ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

нѣкоторыхъ неравенствъ П. Л. Чебышева.

(Съ таблицею чертежей).

А. А. Маркова.

Въ небольшой замѣткѣ «Sur les valeurs limites des intégrales», помѣщенной въ журналѣ Ліувилля за 1874 годъ, П. Л. Чебышевъ высказалъ между прочимъ слѣдующую теорему.

Теорема.

Пусть $f(z)$ какая нибудь функція отъ z, а $\frac{\Phi(x)}{\psi(x)}$ одна изъ дробей, подходящихъ къ

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z} dz,$$

при томъ $f(z)$ въ предѣлахъ интегрированія, т. е. отъ $z=a$ до $z=b$ сохраняетъ постоянно знакъ $+$.

Пусть далѣе

$$\psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_l)\ldots(x-x_n),$$

гдѣ

$$a<x_1<x_2<\ldots\ldots<x_k<\ldots\ldots<x_l<\ldots\ldots<x_n<b.$$

Въ такомъ случаѣ должны имѣть мѣсто слѣдующія неравенства:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz > \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi(x_{l-1})}{\psi'(x_{l-1})} + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)} > \int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz.$$

Прошло почти десять лѣтъ и однако доказательства этихъ неравенствъ мы нигдѣ не встрѣчаемъ.

Только отчасти путь къ доказательству намѣченъ самимъ П. Л. Чебышевымъ.

Послѣ нѣсколькихъ безплодныхъ попытокъ мнѣ удалось наконецъ найдти весьма простое доказательство выше указанныхъ неравенствъ вмѣстѣ съ нижеслѣдующими:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} < \int_a^{x_k} f(z)\,dz$$

и

$$\int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)} < \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz.$$

Это доказательство составляетъ предметъ настоящей замѣтки.

Основныя формулы.

Прежде всего вспомнимъ, что

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z} f(z)\,dz\,,\ \varphi(x_i) = \int_a^b \frac{\psi(z)}{z-x_i} f(z)\,dz$$

и

$$\frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)} = \int_a^b \frac{\psi(z)}{(z-x_i)\psi'(x_i)} f(z)\,dz.$$

Далѣе, если $\Phi(z)$ цѣлая функція отъ z не выше какъ $2n-1$-ой степени, то

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\psi(z)\,.\,\theta(z),$$

гдѣ

$$\Phi_0(z)=\Phi(x_1)\frac{\psi(z)}{(z-x_1)\psi'(x_1)}+$$

$$+\Phi(x_2)\frac{\psi(z)}{(z-x_2)\psi'(x_2)}+\ldots+\Phi(x_n)\frac{\psi(z)}{(z-x_n)\psi'(x_n)},$$

а $\theta(z)$ означаетъ нѣкоторую цѣлую функцію отъ z $n-1$-ой или низшей степени.

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\int_a^b \Phi(z)f(z)dz=\Phi(x_1)\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+$$

$$+\Phi(x_2)\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\Phi(x_n)\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Въ частности

$$\int_a^b f(z)\,dz=\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})}+\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Приведеніе всѣхъ неравенствъ къ двумъ.

Нетрудно видѣть, что всѣ указанныя нами неравенства могутъ быть выведены изъ двухъ:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz<\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})},$$

и

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\,dz<\frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})}+\frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})}+\ldots+\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Дѣйствительно, замѣняя здѣсь $k-1$ на l, а $l+1$ на k, получимъ:

$$\int_a^{x_l} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_k}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Отсюда затѣмъ, принимая во вниманіе равенство

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})} + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

выводимъ послѣдовательно

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz - \int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz$$

$$> \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_l}^{b} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_l} f(z)\,dz$$

$$> \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

$$\int_a^{x_k} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_{x_k}^{b} f(z)\,dz$$

$$> \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}$$

и наконецъ

$$\int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_k} f(z)\,dz - \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz$$

$$< \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)}.$$

Простѣйшіе частные случаи.

Изъ равенства

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

непосредственно слѣдуютъ неравенства

$$\int_a^{x_n} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

и

$$\int_{x_1}^b f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Эти простѣйшіе частные случаи изъ всѣхъ дальнѣйшихъ нашихъ разсужденій мы исключимъ.

Доказательство неравенства

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Пусть

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z-x_1)\psi'(x_1)} + \frac{\psi(z)}{(z-x_2)\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(z)}{(z-x_{k-1})\psi'(x_{k-1})}$$

и

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z)\,.\,\theta(z),$$

гдѣ $\theta(z)$ нѣкоторая цѣлая функція $n-2$-ой степени отъ z.

Тогда по замѣченному

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Подберемъ теперь $\theta(z)$ такъ, чтобы производная

$$\Phi'(z) = \Phi_0'(z) + \psi'(z).\theta(z) + \psi(z).\theta'(z)$$

обращалась въ нуль при

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n.$$

Требованіе наше сводится къ $n-1$ уравненіямъ слѣдующаго вида

$$\theta(x_i) = -\frac{\Phi'_0(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

гдѣ i надо полагать послѣдовательно равнымъ

$$1, 2, 3, \ldots, k-2, k, k+1, \ldots, n.$$

И не трудно видѣть, что послѣднія уравненія вполнѣ опредѣляютъ цѣлую функцію $\theta(z)$ $n-2$-й степени. А именно,

$$\theta(z) = -\sum \frac{\Phi'_0(x_i).\psi(z).(x_i - x_{k-1})}{\{\psi'(x_i)\}^2(z-x_i)(z-x_{k-1})}, [i = 1, 2, 3, \ldots, n]$$

Подобравъ такимъ образомъ $\theta(z)$, мы можемъ сказать, что

$$\Phi'(z)$$

обращается въ нуль

$$n-1 \text{ разъ}$$

при

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$$

и еще

$$n-2 \text{ разъ}$$

при нѣкоторыхъ значеніяхъ z въ промежуткахъ

отъ x_1 до x_2, отъ x_2 до x_3, ..., отъ x_{k-2} до x_{k-1},

отъ x_k до x_{k+1}, отъ x_{k+2} до x_{k+3}, ..., отъ x_{n-1} до x_n,

въ каждомъ промежуткѣ по разу; такъ-какъ

$$\Phi(x_1)=\Phi(x_2)=\ldots\ldots=\Phi(x_{k-2})=\Phi(x_{k-1})=1$$

и

$$\Phi(x_k)=\Phi(x_{k+1})=\Phi(x_{k+2})=\ldots=\Phi(x_{n-1})=\Phi(x_n)=0.$$

Степень цѣлой функціи $\Phi'(z)$ равна $2n-3$.

Слѣдовательно, всѣ нули ея нами пересчитаны. Ни одинъ изъ нихъ не лежитъ въ промежуткѣ

от x_{k-1} до x_k

и не совпадаетъ съ x_{k-1}.

Кромѣ того

$$1=\Phi(x_{k-1})>\Phi(x_k)=0.$$

По этому

$$\Phi'(x_{k-1})<0$$

$$\Phi'(x_k-\varepsilon)<0,\ \Phi'(x_{k+1}-\varepsilon)<0,\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\Phi'(x_{n-1}-\varepsilon)<0,\ \Phi'(x_n-\varepsilon)<0$$

$$\Phi'(x_k+\varepsilon)>0,\ \Phi'(x_{k+1}+\varepsilon)>0,\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\Phi'(x_{n-1}+\varepsilon)>0,\ \Phi'(x_n+h)>0$$

$$\Phi'(x_{k-2}+\varepsilon)>0,\ \Phi'(x_{k-3}+\varepsilon)>0,\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\Phi'(x_2+\varepsilon)>0,\ \Phi'(x_1+\varepsilon)>0$$

$$\Phi'(x_{k-2}-\varepsilon)<0,\ \Phi'(x_{k-3}-\varepsilon)<0,\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\Phi'(x_2-\varepsilon)<0,\ \Phi'(x_1-h)<0.$$

Здѣсь ε и h означаютъ положительныя количества: первое безконечно малое, второе произвольное.

Отсюда не трудно заключить, что

$$\Phi(z)$$

при всѣхъ значеніяхъ z не меньше нуля и сверхъ того при

$$z \leqq x_{k-1}$$

не меньше единицы.

Полагая

$$y = \Phi(z),$$

будемъ имѣть въ кривой, представленной на фиг. 1-й, схематическое изображеніе хода этой функціи.

Возвращаясь теперь къ интегралу

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz = \frac{\Phi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\Phi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\Phi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})},$$

мы можемъ написать слѣдующія неравенства

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} \Phi(z) f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz.$$

И такъ

$$\frac{\Phi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\Phi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\Phi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz,$$

ч. и т. д.

Доказательство неравенства

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\, dz < \frac{\Phi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\Phi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\Phi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Пусть

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z-x_{l+1})\psi'(x_{l+1})} + \frac{\psi(z)}{(z-x_{l+2})\psi'(x_{l+2})} + \dots$$

$$\dots + \frac{\psi(z)}{(z-x_n)\psi'(x_n)}$$

и

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z).\theta(z),$$

гдѣ $\theta(z)$ цѣлая функція $n-2$-ой степени отъ z.

Для опредѣленія $\theta(z)$ постановимъ $n-1$ уравненій слѣдующаго вида

$$\theta(x_i) = -\frac{\Phi'_0(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

гдѣ

$$i = 1, 2, 3, \dots l, l+2, l+3, \dots, n$$

такъ что

$$\theta(z) = -\sum \frac{(x_i - x_{l+1}).\Phi'_0(x_i).\psi(z)}{\{\psi'(x_i)\}^2(z-x_i)(z-x_{l+1})}, [i = 1, 2, 3, \dots, n].$$

Въ такомъ случаѣ не трудно убѣдиться, что

$$\Phi(z)$$

при всѣхъ значеніяхъ z не меньше нуля и сверхъ того при $z \geqq x_{l+1}$, не меньше единицы.

Полагая $y = \Phi(z)$, ходъ разсматриваемой нами функціи можно изобразить кривою, представленною на фиг. 2-ой.

Подобравъ такимъ образомъ функцію $\Phi(z)$, получимъ

$$\frac{\Phi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})}+\frac{\Phi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})}+\ldots+\frac{\Phi(x_n)}{\psi'(x_n)}=$$

$$=\int_a^b \Phi(z)f(z)dz > \int_{x_{l+1}}^b f(z)dz$$

ч. и т. д.

Для доказательства обоихъ неравенствъ намъ пришлось повторить одни и тѣ же разсужденія два раза.

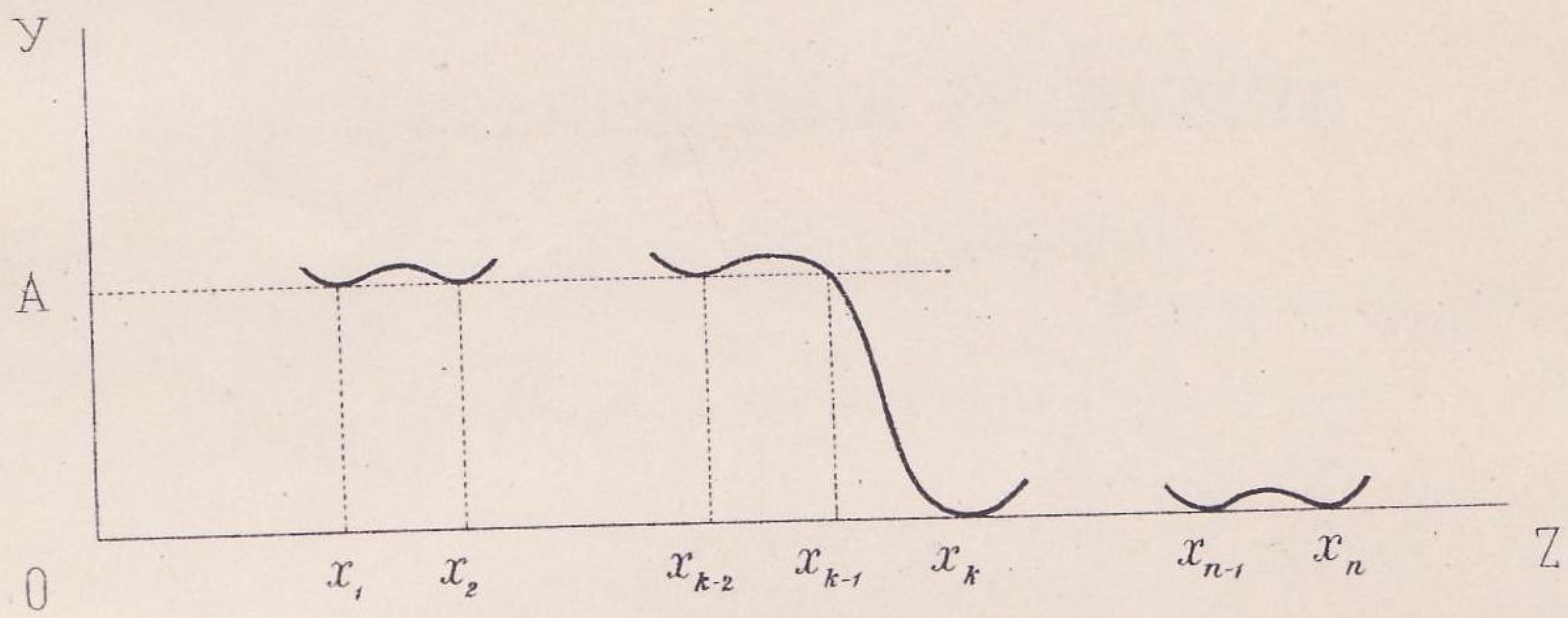
Такимъ образомъ неравенства Чебышева доказаны вполнѣ.

Въ заключеніе моей замѣтки считаю пріятнымъ долгомъ выразить живѣйшую благодарность К. А. Поссе, который обратилъ мое вниманіе на разобранный выше вопросъ и показалъ рѣшеніе его для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

А. Марковъ.

30-го (18) декабря
1883 года.

Фиг. 1.



Фиг. 2.

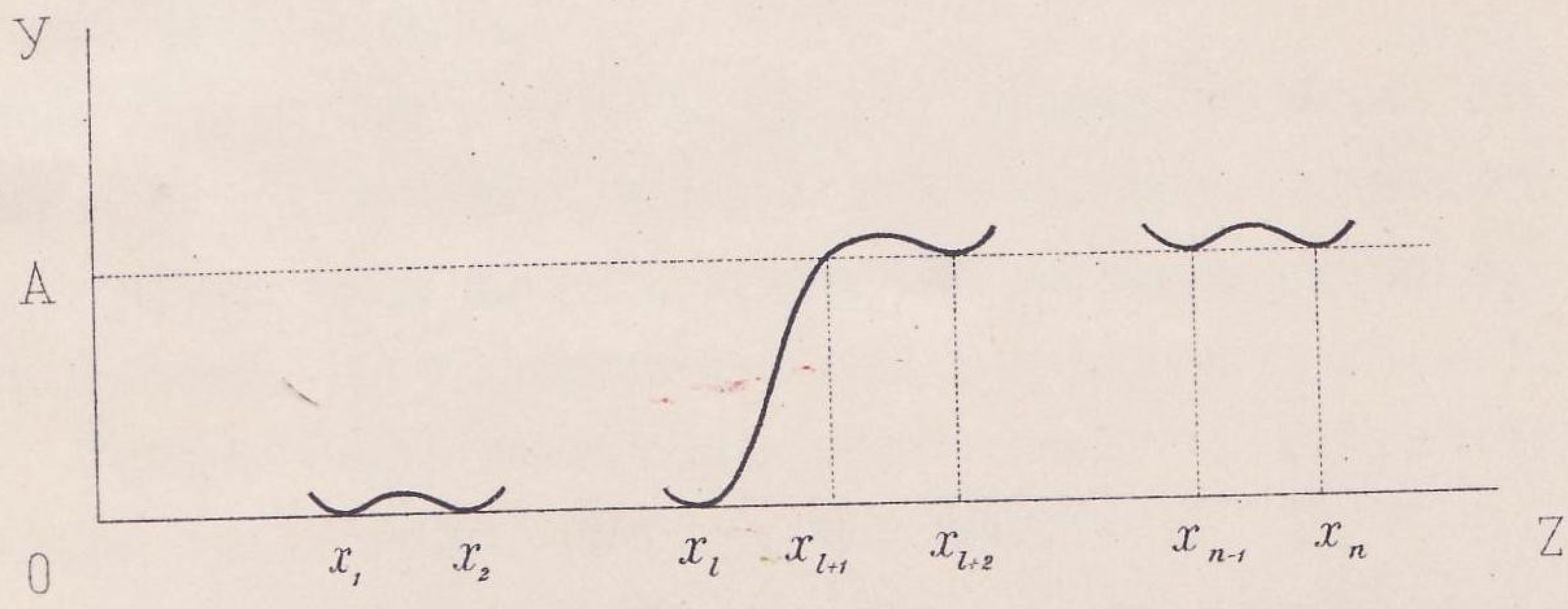


РИС. АВТОРЪ. ЛИТ. БЕВЕРСДОРФЪ, ХАРЬКОВЪ.