ОПРЕДѢЛЕНІЕ

наибольшаго и наименьшаго значенія нѣкоторой величины.

А. А. Маркова.

Въ журналѣ Ліувилля за 1874-й годъ появилась небольшая замѣтка П. Л. Чебышева [1], въ которой между прочимъ упоминается о слѣдующей задачѣ.

Задача.

Дана геометрическая прямая линія AB

$A \qquad\qquad M \qquad\qquad B$

По линіи этой неизвѣстнымъ образомъ распредѣлена масса.

Извѣстны только вся масса, распредѣленная по AB, центръ тяжести этой массы и моментъ инерціи ея относительно центра тяжести.

Требуется опредѣлить высшій и низшій предѣлъ для массы, которая можетъ при этихъ данныхъ придтись на нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ AM всей прямой AB.

Не останавливаясь на изслѣдованіи вопроса, знаменитый ученый сообщаетъ прямо окончательный результатъ.

---

[1] Sur les valeurs limites des intégrales.

Какъ онъ пришелъ къ своему результату, остается неизвѣстнымъ и, на сколько я знаю, до сихъ поръ никѣмъ другимъ также не былъ указанъ путь для рѣшенія этого.

Между тѣмъ, по своеобразности своего характера, вопросъ этотъ заслуживаетъ вниманія.

Въ виду всѣхъ этихъ обстоятельствъ я надѣюсь, что настоящее мое разсужденіе, приводящее къ рѣшенію его, не будетъ лишено интереса.

Данныя.

Обозначимъ длину AB буквою l, а длину AM буквою x.

Пусть вся масса прямой AB сосредоточена въ точкахъ

$$N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$$

причемъ

$$AN_1 = y_1, AN_2 = y_2, AN_3 = y_3, \ldots$$

и массы, приходящіяся на эти точки, соотвѣтственно равны

$$m_1, m_2, m_3, \ldots.$$

Согласно условіямъ вопроса, намъ извѣстны

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots = \Sigma m = p$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots\ldots = \Sigma m y = pd$$

$$m_1(d-y_1)^2 + m_2(d-y_2)^2 + m_3(d-y_3)^2 + \ldots = \Sigma m y^2 - pd^2 = k$$

Число же всѣхъ точекъ N, распредѣленіе ихъ по AB и распредѣленіе по этимъ точкамъ всей массы p остаются неопредѣленными.

Надо распорядиться этими неопредѣленными такъ, чтобы масса отрѣзка AM достигала своего наибольшаго или наименьшаго значенія.

Мы займемся сначала разысканіемъ maximum-а массы, приходящейся на AM.

Преобразованіе вопроса.

Прежде всего покажемъ, что число точекъ N, не лишенныхъ массы, можетъ быть сведено къ т р е м ъ:

1) На отрѣзкѣ MB находятся двѣ или болѣе точекъ N.

$A \qquad\qquad M \qquad N \quad P N' \qquad B$

Пусть будутъ N и N' какія нибудь двѣ точки на MB не лишенныя массы; въ первой сосредоточена масса m, во второй m'.

Я говорю, что, не измѣняя ни одного изъ нашихъ данныхъ, можно часть μ массы $m + m'$ перенести въ точку A, а другую часть $\nu = m + m' - \mu$ въ нѣкоторую точку P, лежащую между N и N'.

Для этой цѣли нужно удовлетворить только уравненіямъ:

$$\mu + \nu = m + m'$$

$$\nu z = my + m'y'$$

$$\nu z^2 = my^2 + m'y'^2,$$

гдѣ

$$z = AP, y = AN, y' = AN'.$$

Уравненія же эти даютъ:

$$z = \frac{my^2 + m'y'^2}{my + m'y'}, y' - z = \frac{my(y'-y)}{my + m'y'} > 0, z - y = \frac{m'y'(y'-y)}{my + m'y'} > 0$$

$$\nu = \frac{(my + m'y')^2}{my^2 + m'y'^2}, \mu = m + m' - \nu =$$

$$= \frac{(m + m')(my^2 + m'y'^2) - (my + m'y')^2}{my^2 + m'y'^2} = \frac{mm'(y'-y)^2}{my^2 + m'y'^2} > 0.$$

И такъ, дѣйствительно указанное нами преобразованіе возможно и притомъ увеличиваетъ массу отрѣзка AM.

Отсюда заключаемъ, что при maximum-ѣ массы AM на MB можетъ находиться только одна точка N, нелишенная массы.

При этомъ точку M мы причисляемъ къ AM, а не къ MB.

2) На отрѣзкѣ AM, не считая концовъ его, имѣемъ двѣ или болѣе точекъ N.

$$\overline{A \quad N \quad P \quad N' \quad M \quad B}$$

Пусть будутъ N и N' двѣ нелишенныя массы точки на AM.

Разсуждая по прежнему, всю массу этихъ точекъ можно сосредоточить въ A и въ нѣкоторой точкѣ P на NN', причемъ всѣ наши данныя равно какъ и масса AM останутся безъ измѣненія.

Отсюда заключаемъ, что вся масса AM можетъ быть сосредоточена въ концахъ A и M и еще въ нѣкоторой точкѣ этого отрѣзка.

3) Пусть не лишены массы на AM нѣкоторая точка N и на MB нѣкоторая точка N', причемъ N не совпадаетъ ни съ A ни съ M и N' не совпадаетъ съ M.

$$\overline{A \quad N \quad M \quad N' \quad B}$$

Я говорю, что можно сосредоточить въ A и M или всю массу N съ частью массы N' или часть массы N и всю массу N'. Для доказательства обозначимъ массу N черезъ m, массу N' черезъ m', а разстоянія AN и AN' соотвѣтственно буквами y и y'.

За-тѣмъ опредѣлимъ два числа

$$m_0 = \frac{y'(y'-x)}{y(x-y)} m' \text{ и } m'_0 = \frac{y(x-y)}{y'(y'-x)} m.$$

При этомъ навѣрно окажется, что

$$\text{либо } m_0 \leqq m \text{ либо } m'_0 \leqq m'$$

такъ какъ

$$m_0 m'_0 = m m'.$$

Въ первомъ случаѣ не трудно убѣдиться, что вся масса m', сосредоточенная въ N, съ массою m_0, находящеюся въ N, могутъ быть размѣщены на точки A и M; а именно, на точку A придется масса

$$\frac{m_0 m'(y'-y)^2}{m_0 y^2 + m' y'^2},$$

а на точку M масса

$$\frac{(m_0 y + m' y')^2}{m_0 y^2 + m' y'^2}.$$

Точно такъ-же при

$$m'_0 \leqq m'$$

всю массу m точки N съ массою m'_0, находящеюся въ N', можно разложить на точки A и M, при чемъ на точку A придется масса

$$\frac{m m'_0(y'-y)^2}{m y^2 + m'_0 y'^2},$$

а на M масса

$$\frac{(m y + m'_0 y')^2}{m y^2 + m'_0 y'^2}.$$

Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ указанное нами преобразованіе не измѣняетъ данныхъ и увеличиваетъ массу отрѣзка AM.

И такъ, не нарушая ни одного изъ нашихъ данныхъ и не уменьшая массы AM, можно сосредоточить всю массу AB въ концахъ A и M отрѣзка AM и еще въ нѣкоторой точкѣ N.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ такое сосредоточеніе массы AB мы будемъ считать выполненнымъ.

Рѣшеніе.

Обозначимъ разстояніе AN буквою y, а массы точекъ A, M и N соотвѣтственно буквами

$$a,\ b,\ m.$$

Величины эти должны удовлетворять тремъ уравненіямъ:

$$a+b+m=p$$

$$bx+my=pd$$

$$bx^2+my^2=k+pd^2,$$

которыя однако не опредѣляютъ ихъ вполнѣ.

Остающеюся здѣсь неопредѣленностью надо воспользоваться такъ, чтобы масса AM достигала наибольшей величины.

Для этой цѣли, считая y даннымъ, рѣшимъ наши уравненія относительно a, b и m.

Такимъ образомъ получимъ:

$$b=\frac{pdy-(k+pd^2)}{x(y-x)}=\frac{(k+pd^2)-pdy}{x(x-y)}$$

$$m=\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)}=\frac{pdx-(k+pd^2)}{y(x-y)}$$

$$a=\frac{pxy+k+pd^2-pdx-pdy}{xy}.$$

По самому существу вопроса

$$a,\ b \text{ и } m$$

должны быть числами положительными.

Поэтому

$$y < x \text{ при } pdx-(k+pd^2) > 0$$

и

$$y > x \text{ при } pdx-(k+pd^2) < 0;$$

если же

$$pdx-(k+pd^2)=0,$$

то вся масса AB можетъ быть сосредоточена въ точкахъ A и M.

Отсюда нетрудно заключить, что при

$$x \geqq d+\frac{k}{pd}$$

высшій предѣлъ для массы AM равняется массѣ p всей прямой AB.

Если же

$$x < d+\frac{k}{pd},$$

то на отрѣзкѣ AM расположена только масса

$$a+b=p-m=p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)};$$

чѣмъ больше y, тѣмъ масса эта больше.

Что-же касается y, то эта величина ограничивается только двумя неравенствами.

$$y \leqq l$$

$$a=\frac{pxy+k+pd^2-pdx-pdy}{xy} \geqq 0.$$

Если теперь

$$pxl+k+pd^2-pdx-pdl \geqq 0, \text{ т. е. } x \geqq d-\frac{k}{p(l-d)},$$

то наибольшее возможное значение

$$a+b=p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)}$$

соотвѣтствуетъ $y=l$ и равняется

$$p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{l(l-x)}=\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)}.$$

Если-же

$$pxl+k+pd^2-pdx-pdl<0, \text{ т. е. } x<d-\frac{k}{p(l-d)},$$

то наибольшее возможное значенiе $a+b$ соотвѣтствуетъ тому значенiю y, при которомъ

$$pxy+k+pd^2-pdx-pdy$$

обращается въ нуль, т. е.

$$y=\frac{k+pd^2-pdx}{p(d-x)}.$$

Подставляя это значенiе y въ нашу формулу

$$a+b=p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)},$$

получаемъ для высшаго предѣла массы AM такое выраженiе

$$p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{\dfrac{k+pd^2-pdx}{p(d-x)}\cdot\dfrac{k+p(d-x)^2}{p(d-x)}}=p-\frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}=\frac{kp}{k+p(d-x)^2}$$

И такъ

при $x\geqq d+\dfrac{k}{pd}$ высшiй предѣлъ для массы AM равенъ p

при $d+\dfrac{k}{pd}>x\geqq d-\dfrac{k}{p(l-d)}$ » » » » $\dfrac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)}$

при $d-\dfrac{k}{p(l-d)}>x$ » » » » $\dfrac{kp}{k+p(d-x)^2}$.

Подобными же разсужденіями можно было бы опредѣлить и низшій предѣлъ для массы AM; но такой предѣлъ можно найдти гораздо проще, такъ какъ онъ соотвѣтствуетъ maximum-у массы MB.

Слѣдовательно, все сводится къ опредѣленію высшаго предѣла массы MB.

И на основаніи предыдущаго заключаемъ, что*

при $l-x \geqq l-d+\frac{k}{p(l-d)}$ высшій предѣлъ массы MB равняется p

при $l-d+\frac{k}{p(l-d)} > l-x \geqq l-d-\frac{k}{pd}$

высшій предѣлъ для массы MB равенъ $p-\frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$

и наконецъ при $l-d-\frac{k}{pd} > l-x$

высшій предѣлъ для массы MB равенъ $p-\frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}$

И такъ,

при $x > d+\frac{k}{pd}$ низшій предѣлъ для массы AM равенъ $\frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}$

при $d+\frac{k}{dp} \geqq x > d-\frac{k}{p(l-d)}$ » » » » » $\frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$

и при $d-\frac{k}{p(l-d)} \geqq x$ » » » » » нулю.

Всѣ эти результаты мы находимъ и въ замѣткѣ П. Л. Чебышева.

Замѣтимъ здѣсь кстати, что всѣ неравенства для x можно писать и съ двумя знаками, такъ какъ при $x=d+\frac{k}{pd}$

---

* Надо замѣнить x на $l-x$ и d на $l-d$.

$$p = \frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)} \text{ и } \frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2} = \frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$$

а при $x = d - \dfrac{k}{p(l-d)}$

$$\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)} = \frac{kp}{k+p(d-x)^2} \text{ и } \frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx} = 0.$$

С. Петербургъ.

1883.