ОБЪ УСЛОВІЯХЪ

ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНІЯ

$$\frac{d^3u}{dx^3}+x^m u=0.$$

П. С. Флорова.

§ 1. Непосредственно очевидны два случая, въ которыхъ уравненіе

$$\frac{d^3u}{dx^3}+x^m u=0 \tag{1}$$

интегрируется: это $m=0$ и $m=-3$. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ полный его интегралъ выражается, какъ извѣстно, отношеніемъ

$$u=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+c_3e^{r_3x};$$

во второмъ — отношеніемъ

$$u=c_1e^{\varrho_1x}+c_2e^{\varrho_2x}+c_3e^{\varrho_3x},$$

гдѣ c_1 c_2 c_3 произвольныя постоянныя, а r и ϱ корни уравненій:

$$r^3+1=0,\qquad \varrho(\varrho-1)(\varrho-2)+1=0.$$

§ 2. Для опредѣленія другихъ случаевъ интегрируемости уравненія (1) умножаемъ его на x^{-m} и потомъ дифференцируемъ; результатомъ будетъ уравненіе

$$\frac{d^3\omega}{dx^3} - \frac{m}{x}\frac{d^2\omega}{dx^2} + x^m\omega = 0,$$

въ которомъ $\omega = \frac{du}{dx}$. Измѣнивъ въ этомъ уравненіи перемѣнное независимое по формулѣ

$$x = \left(\frac{c+1}{a}\xi\right)^{\frac{1}{c+1}},$$

гдѣ a и c нѣкоторыя постоянныя, связанныя между собою отношеніемъ

$$a^{m+3} = (c+1)^{m-3c},$$

найдемъ:

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3} - \frac{m-3c}{(c+1)\xi}\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{c(c-m-1)}{(c+1)^2\xi^2}\frac{d\omega}{d\xi} + \xi^{\frac{m-3c}{c+1}}\omega = 0.$$

Полагая здѣсь

$$c = m + 1,$$

получимъ

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3} + \frac{2m+3}{(m+2)\xi}\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \xi^{-\frac{2m+3}{m+2}}\omega = 0.$$

Умноживъ это уравненіе на $\xi^{\frac{2m+3}{m+2}}$ и проинтегрировавъ результатъ, будемъ имѣть:

$$\frac{d^3\theta}{d\xi^3} + \xi^{-\frac{2m+3}{m+2}}\theta = 0,$$

гдѣ $\theta = \int \omega d\xi$.

*

§ 3. Если въ уравненіи (1) измѣнимъ перемѣнное независимое по формулѣ

$$x = -\frac{1}{\xi},$$

то, въ силу отношенія

$$(\alpha) \qquad \frac{d^3u}{dx^3} = \xi^4 \frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 u),$$

получимъ

$$\frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 u) + \xi^{-(m+4)} u = 0.$$

Отсюда, положивъ

$$\xi^2 u = v,$$

найдемъ

$$\frac{d^3v}{d\xi^3} + \xi^{-(m+6)} v = 0.$$

§ 4. Такимъ образомъ отъ уравненія (1), модуль котораго m, можно перейдти къ уравненіямъ, модули которыхъ таковы:

$$-(m+6) \quad \text{и} \quad -\frac{2m+3}{m+2}.$$

Въ свою очередь упомянутыя сейчасъ уравненія способны обратиться въ уравненія съ слѣдующими модулями:

$$-\frac{2m+9}{m+4} \quad \text{и} \quad -\frac{4m+9}{m+2}.$$

Сказаннаго вполнѣ достаточно для того, чтобы опредѣлить всѣ случаи, въ которыхъ уравненіе (1) можетъ быть проинтегрировано помощью преобразованій, указанныхъ въ двухъ предыдущихъ параграфахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ преобразованій, необходимыхъ для измѣненія модуля m въ $-\frac{2m+9}{m+4}$, назовемъ одною операціей, то понятно, что, по совершеніи i такихъ операцій надъ уравненіемъ (1), получимъ уравненіе съ слѣдующимъ модулемъ:

$$-\frac{(3i-1)m+9i}{im+3i+1}. \qquad (\alpha)$$

Подобнымъ образомъ отъ модуля $-\frac{4m+9}{m+2}$ перейдемъ къ такому модулю

$$-\frac{(3i+1)m+9i}{im+3i-1}. \qquad (\beta)$$

Если теперь каждое изъ уравненій, модули которыхъ (α) и (β), подвергнемъ преобразованію, указанному въ предыдущемъ параграфѣ, то измѣнимъ эти модули въ такіе:

$$-\frac{(3i+1)m+9i+6}{im+3i+1} \qquad (\gamma)$$

$$-\frac{(3i-1)m+9i-6}{im+3i-1}. \qquad (\delta)$$

Приравнявъ формулы (α), (β), (γ), (δ) сначала нулю, а потомъ -3, получимъ:

$$m=\frac{-9i}{3i-1}$$

$$m=\frac{-9i}{3i+1}$$

$$m=-\frac{9i+6}{3i+1}$$

$$m = -\frac{9i-6}{3i-1}$$

$$m = -3.$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (1) интегрируется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$m = -3 \pm \frac{3}{3i-1},$$

гдѣ i какое угодно положительное или отрицательное цѣлое число. Понятно, что можно даже полагать $i = \pm \infty$, ибо положеніе это даетъ $m = -3$.