ВЫВОДЪ ОСНОВНЫХЪ ПРЕДЛОЖЕНІЙ

ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ НЕЗАВИСИМО ОТЪ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПОДРАДИКАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ.

М. Тихомандрицкаго.

Когда, въ іюнѣ сего года, я послалъ въ редакцію Mathematische Annalen свою замѣтку «Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale», въ которой я указалъ — какимъ образомъ интегрированіе (выполненное уже Сомовымъ) извѣстнаго уравненія, которое можетъ быть принято за выраженіе теоремы сложенія интеграловъ 2-го рода, послѣ очень простого преобразованія приводитъ само собою какъ къ Θ-функціямъ Якоби, такъ и къ $\mathrm{Al}(u)$ Вейерштрасса, смотря по принятому типу интеграловъ 2-го рода, то проф. Клейнъ обратилъ мое вниманіе на то обстоятельство, что въ настоящее время ак. Вейерштрассъ вмѣсто $\mathrm{Al}(u)$ разсматриваетъ другую функцію $\sigma(u)$, опредѣляемую уравненіемъ:

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

и что по этому было бы интересно принять и эти функціи въ разсмотрѣніе.

Такъ какъ, очевидно, вся разница между этимъ уравненіемъ и опредѣляющимъ $\Theta(u)$

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

заключается главнымъ образомъ въ формѣ подрадикальной функціи, принятой за каноническую, то я поставилъ себѣ задачей достигнуть, если можно, полученнаго мною результата, изложеннаго въ упомянутой замѣткѣ (Math. Ann. Bd. XXII), равно какъ и въ «Замѣткѣ о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ интеграловъ», помѣщенной въ I-й книжкѣ «Сообщеній» математическаго общества при харьковскомъ университетѣ за 1883 годъ, не приводя подрадикальную функцію ни къ какому каноническому виду, предполагая ее, однако, третьей степени, что, какъ извѣстно, не уменьшаетъ общности. Такъ какъ для этого понадобилось, прежде всего, установить типы интеграловъ каждаго изъ трехъ родовъ, то я обратился съ этою цѣлью къ формулѣ приведенія эллиптическихъ интеграловъ, и мнѣ удалось замѣтить при этомъ, что то дифференціальное тождество, интегрированіе котораго и даетъ эту формулу приведенія, для одного частнаго случая ($m = -1$), послѣ легко усматриваемаго преобразованія, можетъ быть приведено съ помощію нѣкоторой простой подстановки къ такому виду, что —

1) послѣ кратнаго интегрированія — по двумъ независимымъ перемѣннымъ, сразу приводитъ къ теоремѣ о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ третьяго рода, которые при этомъ само-собою появляются въ формѣ, соотвѣтствующей принятой для нихъ Якоби;

2) послѣ однократнаго интегрированія по тѣмъ-же перемѣннымъ, но уже связаннымъ теперь тѣмъ дифференціальнымъ уравненіемъ, интегрированіе котораго доставляетъ теорему сложенія интеграловъ перваго рода, — тотчасъ даетъ и теорему сложенія интеграловъ 2-го рода.

Выводу этого замѣчательнаго тождества съ его первымъ, изъ указанныхъ, слѣдствіемъ посвящается § 1 этой статьи; во 2-мъ я позволилъ себѣ помѣстить, ради его элементарнаго характера, выводъ теоремы сложенія интеграловъ перваго рода, который я нигдѣ не встрѣчалъ; въ 3-мъ и послѣднемъ я вывожу съ помощію вышеупомянутаго тождества теорему сложенія интеграловъ 2-го рода, изъ которой за-тѣмъ получаю по способу, тождественному съ изложеннымъ въ вышеупомянутыхъ замѣткахъ моихъ, двѣ формулы, изъ которыхъ одна выражаетъ логариѳмъ нѣкоторой раціональной функціи чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода, а другая чрезъ тѣ-же интегралы выражаетъ интегралъ 3-го рода. Первая изъ этихъ формулъ по переходѣ отъ логариѳма къ числу и приводитъ къ функціямъ, которыя Эрмитъ называетъ intermédiaires и которыхъ Якобіевская $\Theta(u)$ и Вейерштрассовскія суть частные случаи.

1.

Пусть

$$R(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).$$

Чрезъ дифференцированіе $(x-a)^m\sqrt{R(x)}$ получаемъ такое тождество

$$\frac{d}{dx}\Big((x-a)^m\sqrt{R(x)}\Big)=\frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}\Big(2mR(x)+(x-a)R'(x)\Big);$$

разлагая второй множитель второй части по строкѣ Тэйлора, помня, что $R(x)$ полиномъ третьей степени, мы даемъ ему такой видъ:

$$\frac{d}{dx}\Big((x-a)^m\sqrt{R(x)}\Big)=\frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}\Big\{2mR(a)+$$

$$(2m+1)R'(a)(x-a)+(2m+2)\frac{R''(a)}{1.\,2}(x-a)^2+$$

$$+(2m+3)\frac{R'''(a)}{1.\,2.\,3}(x-a)^3\Big\}. \qquad (1)$$

Интегрируя это тождество по x отъ $x = a_1$, мы получимъ формулу приведенія эллиптическихъ интеграловъ:

$$(x-a)^m\sqrt{R(x)} = 2mR(a)X_m + (2m+1)R'(a)X_{m+1} + \\ + (2m+2)\frac{R''(a)}{1.\,2}X_{m+2} + (2m+3)\frac{R'''(a)}{1.\,2.\,3}X_{m+3} \quad (2)$$

гдѣ

$$X_p = \int_{a_1}^{x} \frac{(x-a)^{p-1}dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

которая показываетъ: 1) что всѣ интегралы, въ которыхъ $p > 1$, приводятся къ двумъ такимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \int_{a_1}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\ X_2 &= \int_{a_1}^{x} \frac{(x-a)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}\right| \quad (3)$$

перваго и второго рода, — такъ какъ для $m = 0$ интегралъ съ первою отрицательною степенью $x - a$:

$$X_0 = \int_{a_1}^{x} \frac{dx}{(x-a)\,2\sqrt{R(x)}}, \quad (4)$$

— интегралъ третьяго рода, уходитъ изъ уравненія (2); и 2) что интегралы, въ которыхъ $p < 0$, выражаются чрезъ тѣ-же интегралы (3) съ присоединеніемъ къ нимъ еще интеграла (4). Въ случаѣ $R(a) = 0$, когда слѣд. a равно которому-нибудь изъ a_1, a_2, a_3, всѣ интегралы сведутся къ интеграламъ первыхъ двухъ родовъ.

Для $m = -1$ дифференціальное тождество (1) по умноженіи на $2\sqrt{R(x)}$ обращается въ такое

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right) = -2\frac{R(a)}{(x-a)^2} - \frac{R'(a)}{x-a} + (x-a), \quad (5)$$

(такъ какъ $\frac{R'''(a)}{1.2.3}=1$), и очевидно можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right)=-2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)+x-a,$$

или еще такъ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right)-(x-b)=$$

$$=2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x}\right)-(a-b)\,, \qquad (6)$$

гдѣ b произвольная постоянная величина. Видъ этой формулы, ея симметричность относительно x и a, наводитъ на мысль о возможности получить теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3-го рода по умноженіи обѣихъ частей на $\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}$ и интегрированіи по обѣимъ перемѣннымъ.

Мысль эта была высказана Якоби въ письмѣ къ Эрмиту отъ 6 августа 1845 г. (Jacobi's Werke, Bd. II, p. 117), изъ котораго видно, что онъ примѣнялъ этотъ пріемъ и къ ультраэллиптическимъ интеграламъ. Но при этомъ, какъ то замѣтилъ и Якоби, пути интегрированія должны быть такъ выбраны, чтобы онѣ не пересѣкались, ибо для $x=a$ интегрируемыя функціи обращаются въ безконечность; а отъ этого самое предложеніе получается не въ обычной формѣ. Можно однако, чрезъ перемѣну независимой перемѣнной a на другую y, привести тождество (6) къ другому, симметричному относительно x и y, въ которомъ можно будетъ мѣнять порядокъ интегрированія по x и y, начиная его отъ одинаковаго значенія для обоихъ, именно a_1. Для этого стоитъ только принять

$$a-a_1=\frac{R'(a_1)}{y-a_1}\,. \qquad (7)$$

Тогда будемъ имѣть:

$$da = -\frac{R'(a_1)}{(y-a_1)^2}\,dy;$$

$$R(a) = \frac{R'(a_1)}{(y-a_1)^2}\sqrt{R(y)},$$

и слѣд.:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{\sqrt{R(a)}} &= -\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}; \\ \frac{\sqrt{R(a)}}{a-a_1} &= \frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Такъ какъ для $a = a_1, = a_2, = a_3$, y соотвѣтственно $= \infty$, $= a_3, = a_2$, то отсюда тотчасъ слѣдуетъ, замѣтимъ мимоходомъ, что

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} = \int_{a_3}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}},$$

чрезъ что періоды интеграловъ перваго рода сводятся къ слѣдующимъ двумъ:

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} \quad \text{и} \quad \int_{a_2}^{a_3} \frac{da}{2\sqrt{R(a)}}.$$

Съ помощію уравненія (8) мы найдемъ теперь:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a} = \frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_1-(a-a_1)} = -\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)};$$

$$\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x} = \frac{\dfrac{\sqrt{R(a)}}{a-a_1}}{1-\dfrac{x-a}{a-a_1}} = \frac{+\dfrac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)};$$

за-тѣмъ:

$$2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x}\right)=2\sqrt{R(a)}\,\frac{dy}{da}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)=$$

$$=-2\sqrt{R(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right).$$

Чрезъ это, уравненіе (6) приметъ такой видъ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+(x-b)=$$

$$=2\sqrt{R(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(y)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{R'(a)}{y-a_1}-(b-a_1); \tag{9}$$

но изъ (5) для $a=a_1$ имѣемъ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_1}\right)=-\frac{R'(a_1)}{x-a_1}+x-a_1;$$

перенося все на-право и перемѣняя x на y, будемъ имѣть:

$$0=-2\sqrt{R(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}\right)-\frac{R'(a_1)}{y-a_1}+y-a_1;$$

придавая это къ (9), послѣ нѣкоторыхъ упрощеній получимъ слѣдующее замѣчательное тождество:

$$2\sqrt{R(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{x-b}{2\sqrt{R(x)}}\right\}=$$

$$=2\sqrt{R(a)}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{y-b}{2\sqrt{R(y)}}\right\}. \tag{10}$$

Если помножить обѣ части его на $\frac{\partial x}{2\sqrt{R(x)}} \cdot \frac{\partial y}{2\sqrt{R(y)}}$ и проинтегрировать отъ a_1 по x и y, то получимъ по перенесенiи членовъ изъ одной части въ другую слѣдующее равенство:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{a_1}^{x} \frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} - \\ &-\int_{a_1}^{y} \frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \\ &= \int_{a_1}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} \cdot \int_{a_1}^{x} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} - \\ &-\int_{a_1}^{y} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \cdot \int_{a_1}^{y} \frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

которое и выражаетъ теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ третьяго рода, которые притомъ здѣсь являются въ формѣ, соотвѣтствующей принятой для нихъ Якоби, а интегралы второго рода—въ самомъ общемъ ихъ видѣ, благодаря произвольности b.

2.

Это-же самое тождество (10) приведетъ насъ къ теоремѣ сложенiя эллиптическихъ интеграловъ 2-го рода, если связать перемѣнныя x и y уравненiемъ:

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \pm \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = 0, \quad (12)$$

котораго интегралъ въ трансцендентной формѣ есть

$$\int_{a_1}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \pm \int_{a_1}^{x} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \int_{a_1}^{\pm x_0} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \quad (13)$$

(гдѣ $\overset{\pm}{x}_0$ есть значеніе x для $y=a_1$ смотря по знаку второго члена въ первой части [12]); а въ алгебраической легко получается слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе (12) по освобожденіи отъ знаменателя и сокращеніи на 2 принимаетъ такой видъ:

$$\sqrt{R(y)}\,dx \pm \sqrt{R(x)}\,dy = 0$$

или
$$\sqrt{R(y)}\,d(x-a_1) \pm \sqrt{R(x)}\,d(y-a_1) = 0;$$

придавъ къ нему тождество

$$(x-a_1)d\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\,d\sqrt{R(x)} =$$
$$= (x-a_1)\frac{R'(y)\,dy}{2\sqrt{R(y)}} \pm (y-a_1)\frac{R'(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}$$

и исключивъ затѣмъ dx съ помощію уравненія (12), получимъ такое уравненіе:

$$d\Big((x-a_1)\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\sqrt{R(x)}\Big) =$$
$$= \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}\Big((x-a_1)R'(y) - (y-a_1)R'(x)\Big),$$

въ которомъ первая часть есть полный дифференціалъ; этотъ характеръ уравненіе сохранитъ и по раздѣленіи его на тождество:

$$(x-a_1)\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\sqrt{R(x)} = \frac{(x-a_1)^2R(y)-(y-a_1)^2R(x)}{(x-a_1)\sqrt{R(y)} \mp (y-a_1)\sqrt{R(x)}},$$

послѣ чего приметъ такой видъ:

$$d\log\Big((x-a_1)\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\sqrt{R(x)}\Big) =$$
$$= \frac{(x-a_1)R'(y)-(y-a_1)R'(x)}{(x-a_1)^2R(y)-(y-a_1)^2R(x)}\,d\Big(\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{2}\Big), \quad (14)$$

такъ какъ по (12)

$$\left((x-a_1)\sqrt{R(y)}\mp(y-a_1)\sqrt{R(x)}\right)\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}=$$

$$=\frac{1}{2}\,d\left((x-a_1)(y-a_1)\right).$$

Опредѣлители, которыхъ частное мы видимъ во второй части (14), такъ могутъ быть вычислены:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & R'(x) \\ y-a_1 & R'(y) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x-a_1 & R'(a_1)+(x-a_1)R''(a_1)+(x-a_1)^2\dfrac{R'''(a_1)}{1.\,2} \\ y-a_1 & R'(a_1)+(y-a_1)R''(a_1)+(y-a_1)^2\dfrac{R'''(a_1)}{1.\,2} \end{vmatrix}=$$

$$=(x-y)\left[R'(a_1)-3(x-a_1)(y-a_1)\right]=$$

$$=(x-y)\left\{\left[R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)\right]-2(x-a_1)(y-a_1)\right\};$$

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & R(x) \\ (y-a_1)^2 & R(y) \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & R'(a_1)(x-a_1)+\dfrac{R''(a_1)}{1.\,2}(x-a_1)^2+\dfrac{R'''(a_1)}{1.\,2.\,3.}(x-a_1)^3 \\ (y-a_1)^2 & R'(a_1)(y-a_1)+\dfrac{R''(a_1)}{1.\,2}(y-a_1)^2+\dfrac{R'''(a)}{1.\,2.\,3}(y-a_1)^3 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-a_1)(y-a_1)(x-y)\left[R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)\right];$$

послѣ чего вторая часть уравненія (14) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d(x-a_1)(y-a_1)}{(x-a_1)(y-a_1)}+\frac{-d(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}=$$

$$=d\log\left\{\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\left(R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)\right)\right\},$$

и само уравненіе обратится въ такое:

$$d\log\left\{\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}(R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right\}=0,$$

что по интегрированіи даетъ слѣдующее:

$$\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}(R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}=C. \qquad (15)$$

Постоянное C опредѣлится, полагая $y=a_1$, и слѣдовательно $x=\overset{\pm}{x}_0$; сдѣлавъ это получимъ:

$$C=\frac{\sqrt{\overset{\pm}{x}_0-a_1}}{\sqrt{R'(a_1)}};$$

внося это въ (15), мы будемъ имѣть:

$$\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{R'(a_1)}}\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\sqrt{\overset{\pm}{x}_0-a_1}, \qquad (16)$$

интегралъ уравненія (12) въ алгебраической формѣ, гдѣ $\overset{\pm}{x}_0$ есть произвольная постоянная.

3.

Написавъ теперь уравненіе (12) въ такомъ видѣ:

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\mp\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}$$

помножимъ его на уравненіе (10) и проинтегрируемъ результатъ по y отъ $y=a_1$, и стало быть по x отъ $x=\overset{\pm}{x}_0$; мы получимъ тогда:

$$\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}+\int_{\overset{\pm}{x}_0}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(y)}}=$$

$$=\frac{\mp(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\mp\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(x)}}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\pm\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}-\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0}\frac{(x-b\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\&=\mp\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

что на основаніи (16) приметъ обычную форму уравненія, выражающаго теорему сложенія интеграловъ 2-го рода:

$$\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\pm\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b\,dy}{2\sqrt{R(y)}}-\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\mp\frac{1}{\sqrt{R'(a_1)}}\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\sqrt{\overset{\pm}{x}_0-a_1}.\qquad(18)$$

Сложивъ теперь оба уравненія, заключающіяся въ (17), и вычтя одно изъ другого, получимъ такія два:

$$2\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{\overset{-}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\frac{-(y-a_1)\,2\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\qquad(19)$$

$$-2\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}+\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{\overset{-}{x}}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\frac{(x-a_1)\,2\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}.\qquad(20)$$

Помноживъ эти уравненія на $\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$ и интегрируя отъ $x=a_1$, получимъ слѣдующія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}\right)&=2\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}-\\&-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\&=-\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}\cdot\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\\&+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій выражаетъ интегралъ третьяго рода чрезъ интегралы отъ интеграловъ второго рода; первое же по переходѣ отъ логариѳма къ числу даетъ такое:

$$1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}=\qquad(23)$$

$$=\frac{e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}\cdot e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}}{\left[e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}\right]^2}$$

въ которомъ мы встрѣчаемъ трансцендентную

$$e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}},\qquad(24)$$

чрезъ которую могутъ быть выражены интегралы второго и третьяго рода и $\sqrt{x-a_1}$, $\sqrt{x-a_2}$, $\sqrt{x-a_3}$, если за независимую перемѣнную взять интегралъ перваго рода, для чего слѣдуетъ положить

$$\int_{a_1}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = u\,. \tag{25}$$

Тогда x будетъ нѣкоторая функція u, которую такъ означимъ:

$$x = \Phi(u)\,. \tag{26}$$

Это будетъ четная функція u, въ чемъ легко убѣдиться преобразуя интегралъ (25) съ помощію подстановки:

$$\sqrt{x-a_1} = z\,.$$

Интегралъ второго рода будетъ тоже функція отъ u, для которой введемъ такое знакоположеніе:

$$-\int_{a_1}^{x} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = Z(u)\,; \tag{27}$$

это будетъ нечетная функція отъ u, ибо ея производная по u будетъ четная, такъ-какъ изъ (27) и (26) получаемъ:

$$\frac{dZ(u)}{du} = -(x-b)\,,$$

а $(x-b)$ четная функція u, ибо таково x.

Трансцендентная (24) тоже будетъ функція отъ u:

$$e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}} = e^{\int_0^u Z(u)\,du}\,; \tag{28}$$

она обращается въ 1 для $u=0$. Вмѣсто нея мы введемъ функцію, отличающуюся отъ нея постояннымъ множителемъ, положивъ:

$$e^{\int_0^u Z(u)\,du} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}. \qquad (29)$$

Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\int_0^u Z(u)\,du = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}; \qquad (30)$$

далѣе

$$-\int_{a_1}^x \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(0)} = \frac{d\log\Theta(u)}{du}; \qquad (31)$$

такимъ образомъ интегралъ второго рода уже выраженъ чрезъ функцію $\Theta(u)$ и ея производную. Чтобы сдѣлать то-же для интеграла третьяго рода и $1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}$, мы замѣтимъ, что изъ (13) слѣдуетъ, что

$$\overset{\pm}{x}_0 = \varphi(u\pm v), \qquad (32)$$

а потому

$$-\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = Z(u\pm v),$$

и далѣе

$$-\int_{a_1}^x\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_0^u Z(u\pm v)\,du =$$

$$= \int_0^{u\pm v} Z(w)\,dw - \int_0^{\pm v} Z(w)\,dw =$$

$$= \int_0^{u\pm v} Z(w)\,dw - \int_0^{v} Z(w)\,dw.$$

Внося это въ (23), получимъ:

$$1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}=\frac{e^{\int_0^{u+v}Z(w)\,dw}\;.\;e^{\int_0^{u-v}Z(w)\,dw}}{\left[e^{\int_0^{u}Z(w)\,dw}\right]^2.\left[e^{\int_0^{v}Z(w)\,dw}\right]^2},\qquad(33)$$

или на основаніи (29):

$$1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}=\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(u+v)\,.\,\Theta(u-v)}{\Theta^2(u)\,.\,\Theta^2(v)};\qquad(34)$$

внося же въ (22), получимъ:

$$\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)\,(x-a_1)(y-a_1)}\,.\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=Z(v)\,u-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{u+v}Z(w)\,dw+\frac{1}{2}\int_0^{u-v}Z(w)\,dw\qquad(35)$$

или на основаніи (29):

$$\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\,.\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=Z(v)\,.\,u+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}.\qquad(36)$$

Уравненіе, которое даетъ выраженіе интеграла 3-го рода чрезъ Θ-функцію.

Что касается до выраженія $\sqrt{x-a_i}$, гдѣ $i=1, 2, 3$, чрезъ Θ-функцію, то это сдѣлается съ помощію уравненія:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-a_i}}{du^2}=(x-a_i)-\frac{R'(a_i)}{x-a_i},$$

совершенно такъ, какъ то было мною показано въ статьѣ «О введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій», упомянутой выше, и само это уравненіе получается такимъ-же образомъ, какъ и въ случаѣ канонической формы подрадикальной функціи.