функцій  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  не мѣняетъ своего знака при измѣненіи переменнаго отъ 0 до 1 и при томъ все отношенія  $\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}, \frac{f_2'(x)}{f_2(x)}, \dots, \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$  имѣютъ одинаковые знаки, то разность

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx - \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx \dots \int_0^1 f_n(x) dx$$

имѣетъ величину положительную, когда число отрицательныхъ функцій въ рядѣ  $f_1, f_2, \dots, f_n$  есть четное, и отрицательную, когда это число есть нечетное.

Кромѣ сказаннаго, въ той же нашей статьѣ подлежитъ исправленію слѣдующая опечатка.

На второй страницѣ 1-го параграфа напечатано

$$\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx - \left[ \int_a^b f(x) dx \int_a^b \psi(x) dx \right]^2;$$

должно быть

$$\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx - \left[ \int_a^b f(x) \psi(x) dx \right]^2.$$

Эта же опечатка встрѣчается и на четвертой страницѣ въ равенствѣ, обозначенномъ номеромъ (III).

К. А.