ОСОБЕННЫЙ СЛУЧАЙ

maximum'a и minimum'a функціи со многими перемѣнными.

П. М. Новикова.

Пусть дана функція $U = f(x, y, z \ldots)$; допустимъ, что ея дифференціалъ принимаетъ такой видъ

$$dU = \varphi(x, y, z \ldots)(U_x dx + U_y dy + U_z dz + \ldots), \quad (1)$$

гдѣ U_x, U_y, U_z . . . . функціи x, y, z . . . . Тогда для того, чтобы найдти значенія перемѣнныхъ, соотвѣтствующія maximum'у или minimum'у, нужно или рѣшить систему уравненій

$$U_x = 0,\ U_y = 0,\ U_z = 0, \ldots \quad (2)$$

или же допустить

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0. \quad (3)$$

Изъ системы уравненій (2) мы найдемъ нѣсколько системъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ, изъ которыхъ нѣкоторыя могутъ удовлетворять дальнѣйшимъ условіямъ maximum'a или minimum'a; но кромѣ того d^2U можетъ при произвольныхъ дифференціалахъ независимыхъ перемѣнныхъ сохранять постоянный знакъ для всѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію (3). Тогда U будетъ maximum или minimum для непрерывной совокупности значеній перемѣннаго, удовлетворяющихъ уравненію (3). Если, напр., U будетъ функція только двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, и слѣд. $U = f(x, y)$ можно принять за уравненіе поверхности, то въ случаѣ, когда dU уничтожится отъ допущенія $\varphi(x, y) = 0$ и d^2U будетъ сохранять постоянный знакъ, U будетъ имѣть maximum или minimum на протяженіи всей кривой $\varphi(x, y) = 0$.

Этотъ maximum или minimum отличается тѣмъ свойствомъ, что онъ есть величина постоянная для всѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію (3); такъ, напр., въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ U величина постоянная для всѣхъ точекъ кривой $\varphi(x, y) = 0$. Дѣйствительно, полагая для краткости,

$$U_x dx + U_y dy + U_z dz + , \ldots = dL,$$

будемъ имѣть

$$d^2U = d\varphi dL + \varphi d(dL). \tag{4}$$

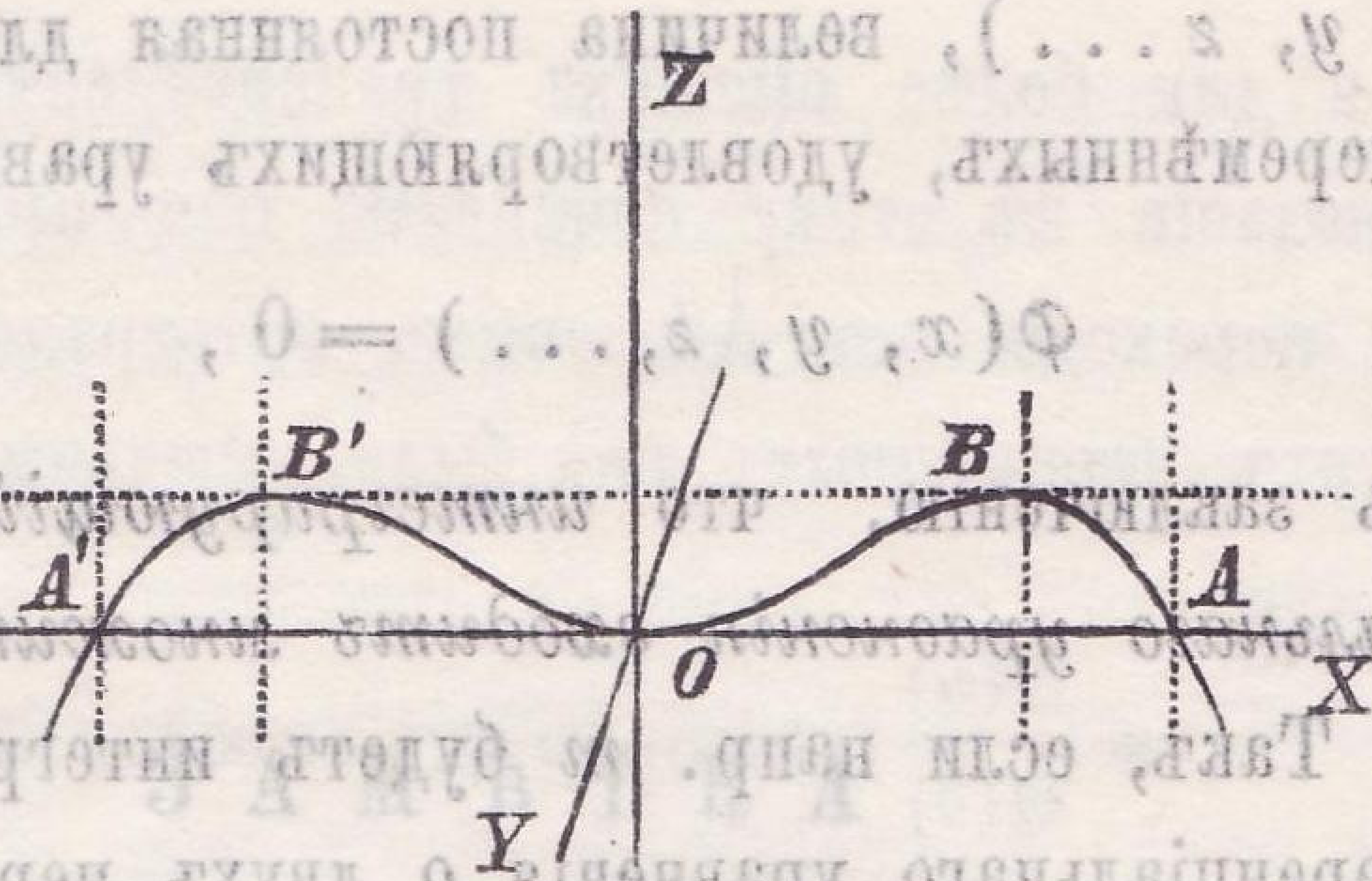
Для всѣхъ значеній перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію $\varphi = 0$, первый членъ правой части, при произвольныхъ дифференціалахъ независимыхъ перемѣнныхъ, можетъ сохранить постоянный знакъ, но при дифференціалахъ, удовлетворяющихъ уравненію $\varphi = 0$, должно быть $d\varphi = 0$ и слѣд.

$$d^2U = 0;$$

но такъ какъ для дифференціаловъ, удовлетворяющихъ уравненію $\varphi = 0$, не только $d\varphi = 0$, но и $d^2\varphi = 0$, $d^3\varphi = 0 \ldots$, то для нихъ всѣ дальнѣйшіе дифференціалы U уничтожатся, такъ какъ всѣ они будутъ состоять изъ членовъ, содержащихъ множителями φ и его дифференціалы разныхъ порядковъ.

Для примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе:

$$z = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2;$$



оно выражаетъ поверхность вращенія, разрѣзъ которой изображенъ на прилагаемомъ чертежѣ. Изъ него имѣемъ

$$dz = 4\left[{}^1/_2 - (x^2 + y^2)\right](x dx + y dy).$$

Полагая $dz = 0$, получаемъ съ одной стороны $x = y = 0$, съ другой

$$x^2 + y^2 - {}^1/_2 = 0.$$

Далѣе, опуская общихъ численныхъ множителей, имѣемъ

$$d^2z = -2(x dx + y dy)^2 + \left[{}^1/_2 - (x^2 + y^2)\right](dx^2 + dy^2).$$

Вторая часть при $x = y = 0$ дѣлается величиной положительной, именно

$${}^1/_2(dx^2 + dy^2),$$

а при $x^2 + y^2 - {}^1/_2 = 0$, т. е. для всѣхъ точекъ круга, но, при произвольныхъ значеніяхъ dx, dy, она обращается въ

$$-2(x dx + y dy)^2$$

и есть величина отрицательная; значитъ, при послѣднемъ условіи функція z будетъ maximum. Наконецъ, для значеній не только x и y, но и dx и dy удовлетворяющихъ уравненію круга, т. е. когда мы будемъ подвигаться на кругѣ, второй дифференціалъ z равенъ нулю. Можно показать, что и остальные дифференціалы также нули.

Прибавимъ здѣсь еще одно замѣчаніе. То обстоятельство, что функція, въ первомъ дифференціалѣ которой можно выдѣлить множителя $\Phi(x, y, z\ldots)$, величина постоянная для значеній независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ уравненію

$$\Phi(x, y, z, \ldots) = 0,$$

приводитъ къ заключенію, что *интегрирующій множитель дифференціальнаго уравненія входитъ множителемъ въ интегралъ его*. Такъ, если напр. m будетъ интегрирующій множитель дифференціальнаго уравненія о двухъ перемѣнныхъ:

$$Mdx + Ndy = 0,$$

то интегралъ его будетъ имѣть видъ

$$\Pi = Xm + C.$$

Дѣйствительно, продифференцировавъ это выраженіе и приравнявъ коэффиціенты при dx и dy такимъ же дифференціальнаго уравненія, помноженнаго на m, получимъ для опредѣленія функціи X два уравненія въ частныхъ производныхъ, именно

$$\frac{dX}{dx} + \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dx} X = M,$$

$$\frac{dX}{dy} + \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dy} X = N,$$

которыя теоретически допускаютъ рѣшеніе.

Примѣръ. Интегрирующій множитель для уравненія $xdy - ydx = 0$ будетъ $\frac{1}{x^2}$, а интегралъ $\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}\ yx = C$. Здѣсь функція X есть xy.

Не трудно то же доказательство распространить и на случай многихъ перемѣнныхъ.