

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

П Р И

Императорскомъ Харьбовскомъ Университетѣ.

1884 года.

I.

Науково-Дослідний Институт	
БІБЛІОТЕКА	
Инв. №	557
Математики і Механіки ХДУ	

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1884.

no. 55 44542
84

58
69
70

COORSHENI

N

ПРОТОКОЛЫ ЗАСЕДАНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

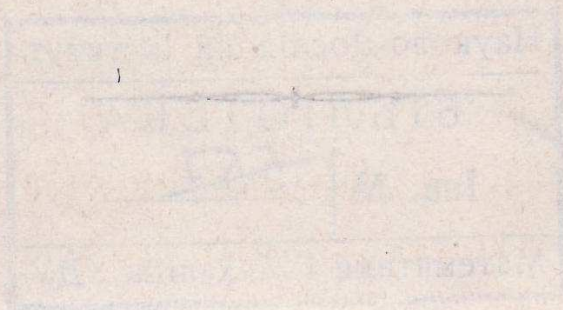
И И

Напечатано по опредѣленію совѣта Императорскаго Харь-
ковскаго Университета.

Ректоръ Г. Цѣхановецкій.

1884 год.

1.



ХАРЬКОВЪ

Въ Университетской Типографіи

1884

K-583

Центральна наукова бібліотека	
ХНУ ім. В.І.Каразіна	
інв. №	№2

1720 554752

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ:

20-го января 1884 года.	1 — 2.
24-го февраля — —	3 — 4.

СООБЩЕНІЯ:

1. П. С. Флорова, Обь уравненіяхъ Рикатти.	5 — 36.
2. А. П. Грузинцева, Распространеніе способа Абуль-Джуда для опредѣленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ.	37 — 40.
3. В. П. Алексѣевскаго, Обь интегрированіи урав- ненія $\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{\alpha}{z} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0$	41 — 64.
4. П. М. Новикова, О значеніи, какое можно придать въ динамикѣ второй вариации опредѣленныхъ интеграловъ Гамильтона и наименьшаго дѣйствія.	65 — 72.
5. И. Пташникаго, О разложеніи въ рядъ Мак- лорена нѣкоторыхъ функцій со многими переменными	73 — 79.
6. В. П. Алексѣевскаго, Замѣтка обь обобщеніи уравненія Рикатти.	80 — 82.
7. А. А. Маркова, Опредѣленіе нѣкоторой функ- ціи по условію наименѣе уклоняться отъ нуля	83 — 92.

СОДЕРЖАНИЕ

Протокол заседаний:

20-го января 1884 года 1—3
24-го февраля — — — — — 3—4

Содержание:

1. Н. С. Фадеев, Обр. уравнений Рундта 5—36
2. А. В. Гурьев, Рациональные функции
Алгебра-Джета для определения степеней полиномов
и чисел неопределенности 37—40
3. В. Н. Алексеев, Обр. непрерывных функций
и интегралов 41—61
4. Н. М. Пономев, О значениях, которые можно
присвоить коэффициентам второй степени
интегралов Тейлора и наименьшего действия 65—73

Поправка. — Въ предыдущей тетради («Сообщения» 1883 г.), стр. 129, строка 7 снизу

напечатано:

$$u = c_1 e^{\xi_1 x} + c_2 e^{\xi_2 x} + c_3 e^{\xi_3 x},$$

должно быть:

$$u = c_1 x^{\xi_1} + c_2 x^{\xi_2} + c_3 x^{\xi_3}$$

ПРОТОКОЛЬ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРА-
ТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

20 января 1884 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. О. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, М. С. Косенко, С. А. Раевскій, И. К. Шейдтъ, А. В. Маевскій, А. А. Блюшниковъ, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

1. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о вновь полученныхъ книгахъ, а именно:

- a) Кіевскія университетскія извѣстія, №№ 11 и 12.
- b) Mathesis, № 12, 1883. Т. III.
- c) Journal de mathématiques élémentaires. 2 série, 7 année (1883). № 12.
- d) Journal de mathématiques spéciales. 2 série, 7 année (1883). № 12.
- e) Histoire de l'hypothèse des ondes cosmiques composée pour l'explication des formes cométaires. Par *Th. Brédichin*. 1883. 23 Oct.

f) Supplément à l'histoire de l'hypothèse des ondes cosmiques composée pour l'explication des formes cométaires. *Th. Brédichin*. 1883. 17 Nov.

g) Sur quelques anomalies apparentes dans la structure des queues cométaires, par *Th. Brédichin*. 1883. 13 Décembre.

2. О составленіи А. А. Ключниковымъ каталога библіотеки общества. Положено выразить благодарность А. А. Ключникову за этотъ трудъ.

3. В. П. Алексѣевскій прочелъ свою замѣтку объ уравненіи вида: $y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} = y$.

4. П. С. Флоровъ — объ уравненіи вида:

$$x^2 u'' + (2x + 1)u' + nu = 0.$$

5. К. А. Андреевъ доложилъ собранію статью А. А. Маркова: «Объ одномъ неравенствѣ Чебышева».

6. Г. предѣдательствовавшій доложилъ собранію о присылкѣ г. Яковомъ Постоевымъ изъ Курска рѣшенія задачи, предложенной г. Аршауловымъ.

7. М. С. Косенко указалъ приемъ рѣшенія той-же задачи.

8. П. С. Флоровъ сообщилъ свое рѣшеніе той-же задачи.

9. М. Θ. Ковальскій изложилъ свой приемъ рѣшенія той-же задачи.

Journal de mathématiques élémentaires 2 série 7 année (1883) № 12.
Journal de mathématiques spéciales 2 série 7 année (1883) № 12.
Histoire de l'hypothèse des ondes cosmiques composée pour l'explication des formes cométaires. Par Th. Brédichin. 1883.

23 Oct

— 4 —

Протоколь засѣданія 24-го февраля.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. О. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, А. А. Ключниковъ Г. В. Левицкій, Н. Д. Пильчиковъ, М. С. Косенко, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

1. Г. Предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о полученіи обществомъ слѣдующихъ изданій:

1) Математическій сборникъ, издаваемый московскимъ математическимъ обществомъ, Т. XI. выпускъ 2.

2) Journal de mathématiques élémentaires, № 1, 1884. 2 s.

3) Journal de mathématiques spéciales, № 1. 1884. 2 s.

4) Bulletin de la société mathématiques de France. Т. XI. № 5 et dernier.

5) Кіевскія университетскія извѣстія. № 1, 1884.

6) *Bredichin*, Sur les anomalies apparentes dans la structure de la grande comète de 1744. 19 Janvier. 1884.

7) Mathesis. Т. IV. №№ 1 и 2. 1884.

2. Онъ-же сообщилъ о полученіи рѣшенія г. студентомъ Гусаковскимъ задачи г. Аршаулова.

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: «Опытъ изученія стационарнаго состоянія упругой изотропной среды».

4. Г. студентъ *И. А. Гусаковскій* изложилъ свое рѣшеніе задачи г. Аршаулова.

5. *К. А. Андреевъ* сообщилъ замѣтку, относящуюся къ вопросу о многоугольникахъ Понселе.

6. *Онъ-же* предложилъ отъ имени г. Аршаулова слѣдующую задачу:

«Данъ многоугольникъ какого угодно числа сторонъ. Соединяя середины послѣдовательныхъ сторонъ, получимъ новый многоугольникъ. Тѣмъ-же построениемъ переходимъ отъ найденнаго опять къ новому и т. д. Требуется найти предѣлъ, къ которому приводитъ это построение при безконечномъ его повтореніи».

ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ РИКАТТИ.

П. С. Флорова.

§ I. Дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy}{dx} + ry + py^2 + q = 0, \quad (1)$$

въ которомъ количества r , p и q означаютъ функціи одного только x , принадлежитъ къ разряду не проинтегрированныхъ уравненій. Поэтому умѣстна задача объ отысканіи такихъ соотношеній между количествами r , p и q , при существованіи которыхъ вопросъ объ интегрированіи упомянутаго уравненія можно было бы свести къ квадратурамъ. Рѣшеніе этой задачи мы ставимъ въ зависимость отъ слѣдующихъ свойствъ уравненія (1): отъ способности его сохранять свой видъ послѣ подстановки

$$y = u + v \frac{1}{y_1}$$

гдѣ u и v функціи x , а y_1 новая зависимая; и отъ способности его сполна интегрироваться по одному изъ частныхъ интеграловъ (теорема Эйлера). Эти свойства мы полагаемъ въ основаніе нашего изслѣдованія потому, что ими устанавливается одинъ изъ рациональныхъ методовъ интегрированія уравненія (1):

во многихъ случаяхъ по первому изъ нихъ оказывается возможнымъ найти частный интегралъ этого уравненія; по второму — докончить интеграцію. Въ смыслѣ отысканія признаковъ интегрируемости разсматриваемаго нами уравненія наиболее незамѣнима услуга оказываетъ первое его свойство: оно даетъ возможность, исходя изъ этого уравненія, строить системы новыхъ уравненій, интегралы которыхъ опредѣленнымъ образомъ (помощью нѣкоторыхъ непрерывныхъ дробей) связаны съ интеграломъ исходнаго и которые по виду тождественны съ нимъ; оно даетъ, слѣдовательно, возможность — таково заключеніе а priori — по одному изъ признаковъ интегрируемости уравненія (1), опредѣленному заранѣе, открывать цѣлыя системы ихъ.

Такимъ образомъ тому изслѣдованію уравненія (1), которое мы намѣрены предпринять, должны предшествовать двѣ операціи: непосредственное опредѣленіе одного изъ признаковъ интегрируемости этого уравненія и построеніе системы уравненій по виду подобныхъ данному. Мы произведемъ сначала вторую операцію. Предварительно замѣтимъ, что, нисколько не уменьшая общности уравненія (1), его можно разсматривать подъ видомъ

$$\frac{dz}{dx} + Pz^2 = Q, \quad (2)$$

гдѣ P и Q по прежнему функции одного x . Слѣдуетъ это изъ того, что, положивъ

$$y = e^{-\int r dx} z,$$

мы найдемъ для опредѣленія z уравненіе (2), если въ немъ P и Q опредѣлены условіями

$$\left. \begin{aligned} P &= p e^{-\int r dx} \\ Q &= q e^{-\int r dx} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Обращаясь теперь къ уравненію (2), полагаемъ

$$z = u + v \cdot \frac{1}{z_1}.$$

Чтобы результатъ этой подстановки

$$\frac{dz_1}{dx} - \frac{1}{v} (v' + 2Puv)z_1 - \frac{1}{v} (u' + Pu^2 - Q)z_1^2 = Pv$$

получилъ опредѣленный характеръ, нужно функціямъ u и v сообщить частныя значенія. Мы допустимъ

$$u' + Pu^2 = 0, \quad v' + 2Puv = 0,$$

а значитъ допустимъ

$$u = (\beta + \int Pdx)^{-1}, \quad v = \alpha (\beta + \int Pdx)^{-2},$$

гдѣ α и β постоянныя величины. Для такихъ u и v предыдущее уравненіе даетъ

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1^2 = Q_1$$

причемъ

$$P_1 = \frac{Q}{\alpha} (\beta + \int Pdx)^2$$

$$Q_1 = \alpha P (\beta + \int Pdx)^{-2}.$$

Такимъ же образомъ полагая

$$z_1 = (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-1} + \alpha_1 (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-2} \cdot \frac{1}{z_2},$$

мы отъ уравненія для z_1 перейдемъ къ уравненію

$$\frac{dz_2}{dx} + P_2 z_2^2 = Q_2$$

въ которомъ

$$P_2 = \frac{Q_1}{\alpha_1} (\beta_1 + \int P_1 dx)^2$$

$$Q_2 = \alpha_1 P_1 (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-2}.$$

Теперь понятно, что послѣ k преобразованій будемъ имѣть

$$\frac{dz_k}{dx} + P_k z_k^2 = Q_k$$

• причемъ

$$\left. \begin{aligned} P_k &= \frac{Q_{k-1}}{\alpha_{k-1}} \left(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx \right)^2 \\ Q_k &= \alpha_{k-1} P_{k-1} \left(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx \right)^{-2}. \end{aligned} \right\} (4)$$

И такъ система искомымъ уравненій построена. Понятно, что возможны иныя системы; для нашей цѣли достаточно рассмотреть только эту.

Теперь, согласно предназначенному нами пути, нужно еще найти одинъ изъ признаковъ интегрируемости занимающаго насъ уравненія. Чтобы легче ориентироваться въ обозначеніяхъ, мы возьмемъ для этой цѣли уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Hy^2 = G,$$

въ которомъ подъ H и G будемъ разумѣть функціи одного x . Легко подмѣтить, что уравненіе это можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \frac{1}{4H^2} (4GH^3 + 3H'^2 - 2HH'').$$

Дѣйствительно, для этого достаточно сдѣлать подстановку

$$y = \frac{v}{H} + \frac{H'}{2H^2}.$$

Съ другой стороны, подстановка

$$\frac{1}{y} = \frac{u}{G} + \frac{G'}{2G^2}$$

приводитъ то же уравненіе къ такому

$$\frac{du}{dx} + u^2 = \frac{1}{4G^2} (4HG^3 + 3G'^2 - 2GG'').$$

Въ томъ случаѣ, когда $u = v$, вопросъ объ отысканіи y въ функціи x можно считать поконченнымъ, ибо онъ сведется на разрѣшеніе квадратнаго уравненія

$$y^2 - \frac{1}{2H} \left(\frac{H'}{H} - \frac{G'}{G} \right) y = \frac{G}{H}.$$

Но высказанное предположеніе имѣетъ мѣсто лишь при существованіи такого соотношенія между H и G :

$$2HG(H''G - G''H) = 3(H'^2G^2 - G'^2H^2).$$

Такъ какъ

$$\begin{cases} H''G - G''H = (H'G - G'H)' \\ H'^2G^2 - G'^2H^2 = (HG)'(H'G - G'H), \end{cases}$$

то предыдущее соотношеніе даетъ

$$\frac{(H'G - G'H)'}{H'G - G'H} = \frac{3}{2} \frac{(HG)'}{HG}$$

откуда

$$\left(\frac{H}{G}\right)' = 2h \cdot H \left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Интегрируя это и разрѣшая результатъ относительно G , находимъ

$$G = H(g + h \int H dx)^{-2},$$

гдѣ g и h постоянныя величины. Изъ сказаннаго обнаружилось, что уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Hy^2 = H(g + h \int H dx)^{-2}$$

всегда интегрируется и что частный его интегральъ выражается формулой:

$$y = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 4}}{2} (g + h \int H dx)^{-1}.$$

Полный интегральъ того-же уравненія на основаніи теоремы Эйлера выразится, слѣдовательно, отношеніемъ

$$y = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 4}}{2} (g + h \int H dx)^{-1} + \frac{1}{H} l'g \left\{ c + (g + h \int H dx) \frac{\mp \sqrt{h^2 + 4}}{h} \right\}$$

гдѣ $l'g = \frac{d}{dx} lg$, а c постоянная произвольная.

Теперь нами вполне подготовлена почва для отысканія признаковъ интегрируемости уравненія (2). Переходимъ къ самому отысканію.

§ II. Предположимъ, что коэффициенты k -го уравненія данной выше системы удовлетворяютъ найденному признаку интегрируемости и посмотримъ, какая въ этомъ случаѣ существуетъ зависимость между P и Q , коэффициентами исходнаго уравненія. Согласно съ предположеніемъ имѣемъ

$$Q_k = P_k(g + h \int P_k dx)^{-2} \quad (5)$$

что по замѣнѣ Q_k его значеніемъ изъ (4) даетъ:

$$P_k(g + h \int P_k dx)^{-2} = \alpha_{k-1} P_{k-1} (\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-2}.$$

Предполагая, что h отлично отъ нуля, мы получаемъ право на интегрированіе обѣихъ частей этого равенства. Опуская постоянную произвольную, вводимую этимъ интегрированіемъ, и затѣмъ дифференцируя результатъ интеграціи, найдемъ

$$P_k = \alpha_{k-1} P_{k-1}.$$

Наконецъ внося сюда вмѣсто P_k его значеніе изъ (4) имѣемъ:

$$Q_{k-1} = \alpha_{k-1}^2 P_{k-1} (\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-2}.$$

Отсюда мы видимъ, что если для k -го, то и для всѣхъ другихъ уравненій системы подмѣченный нами признакъ интегрируемости имѣетъ мѣсто. Это значитъ, что, разрѣшая уравненіе (5), относительно Q мы должны получить

$$Q = P(a + b \int P dx)^{-2}.$$

Результатъ этотъ не представляетъ однако ничего новаго. Поэтому дальнѣйшій анализъ мы поведемъ въ томъ предположеніи, при которомъ упомянутый результатъ не имѣетъ мѣста, т. е. въ предположеніи $h = 0$. Равенство (5) въ этомъ случаѣ обратится въ такое

$Q_k = cP_k$,
 гдѣ c нѣкоторая постоянная; а по замѣнѣ P_k и Q_k ихъ значеніями въ такое

$$Q_{k-1} = cP_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-4}.$$

Здѣсь для избѣжанія новыхъ символовъ мы замѣнили $\frac{\alpha^2 k-1}{c}$ черезъ c . Съ тою же цѣлью подобныя замѣны будемъ дѣлать и впослѣдствіи. Если въ предыдущее равенство на мѣсто Q_{k-1} поставимъ его выраженіе черезъ P_{k-2} и проинтегрируемъ слѣдствіе, то, опуская постоянную произвольную, получимъ

$$\beta_{k-2} + \int P_{k-2} dx = c(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^3.$$

Разрѣшая это относительно $\int P_{k-1} dx$ и дифференцируя результатъ находимъ

$$P_{k-1} = cP_{k-2}(\beta_{k-2} + \int P_{k-2} dx)^{-\frac{2}{3}}.$$

Наконецъ замѣна P_{k-1} его значеніемъ даетъ

$$Q_{k-2} = cP_{k-2}(\beta_{k-2} + \int P_{k-2} dx)^{-\frac{8}{3}}.$$

Помощью тѣхъ же операций, какія были произведены нами при переходѣ отъ равенства для Q_{k-1} къ равенству для Q_{k-2} мы отъ этого послѣдняго перейдемъ къ такому

$$Q_{k-3} = cP_{k-3}(\beta_{k-3} + \int P_{k-3} dx)^{-\frac{12}{5}}.$$

Сказаннаго вполне достаточно для того, чтобы сдѣлать догадку, не будетъ ли соотношеніе

$$Q_{k-i} = cP_{k-i}(\beta_{k-i} + \int P_{k-i} dx)^{\frac{-4i}{2i-1}}$$

выражать ту именно зависимость между Q_{k-i} и P_{k-i} , которая должна явиться результатом допущения $Q_k = cP_k$? Чтобы оправдать догадку мы должны доказать, что предположенное соотношение имѣеть мѣсто для числа $i+1$, разь оно имѣеть его для числа i . Сдѣлать это легко. Замѣняя Q_{k-i} его выраженіемъ черезъ P_{k-i-1} и интегрируя результатъ по опущеніи постоянной произвольной, найдемъ

$$\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1} dx = c(\beta_{k-i} + \int P_{k-i} dx)^{\frac{2i+1}{2i-1}}.$$

Разрѣшая это относительно P_{k-i} получаемъ

$$P_{k-i} = cP_{k-i-1}(\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1} dx)^{\frac{-2}{2i+1}}.$$

Наконецъ внося сюда вмѣсто P_{k-i} его значеніе изъ (4) будемъ имѣть

$$Q_{k-i-1} = cP_{k-i-1}(\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1} dx)^{\frac{-4(i+1)}{2(i+1)-1}},$$

Этотъ результатъ и доказываетъ, что равенство для Q_{k-i} имѣеть мѣсто при всякомъ i . Полагая въ немъ $i=k$ и замѣчая, что $P_0 = P$ а $Q_0 = Q$, мы окончательно рѣшаемъ нашу задачу. Именно мы получаемъ, что если

$$Q = P(a + b \int P dx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

то уравненіе (2) послѣ k преобразованій приведется къ интегрируемому въ квадратурахъ. Замѣтивъ, что уравненіе (2) можно представить въ видѣ

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{z} \right) + Q \left(\frac{1}{z} \right)^2 = P$$

заключаемъ, что оно интегрируется посредствомъ неопредѣлен-
ныхъ квадратуръ еще въ томъ случаѣ, когда

$$P = Q(a_1 + b_1 \int Q dx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k цѣлое положительное число. Разрѣшеніе этого равенства
относительно $\int Q dx$ и дифференцирование результата даетъ

$$\left(\frac{Q}{P} \right) \cdot \left(\frac{Q}{P} \right)^{\frac{6k+1}{4k}} = bP.$$

Отсюда находимъ вторую группу признаковъ интегрируемости
занимающаго насъ уравненія

$$Q = P(a + b \int P dx)^{\frac{-4k}{2k+1}}.$$

Легко видѣть, что эта вторая группа можетъ быть получена
изъ первой замѣною k на $-k$. Поэтому классъ уравненій инте-
грирующихся по способу послѣдовательныхъ преобразованій, ко-
торый можно назвать способомъ непрерывныхъ дробей, напи-
шется такъ

$$\frac{dz}{dx} + Pz^2 = P(a + b \int P dx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k положительное или отрицательное цѣлое число. Если угод-
но можно даже полагать $k = \pm \infty$, потому что это положеніе
даетъ намъ уравненіе

$$\frac{dz}{dx} + Pz^2 = P(a + b \int P dx)^{-2}$$

интегрируемое въ квадратурахъ.

И такъ мы пришли къ тому самому обобщенію уравненія Рикатти, которое было получено А. В. Лѣтниковымъ¹. Нашъ анализъ, основанный на опущеніи постоянныхъ произвольныхъ, при разрѣшеніи относительно Q уравненія (5) указываетъ на возможность болѣе полнаго обобщенія. Къ сожалѣнію, трудности, лежащія на этомъ пути въ формѣ квадратуръ, и сопряженная съ ними сложность вычисленій убиваютъ въ самомъ зародышѣ попытку составить хотя приблизительное понятіе объ общемъ характерѣ тѣхъ уравненій, которыя могутъ быть проинтегрированы по способу непрерывныхъ дробей.

§ III. Приступая къ изслѣдованію уравненія (2) мы, разумеется, не могли предвидѣть того результата, который долженъ былъ получиться. Теперь же, когда онъ извѣстенъ, мы можемъ констатировать случаи интегрируемости уравненія

$$\frac{dz}{dx} + Pz^2 = P(a + b \int P dx)^m$$

другимъ, болѣе простымъ путемъ.

Прежде всего подстановка

$$z = \alpha (a + b \int P dx)^\beta,$$

гдѣ α и β постоянныя подлежащія опредѣленію, откроетъ намъ случай $m = -2$. Для опредѣленія другихъ случаевъ полагаемъ

$$z = b(a + b \int P dx)^{-1} + (a + b \int P dx)^{-2} \cdot \frac{1}{z_1}$$

¹ Математическій сборникъ. Т. I, стр. 323—350.

тогда предыдущее уравнение обратится въ такое

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1^2 = Q_1$$

гдѣ

$$P_1 = P(a + b \int P dx)^{m+2}$$

$$Q_1 = P(a + b \int P dx)^{-2}.$$

Выразимъ отсюда Q_1 посредствомъ P_1 . Для этого предвари-
тельно пишемъ

$$a + b \int P dx = \{ \alpha + (m+3) \int P_1 dx \}^{\frac{1}{m+3}}$$

$$P = \frac{P_1}{b} \{ \alpha + (m+3) \int P_1 dx \}^{-\frac{m+2}{m+3}}$$

имѣя это легко уже получить

$$Q_1 = P_1 (a_1 + b_1 \int P_1 dx)^{\frac{m+4}{m+3}}$$

гдѣ a_1 и b_1 новыя постоянныя. Уравнение для z_1 послѣ этого
будеть

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1^2 = P_1 (a_1 + b_1 \int P_1 dx)^{\frac{m+4}{m+3}}.$$

Полагая теперь

$$z = \frac{1}{z_1}$$

подобно предыдущему найдемъ

$$\frac{dz_2}{dx} + P_2 z_2^2 = P_2 (a_2 + b_2 \int P_2 dx)^{\frac{-m}{m+1}},$$

гдѣ

$$P_2 = P(a + b \int P dx)^m,$$

а a_2 и b_2 постоянныя величины. Сопоставляя уравненія для z , z_1 и z_2 и замѣчая, что первое изъ нихъ интегрируется при $m=0$, мы легко найдемъ и всѣ другіе случаи его интегрируемости, указанные выше.

Анализъ этого параграфа можно еще вести по способу измѣненія независимаго переменнаго. Чтобы не повторяться, мы укажемъ лишь какъ по этому способу уравненіе

$$\frac{dz}{dx} + P(a + b \int P dx)^n z^2 = P(a + b \int P dx)^m$$

приводится къ Рикаттievскому. Допустимъ, что z непосредственно выражено въ x , а помощью нѣкоторой функціи его ξ , т. е. допустимъ, что

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}$$

тогда наше уравненіе дастъ

$$\frac{dz}{d\xi} + P(a + b \int P dx)^n \frac{dx}{d\xi} z^2 = P(a + b \int P dx)^m \frac{dx}{d\xi}.$$

Отсюда разумѣя подъ Π функцію одного ξ и полагая

$$P(a + b \int P dx)^n dx = \Pi d\xi$$

получимъ

$$\frac{dz}{d\xi} + \Pi z^2 = \Pi (\alpha + \beta \int \Pi d\xi)^{\frac{m-n}{n+1}},$$

что и нужно было показать.

Если сдѣлаемъ здѣсь $\alpha = 0$, $\Pi = 1$, $n = 0$, $\beta^m = c$, то придемъ къ обыкновенному виду уравненія Рикатти

$$\frac{dz}{d\xi} + z^2 = c\xi^m,$$

на которое такимъ образомъ всегда можетъ быть сведено обобщенное нами.

§ IV. Если въ соотношеніе

$$Q = P(a + b \int P dx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k цѣлое число, поставимъ на-мѣсто P и Q ихъ значенія изъ (2), то будетъ

$$-qe \int r dx = pe \int r dx - (a + b \int pe \int r dx)^{\frac{-4k}{2k-1}}$$

или

$$pe \int r dx - (a + b \int pe \int r dx)^{\frac{-2k}{2k-1}} = (-pq)^{1/2}$$

Интегрируя это и разрѣшая результатъ относительно r , получимъ

$$r = \frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha + \int (pq)^{1/2} dx} + \frac{p'}{2p} - \frac{q'}{2q}$$

гдѣ α постоянная величина. Мы находимъ такимъ образомъ классъ уравненій (1), интегрирующихся по способу непрерывныхъ дробей,

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha + \int (pq)^{1/2} dx} + \frac{p'}{2p} - \frac{q'}{2q} \right) y + py^2 + q = 0. \quad (6)$$

Если не по существу, то по крайней мѣрѣ по внѣшнему виду мы должны за этимъ уравненіемъ, какъ содержащимъ двѣ произвольныя функціи p и q , признать большую общность, чѣмъ за разсмотрѣннымъ выше. Дѣйствительно, послѣднее можетъ быть изъ него получено при частномъ допущеніи, выражаемомъ соотношеніемъ

$$\frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha + \int (pq)^{1/2} dx} + \frac{p'}{2p} - \frac{q'}{2q} = 0,$$

интеграль котораго таковъ:

$$q = p(a + b \int p dx)^{\frac{-4k}{2k-1}}.$$

Въ уравненіи Рикатти число k можно было принимать равнымъ безконечности; въ уравненіи (6) этого по-видимому сдѣлать нельзя. Но если мы допустимъ, что постоянная α имѣетъ видъ $\frac{2k}{a}$, то эта кажущаяся невозможность исчезнетъ и мы, при $k = \infty$, найдемъ всегда интегрируемое уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + \left\{ a(pq)^{1/2} + \frac{p'}{2p} - \frac{q'}{2q} \right\} y + py^2 + q = 0,$$

всегда интегрируемое, ибо положивъ

$$y = \left(\frac{q}{p} \right)^{1/2} e^{-a \int (pq)^{1/2} dx} z$$

увидимъ, что въ уравненіи для z удовлетворяется основной признакъ интегрируемости. Поэтому будемъ имѣть:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}$$

Если въ уравненіи (6) сдѣлаемъ

$$p = 1, \quad y = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx},$$

то получимъ классъ линейныхъ уравненій второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2kq^{1/2}}{\alpha + \int q^{1/2} dx} - \frac{q'}{2q} \right) \frac{du}{dx} + qu = 0, \quad (7)$$

интегрирующихся посредствомъ неопредѣленныхъ квадратуръ. Отсюда при $k = \infty$ найдемъ уравненіе Пецваля

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(aq^{1/2} - \frac{q'}{2q} \right) \frac{du}{dx} + qu = 0,$$

интеграль котораго на основаніи сказаннаго выше можно считать извѣстнымъ.

Намъ кажется не лишнимъ интереса слѣдующій символическій способъ интеграціи этого уравненія. Называя чрезъ α_1 и α_2 корни уравненія

$$\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0$$

мы можемъ привести уравненіе Пецваля, по раздѣленіи обѣихъ его частей на q и по отвлеченіи субъекта u отъ символа $\frac{d}{dx}$, въ слѣдующему виду:

$$\left(q^{-1/2} \frac{d}{dx} - \alpha_1 \right) \left(q^{-1/2} \frac{d}{dx} - \alpha_2 \right) u = 0.$$

Полагая теперь

$$\left(q^{-1/2} \frac{d}{dx} - \alpha_2 \right) u = v,$$

получимъ

$$\left(q^{-1/2} \frac{d}{dx} - \alpha_1 \right) v = 0.$$

Интеграль послѣдняго уравненія таковъ

$$v = c e^{\alpha_1 \int q^{1/2} dx};$$

поэтому интеграль уравненія Пецваля будетъ

$$u = c_1 e^{\alpha_1 \int q^{1/2} dx} + c_2 e^{\alpha_2 \int q^{1/2} dx}.$$

Для случая $\alpha_1 = \alpha_2 = \pm 1$ нашъ способъ дастъ

$$u = (c_1 + c_2 \int q^{1/2} dx) e^{\pm \int q^{1/2} dx},$$

гдѣ верхній знакъ отвѣчаетъ допущенію $a = -2$, а нижній допущенію $a = 2$.

Обращаясь снова къ уравненію (7), укажемъ на тѣ простѣйшія формы, какія оно можетъ принять. Съ этою цѣлью допуская, что u выражено въ x помощью нѣкоторой функціи его ξ , найдемъ

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u}{d\xi^2} \cdot \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{2kq^{1/2}}{\alpha + \int q^{1/2} dx} \frac{d\xi}{dx} - \frac{q'}{2q} \frac{d\xi}{dx}\right) \frac{du}{d\xi} + qu = 0.$$

Разумѣя теперь подѣ Q функцію одного ξ , сдѣлаемъ положеніе

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{q}{Q}$$

и напишемъ его слѣдствія

$$\alpha + \int q^{1/2} dx = \alpha + \int Q^{1/2} d\xi$$

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{q'}{2q^{1/2}} \cdot \frac{1}{Q^{1/2}} = \frac{q}{2Q^2} \cdot \frac{dQ}{d\xi}$$

На основаніи этихъ соотношеній предыдущее уравненіе дастъ

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left(\frac{2kQ^{1/2}}{\alpha + \int Q^{1/2} d\xi} - \frac{Q'}{2Q}\right) \frac{du}{d\xi} + Qu = 0,$$

гдѣ $Q' = \frac{dQ}{d\xi}$. Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ одно изъ положеній

$$Q = 1, \quad \frac{2kQ^{1/2}}{\alpha + \int Q^{1/2} d\xi} = \frac{Q'}{2Q},$$

то получимъ соотвѣтственно

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{2k}{\alpha + \xi} \cdot \frac{du}{d\xi} + u = 0$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (b + c\xi)^{\frac{-4k}{2k-1}} u = 0.$$

ПОЛУЧИМЪ

Уравненіе (7) всегда, слѣдовательно, можно свести на то или другое изъ послѣднихъ.

§ V. Результаты, къ которымъ мы пришли выше, можно вывести и изъ рассмотрѣнія линейнаго уравненія втораго порядка

$$u'' + Pu' + Qu = 0,$$

въ которомъ $u' = \frac{du}{dx}$, $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$, а P и Q функціи одного x .

Въ самомъ дѣлѣ, если подставимъ

$$u = ve^{-\int Q \frac{u_1}{u_1'} dx}$$

и если въ результатѣ этой подстановки

$$Q\{u_1'' - (P + l'gQv^2)u_1' + Qu_1\} + (v'' + Pv')u_1'^2 = 0$$

выберемъ v такъ, чтобы

$$v'' + Pv' = 0,$$

то придемъ къ уравненію

$$u_1'' + P_1u_1' + Qu_1 = 0,$$

въ которомъ

$$P_1 = -P - l'gQ \left(\alpha_1 + \int e^{-\int P dx} dx \right)^2,$$

α_1 постоянная величина. Равнымъ образомъ полагая

$$u_1 = \left(\alpha_2 + \int e^{-\int P dx} dx \right) e^{-\int Q \frac{u_2}{u_1'} dx}$$

получимъ

$$u_2'' + P_2 u_2' + Q u_2 = 0,$$

гдѣ

$$P_2 = -P_1 - l'gQ \left(\alpha_2 + \int e^{-\int P_1 dx} dx \right)^2.$$

Наконецъ послѣ k преобразованій будемъ имѣть

$$u_k'' + P_k u_k' + Q u_k = 0,$$

причемъ

$$P_k = -P_{k-1} - l'gQ \left(\alpha_k + \int e^{-\int P_{k-1} dx} dx \right)^2.$$

Замѣтимъ тутъ же, что послѣднее соотношеніе по разрѣшеніи его относительно P_{k-1} , можно представить въ видѣ совмѣстныхъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} P_{k-1} &= l'g \frac{(\int N_k dx)^2}{N_k} \\ N_k &= Q e^{\int P_k dx} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Обращаясь теперь къ уравненію для u_k , дѣлаемъ въ немъ подстановки

$$u_k = v e^{-1/2 \int P_k dx}$$

$$u_k = e^{\int \frac{w}{w'} + 1/2 \left(P_k + \frac{Q'}{Q} \right) dx}$$

Ясно, что результаты этих подстановокъ

$$v'' + \frac{1}{4} (4Q - 2P'_k - P_k^2) v = 0$$

$$w'' + \frac{1}{4} \left\{ 4Q + 2P'_k - P_k^2 + 2 \left(\frac{Q'}{Q} \right)' - \right. \\ \left. - 2P_k \left(\frac{Q'}{Q} \right) - \left(\frac{Q'}{Q} \right)^2 \right\} w = 0$$

совпадутъ и что u_k опредѣлится изъ уравненія

$$u'_k{}^2 + aQ^{1/2} u'_k u_k + Qu_k^2 = 0,$$

если между P_k и Q будетъ существовать зависимость, выражаемая отношеніемъ

$$P'_k - \frac{Q'}{2Q} P_k = \left(\frac{Q'}{2Q} \right)^2 - \left(\frac{Q'}{2Q} \right)'$$

или отношеніемъ

$$P_k = a Q^{1/2} - \frac{Q'}{2Q} = a Q^{1/2} + \lg' Q^{-1/2},$$

гдѣ a постоянная величина. Допустимъ же, что зависимость эта существуетъ, и посмотримъ, какую она установитъ связь между количествами P и Q .

Для рѣшенія задачи обращаемся къ формуламъ (8). Если постоянную, вводимую интегрированіемъ функции N_k , посчитаемъ за нуль, то онѣ дадутъ

$$N_k = Q^{1/2} e^{a \int Q^{1/2} dx}$$

$$P_{k-1} = a Q^{1/2} + l g' Q^{-1/2} = P_k.$$

Отсюда приходимъ къ слѣдствію

$$P = a Q^{1/2} + l g' Q^{-1/2},$$

не представляющему ничего новаго. При выводѣ этого слѣдствія, конечно, предположено, что a отлично отъ нуля. Если же a нуль, картина измѣнится; именно, мы получимъ

$$N_k = Q^{1/2}$$

$$P_{k-1} = l g' \frac{(\alpha + \int Q^{1/2} dx)^2}{Q^{1/2}}.$$

Вычисляя на основаніи послѣдней формулы количества N_{k-1} и P_{k-2} , будемъ имѣть

$$N_{k-1} = Q^{1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^2$$

$$P_{k-2} = l g' Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^4.$$

Здѣсь постоянная интеграла $\int N_{k-1} dx$ принята нами за нуль; то же будемъ наблюдать и ниже. Дальнѣйшее вычисленіе затрудненій не представляетъ. Такъ, для количествъ N_{k-2} и P_{k-3} найдемъ

$$N_{k-2} = Q^{1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^4$$

$$P_{k-3} = l' g Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^6.$$

Понятно теперь, что для какого угодно числа i меньшаго k будемъ имѣть

$$P_{k-i} = l'g' Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2})^{2i}.$$

Заключеніе это вытекаетъ изъ того, что непосредственное слѣд-
ствие предыдущаго равенства

$$P_{k-i-1} = l'g' Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^{2(i+1)}$$

можетъ быть получено изъ него простою замѣной i на $i+1$.

Если въ равенствѣ для P_{k-i} положимъ $i=k$, то найдемъ

$$P = l'g' Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^{2k}.$$

Это и есть искомая группа признаковъ интегрируемости урав-
ненія для u . А такъ-какъ уравненіе это подстановкой

$$u = e^{-\int Q \frac{v}{v'} dx}$$

приводится къ виду

$$0 = v'' - \left(P + \frac{Q'}{Q} \right) v' + Qv = 0,$$

то для него существуетъ и другая группа, выражаемая отноше-
ніемъ

$$-P - \frac{Q'}{Q} = l'g' Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2})^{2k}$$

или отношеніемъ

$$P = l'g' Q^{-1/2} (\alpha + \int Q^{1/2} dx)^{-2k}.$$

Понятно, что если подъ k разумѣть какое угодно цѣлое число, то обѣ эти группы можно выразить одною формулой

$$P = \frac{2kQ^{1/2}}{\alpha + \int Q^{1/2} dx} - \frac{Q'}{2Q},$$

которая и составитъ такимъ образомъ окончательное и уже известное намъ рѣшеніе вопроса объ интегрируемомъ классѣ линейныхъ уравненій второго порядка.

§ VI. Хотя въ предыдущихъ параграфахъ указаны средства для вычисленія интеграловъ тѣхъ уравненій, которыхъ интегрируемость нами констатирована, однако лучше интегралы эти вычислять по другому способу, изложеніемъ котораго мы теперь займемся. Мы уже видѣли, что каждое изъ разсмотрѣнныхъ нами уравненій можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha\eta^2 = \beta\xi^\delta.$$

Если же положимъ здѣсь

$$\eta = ay, \quad \xi = bx^c$$

и выберемъ постоянныя a , b и c такъ, чтобы

$$aacb = 1, \quad 4c\beta b^{\delta+1} = a, \quad c(\delta+2) + 2 = 0,$$

то будемъ имѣть

$$\frac{dy}{dx} + x^{-\frac{\delta+4}{\delta+2}} y^2 = \frac{1}{4} x^{-\frac{3\delta+4}{\delta+2}}$$

Отсюда посредствомъ подстановки

$$y = -\frac{\delta+4}{2\delta+4} x^{\frac{2}{\delta+2}} + x^{\frac{\delta+4}{\delta+2}} v$$

получимъ

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + nx^{-2} - \frac{1}{4}x^{-4} = 0,$$

гдѣ

$$n = \frac{\delta(\delta+4)}{4(\delta+2)^2}.$$

Наконецъ если сдѣлаемъ

$$v = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{u'}{u},$$

то найдемъ

$$x^2u'' + (2x+1)u' + nu = 0. \quad (9)$$

Приведенное къ такому виду уравненіе Рикатти легко интегрируется помощью послѣдовательнаго дифференцированія въ тѣхъ случаяхъ, на которые мы указали выше. Въ самомъ дѣлѣ результатъ k дифференцированій уравненія (9) будетъ

$$x^2u^{k+2} + \{2(k+1)x + 1\}u^{k+1} + \{n + k(k+1)\}u^k = 0.$$

Но если мы допустимъ, что

$$n + k(k+1) = 0,$$

т. е. что

$$\delta = \frac{-4k}{2k+1} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{-4(k+1)}{2(k+1)-1}$$

ибо таковы корни уравненія

$$\delta(\delta+4) + 4k(k+1)(\delta+2)^2 = 0,$$

то найдемъ

$$u^{k+2} + \left\{ \frac{2(k+1)}{x} + \frac{1}{x^2} \right\} u^{k+1} = 0.$$

Интегрируя это относительно u^{k+1} и означая постоянную произвольную через c , будемъ имѣть

$$u^{k+1} = cx^{-2(k+1)} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Отсюда посредствомъ $k+1$ интегрированій получимъ

$$u = c \int x^{-2(k+1)} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx^{k+1} + c' \sum_{i=0}^k A_i x^i,$$

гдѣ A_i постоянная подлежащая опредѣленію, а c' какая угодно.

Для опредѣленія A_i ставимъ въ уравненіе

$$x^2 u'' + (2x + 1)u' - k(k+1)u = 0 \quad (10)$$

на мѣсто u сумму

$$\sum_{i=0}^k A_i x^i$$

и уравниваемъ нулю коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x . Результатомъ этой операциі будетъ равенство:

$$A_{i+1} = \frac{k(k+1) - i(i+1)}{i+1} A_i$$

изъ котораго легко найдемъ

$$A_i = \frac{1}{i!} k(k+1) \{k(k+1) - 2\} \dots \{k(k+1) - (i-1)i\}$$

гдѣ въ силу произвольности c' положено $A_0 = 1$. Такимъ образомъ данное выше для u выраженіе есть полный интегралъ уравненія (10) въ предположеніи, что A_i имѣетъ указанное сейчасъ значеніе.

Полный интегралъ уравненія (10) можно найти еще посредствомъ послѣдовательнаго интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если проинтегрируемъ упомянутое уравненіе $k + 1$ разъ и назовемъ постоянную вводимую i -мъ интегрированіемъ черезъ $c' B_{k-i+1}$, то будетъ

$$x^2 \int u dx^{k-1} - (2kx - 1) \int u dx^k = c' \sum_{i=0}^k B_i x^i \quad (9)$$

отсюда для интегралла $\int u dx^k$ получимъ

$$\int u dx^k = x^{2k} e^{\frac{1}{x}} \left(c + c' \sum_{i=0}^k B_i \int x^{i-2k-2} e^{-\frac{1}{x}} dx \right)$$

Дифференцируя это k разъ, найдемъ

$$u = c \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}} \right) + c' \sum_{i=0}^k B_i \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}} \int x^{i-2k-2} e^{-\frac{1}{x}} dx \right).$$

Останавливаясь на второмъ членѣ правой части этого равенства, замѣчаемъ, что, относительно x , онъ есть цѣлая рациональная функція степени k ; поэтому предыдущее равенство можно написать въ видѣ

$$u = c \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}} \right) + c' \sum_{i=0}^k A_i x^i$$

и принимать за полный интегралъ уравненія (10) въ предположеніи, что A_i имѣетъ данное ему выше значеніе.

Идея изложеннаго нами способа интегрированія уравненія Рикатти принадлежитъ Ліувиллю.

§ VII. Мы видѣли сейчасъ, что существуютъ случаи, въ которыхъ уравненіе (9), а слѣдовательно и уравненіе Рикатти

интегрируется алгебраическими функциями независимаго. Является вопросъ, нѣтъ ли другихъ подобныхъ же случаевъ? Этотъ вопросъ по отношенію къ тому и другому изъ упомянутыхъ уравненій разрѣшаетъ анализъ Ліувилля¹. Мы же, имѣя въ виду простоту вычисленій, разрѣшимъ его лишь по отношенію къ уравненію (9).

Это уравненіе сопровождается раціональными относительно x коэффициентами; поэтому допустивъ, что оно интегрируется нѣкоторой ирраціональностью x , мы обязаны трактовать его интегралами въ корни того неразлагаемаго алгебраическаго уравненія, которымъ упомянутая ирраціональность опредѣляется. Но если такъ, то любыхъ два корня u_i и u_j этого уравненія должны удовлетворять условію

$$u_j u_i' - u_i u_j' = \alpha x^{-2} e^x,$$

гдѣ α нѣкоторая постоянная. Понятно, что если α не нуль, то предыдущее равенство нелѣпо, ибо лѣвая его часть есть алгебраическая, а правая—трансцендентная функція x . Поэтому неизбѣжно

$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{u_j'}{u_j}.$$

Предполагая теперь, что число корней уравненія, опредѣляющаго алгебраическіе интегралы уравненія (9), есть m и называя ихъ черезъ u_1, u_2, \dots, u_m получимъ:

$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{u_1'}{u_1}, \quad \frac{u_i'}{u_i} = \frac{u_2'}{u_2}, \quad \dots, \quad \frac{u_i'}{u_i} = \frac{u_m'}{u_m}$$

Сложивъ эти равенства и проинтегрировавъ результатъ, найдемъ

$$u_i^m = C u_1 u_2 \dots u_m = R,$$

¹ Журналъ Ліувилля. Т. 6. стр. 1—12.

гдѣ R раціональная функція x . Убѣдившись такимъ образомъ, что алгебраическіе интегралы уравненія (9) должны быть вида $\frac{1}{R^m}$, ставимъ въ это уравненіе R^m на мѣсто u . Результатъ подстановки будетъ

$$x^2 RR'' + (2x + 1) RR' + n.m R^2 - \frac{m-1}{m} x^2 R'^2 = 0. \quad (11)$$

Докажемъ теперь, что $m = 1$. Съ этою цѣлью вообразимъ, что въ раціональной функціи R цѣлая часть отдѣлена отъ дробной и послѣдняя приведена къ виду

$$\sum \frac{A}{(x - \alpha)^i},$$

гдѣ A , α и i параметральныя постоянныя. Если по внесеніи такого значенія R въ уравненіе (11), мы остановимъ свое вниманіе на той изъ дробей, которая отвѣчаетъ наибольшему i при данномъ α , то увидимъ, что дробь

$$\frac{i(m+i)A^2 x^2}{m(x-\alpha)^{2i+2}}$$

до тѣхъ поръ не найдетъ себѣ подобной и, слѣдовательно, не уничтожится, пока α отлично отъ нуля. Отсюда заключаемъ, что

$$R = \sum_{i=-p}^{i=k} A_i x^i,$$

гдѣ k высшая положительная степень x , а p высшая отрицательная. Внеся это значеніе R въ уравненіе (11) и уравнивъ нулю коэффициентъ, сопровождающій высшую отрицательную степень x , получимъ

$$pA^2 - p = 0$$

Такъ какъ требованіе, выражаемое этимъ равенствомъ, не можетъ быть выполнено на-счетъ p до тѣхъ поръ, пока p отлично отъ нуля, то все A съ отрицательными указателями суть нули. По этому

$$R = \sum_{i=0}^k A_i x^i.$$

Убѣдившись такимъ образомъ, что R есть цѣлая рациональная функція x , мы можемъ, разложивъ эту функцію на линейныхъ множителей, привести ее къ виду

$$R = q_1 q_2^2 q_3^3 \dots q_r^r,$$

гдѣ q_i означаетъ произведеніе всехъ множителей i -й кратности. Что касается производныхъ R , то онѣ будутъ

$$R' = q_2 q_3^2 \dots q_r^{r-1} \cdot \omega$$

$$R'' = q_3 q_4^2 \dots q_r^{r-2} \cdot \Theta,$$

гдѣ ω и Θ , будучи первыми между собою, таковы же и по отношенію къ каждому изъ нумерованныхъ q . На основаніи написанныхъ соотношеній уравненіе (11) приведетъ къ виду:

$$\begin{aligned} x^2 q_1 \Theta + (2x + 1) q_1 q_2 \dots q_r \omega + n \cdot m \cdot q_1^2 q_2^2 \dots q_r^2 &= \\ &= \frac{m-1}{m} x^2 \omega^2. \end{aligned}$$

При анализѣ этого равенства представляются два случая: когда произведеніе $q_2 q_3 \dots q_r$ равно единицѣ и когда оно отлично отъ единицы. Въ первомъ случаѣ имѣемъ:

$$\{ x^2 \Theta + (2x + 1) \omega + n \cdot m \cdot q_1 \} q_1 = \frac{m-1}{m} x^2 \omega^2.$$

Такъ какъ лѣвая часть этого равенства дѣлится на q_1 , то и правая должна дѣлиться, а потому въ разсматриваемомъ слу-

чаѣ $m = 1$. Что касается втораго случая, то онъ даетъ:

$$q_1 \ominus = \frac{m-1}{m} \omega^2$$

$$(2x+1)\omega + n \cdot m \cdot q_1 q_2 \dots q_r = 0.$$

Замѣнивъ \ominus и ω ихъ значеніями черезъ R , получимъ:

$$RR'' = \frac{m-1}{m} R'^2$$

$$(2x+1)R' + n \cdot m R = 0.$$

Интегрируя это и переходя отъ R къ u , находимъ

$$u = ax + b$$

$$u = c(2x+1)^{-\frac{n}{2}}$$

гдѣ a , b и c постоянныя величины. Такъ какъ эти равенства должны существовать совмѣстно, то имѣемъ:

$$n = -2, \quad a = 2c, \quad b = c.$$

Изъ сказаннаго обнаружилось, что интегралы уравненія (9) не могутъ быть алгебраическими, не будучи раціональными вида

$$u = \sum_{i=0}^k A_i x^i.$$

Отсюда на основаніи предыдущаго параграфа прямо заключаемъ, что случаями, тамъ указанными, сполна исчерпывается способность упомянутаго уравненія интегрироваться алгебраическими функціями независимаго.

... то равенство ...

$$(2x + 1)^m + m \cdot x \cdot (2x + 1)^{m-1} + \dots + x^m = 0.$$

... то равенство ...

$$(2x + 1)^m + m \cdot x \cdot (2x + 1)^{m-1} + \dots + x^m = 0.$$

... то равенство ...

$$x = c(2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

... то равенство ...

... то равенство ...

При анализе этого равенства ...

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СПОСОБА АБУЛЬ-ДЖУДА

ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОРОНЪ ПРАВИЛЬНЫХЪ ВПИСАННЫХЪ
МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ.

А. П. Грузинцева.

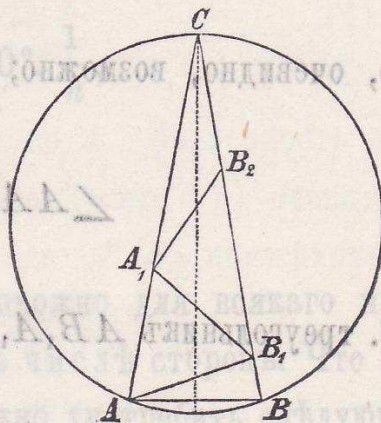
Въ прекрасной книгѣ проф. Ващенко-Захарченка, изданной имъ въ прошломъ году подъ заглавіемъ: «Исторія математики», изложенъ на стр. 552 способъ арабскаго геометра XI столѣтія Абуль-Джуда для вычисленія стороны правильного вписаннаго 9-угольника; этотъ способъ, какъ оказалось, можно обобщить, распространивъ его и на случай всякаго правильного вписаннаго многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ. Этотъ обобщенный способъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть AB сторона правильного вписаннаго n -угольника; построимъ на ней равнобедренный треугольникъ съ вершиной въ C на окружности. Тогда уголъ при C будетъ

$$\angle C = \frac{180^\circ}{n};$$

уголъ при B будетъ:

$$\angle ABC = \angle CAB = 90^\circ \cdot \frac{n-1}{n}.$$



Проведемъ изъ A прямую AB_1 , такъ, чтобы

$$\angle B_1AB = \frac{180^\circ}{n},$$

тогда

$$\angle AB_1B = 90^\circ \frac{n-1}{n},$$

т. е. $\angle AB_1B = \angle ABC$,

слѣдовательно треугольникъ ABB_1 будетъ равнобедренный и

$$AB_1 = AB = a_n,$$

если положимъ, что

$$AB = a_n.$$

Послѣ того найдемъ, что

$$\angle CAB_1 = 90^\circ \frac{n-3}{n}.$$

Проведемъ теперь прямую B_1A_1 , такъ, чтобы

$$\angle AB_1A_1 = 180^\circ \frac{3}{n},$$

что, очевидно, возможно; тогда

$$\angle AA_1B_1 = 90^\circ \frac{n-3}{n},$$

т. е. треугольникъ AB_1A_1 тоже равнобедренный и слѣдовательно

$$A_1B_1 = AB_1 = a_n.$$

За-тѣмъ проведемъ изъ A_1 прямую A_1B_2 , такъ, чтобы



Решением уравнения (1) найдемъ, что

$$\angle B_1 A_1 B_2 = 180^\circ \cdot \frac{5}{n},$$

и найдемъ, что

$$\angle A_1 B_1 C = \angle A_1 B_2 B_1 = 90^\circ \cdot \frac{n-5}{n};$$

следовательно

$$A_1 B_2 = A_1 B_1 = a_n.$$

Продолжая подобныя построения, найдемъ, что углы при вершинахъ равнобедренныхъ треугольниковъ будутъ соотвѣтственно:

$$180^\circ \cdot \frac{1}{n}, 180^\circ \cdot \frac{3}{n}, 180^\circ \cdot \frac{5}{n}, \dots \text{ и для } i\text{-наго угла } 180^\circ \frac{2i-1}{n};$$

углы при основаніяхъ:

$$90^\circ \cdot \frac{n-1}{n}, 90^\circ \cdot \frac{n-3}{n}, 90^\circ \cdot \frac{n-5}{n}, \dots 90^\circ \cdot \frac{n-2i+1}{n}.$$

Допуская, что i -ныйъ треугольникъ будетъ имѣть угломъ при основаніи уголъ C , должны имѣть:

$$90^\circ \cdot \frac{n-2i+1}{n} = 180^\circ \cdot \frac{1}{n},$$

т. е. $n = 2i + 1.$

И такъ, приведенное построение возможно для всякаго правильнаго многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ. Что касается вычисленія стороны a_n , то можно употребить слѣдующій приемъ. Опуская изъ точекъ A, A_1, B_1, \dots перпендикуляры $AD, B_1 E, A_1 D_1, \dots$ и замѣчая, что всѣ получаемыя четны-

треугольники таковы, что около них можно описать окружности, имѣемъ по свойству сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки C , i уравненій между $i + 1$ отрѣзками, получаемыми на сторонахъ AC и BC ; за-тѣмъ имѣемъ еще два уравненія, выражающія, что сумма отрѣзковъ съ одной стороны равна AC , а съ другой $AC - a_n$, итого $i + 2$ уравненій; кромѣ того изъ подобія треугольниковъ ABC и ABV_1 имѣемъ соотношеніе между AC и a_n . Слѣдовательно, всего будетъ $i + 3$ уравненій съ $i + 3$ неизвѣстными; значитъ — найдемъ a_n .

Проведемъ изъ точки C отрѣзковъ CV_1, CV_2, \dots, CV_i до стороны AB такъ, чтобы $\angle V_1CA = \angle V_2CA = \dots = \angle V_iCA = \angle C$.

Слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{a_n} \cdot 180^\circ = \frac{1}{a_{n-1}} \cdot 180^\circ + \frac{1}{a_{n-2}} \cdot 180^\circ + \dots + \frac{1}{a_1} \cdot 180^\circ$$

Послѣ того найдемъ, что

$$\frac{1+i^2-n}{a_n} \cdot 90^\circ \dots \frac{1-n}{a_{n-1}} \cdot 90^\circ, \frac{1-n}{a_{n-2}} \cdot 90^\circ, \dots, \frac{1-n}{a_1} \cdot 90^\circ$$

Проведемъ теперь прямую BA такъ, чтобы $\angle V_1BA = \angle V_2BA = \dots = \angle V_iBA = \angle B$.

Слѣдуетъ, что $\angle V_1BA = \angle V_2BA = \dots = \angle V_iBA = \angle B$.

$$\frac{1}{a_n} \cdot 180^\circ = \frac{1+i^2-n}{a_n} \cdot 90^\circ$$

$$\angle AAV_1 = \frac{1+i^2-n}{a_n} \cdot 90^\circ$$

Итакъ, въ треугольнике AAV_1 имѣемъ $\angle AAV_1 = \frac{1+i^2-n}{a_n} \cdot 90^\circ$ и $\angle V_1AA = \angle A$. Слѣдуетъ, что $\angle AV_1A = 90^\circ - \frac{1+i^2-n}{a_n} \cdot 90^\circ$. Аналогично найдемъ $\angle AV_2A, \dots, \angle AV_iA$. Слѣдуетъ, что $\angle AV_1A + \angle AV_2A + \dots + \angle AV_iA = (i-1) \cdot 90^\circ - \frac{1+i^2-n}{a_n} \cdot 90^\circ \cdot (i-1)$.

Дифференциальное уравнение (2) и содержащая на x^α подынтегральна:

$$(A) \quad y' + (\alpha + 1)y = x^\alpha$$

Взяв отсюда частную производную от уравнения производную от

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ

$$\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{\alpha}{z} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0.$$

В. П. Алексеевскаго.

1. Замѣтимъ, что достаточно рассмотреть уравнение указанного вида, въ которомъ $\beta = 1$; такъ какъ данное уравнение посредствомъ замѣны независимаго переменнаго по формулѣ:

$$(B) \quad z = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

приводится къ слѣдующему:

$$y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} + y = 0 \quad (1)$$

гдѣ $y^{(n)}$ означаетъ производную отъ y по x . Зависимость между интегралами даннаго уравненія и послѣдняго (1) очевидна.

Умножая обѣ части уравненія (1) на $x^\alpha dx$, интегрируя и отбрасывая произвольное постоянное, получаемъ:

$$x^\alpha y^{(n-1)} + \int x^\alpha y dx = 0.$$

Полагая $\int x^\alpha y dx = x^{\alpha+1} y_1$ (2)

находимъ $y^{(n-1)} + x y_1 = 0$ (3)

Дифференцируя равенство (2) и сокращая на x^α , получимъ:

$$y = xy'_1 + (\alpha + 1)y_1. \quad (4)$$

Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную съ указателемъ $(n - 1)$, получимъ:

$$y^{(n-1)} = xy_1^{(n)} + (\alpha + n)y_1^{(n-1)}.$$

Исключая изъ послѣдняго равенства и равенства (3) $y^{(n-1)}$ и полагая

$$\alpha + n = \alpha_1,$$

находимъ:

$$y_1^{(n)} + \frac{\alpha_1}{x} y_1^{(n-1)} + y_1 = 0.$$

Повторяя ту-же операцію k разъ, очевидно, получимъ слѣдующее уравненіе

$$y_k^{(n)} + \frac{\alpha_k}{x} y_k^{(n-1)} + y_k = 0, \quad (5)$$

гдѣ

$$\alpha_k = \alpha + nk. \quad (6)$$

2. На основаніи предыдущихъ формулъ не трудно выразить зависимость между интегралами уравненій (1) и (5) въ различныхъ видахъ:

а) По формулѣ (2) имѣемъ:

$$y = x^{-\alpha} Dx^{\alpha+1} y_1$$

$$y_1 = x^{-(\alpha+n)} \cdot Dx^{\alpha+n+1} y_2$$

$$y_2 = x^{-(\alpha+2n)} \cdot Dx^{\alpha+2n+1} y_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{k-1} = x^{-(\alpha+(k-1)n)} \cdot Dx^{\alpha+(k-1)n+1} y_k.$$

Умножая последовательно эти равенства на:

$$1, x^{\alpha+1}, x^{\alpha+n+1}, \dots, x^{\alpha+(k-2)n+1}$$

и исключая y_1, y_2, \dots, y_{k-1} , получимъ:

$$y = x^{-\alpha} \cdot D \cdot x^{-(n-1)} \cdot D \cdot x^{-(n-1)} \dots D \cdot x^{-(n-1)} \cdot x^{\alpha+nk} y_k,$$

гдѣ операція $D \cdot x^{-(n-1)}$ повторяется k разъ. Принявъ во вниманіе равенство (6), последнюю формулу можно написать въ такомъ видѣ:

$$x^\alpha y = \left[D \cdot x^{-(n-1)} \right]^{(k)} (x^{\alpha k} y_k). \quad (7)$$

б) По формулѣ (3) имѣемъ:

$$y = (-1) \cdot D^{-(n-1)} x y_1,$$

$$y_1 = (-1) \cdot D^{-(n-1)} x y_2,$$

$$\dots$$

$$y^{k-1} = (-1) \cdot D^{-(n-1)} x y_k,$$

отсюда находимъ:

$$y = (-1)^k \left[D^{-(n-1)} \cdot x \right]^{(k)} \cdot y_k. \quad (8)$$

в) Далѣе мы увидимъ, что y, y_1, \dots обладаютъ свойствами, выражаемыми равенствами:

$$D^p \cdot D^q y = D^q \cdot D^p y = D^{p+q} y,$$

гдѣ p и q указатели производныхъ, количества постоянныхъ.

Поэтому формулу (4) можно написать въ видѣ

$$y = D^{\alpha+1} \cdot x \cdot D^{-\alpha} y_1.$$

Слѣдовательно:

$$y_1 = D^{\alpha+n+1} \cdot x \cdot D^{-(\alpha+n)} y_2 \quad (1)$$

$$y_2 = D^{\alpha+2n+1} \cdot x \cdot D^{-(\alpha+2n)} y_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{k-1} = D^{\alpha+(k-1)n+1} \cdot x \cdot D^{-(\alpha+(k-1)n)} y_k$$

Взявъ отъ втораго изъ этихъ равенствъ производную съ указателемъ $-\alpha$, отъ 3-го съ указателемъ $-(\alpha+n)$, отъ послѣдняго — съ указателемъ $-(\alpha+(k-2)n)$, получимъ:

$$y = D^{\alpha+1} \cdot x \cdot D^{n+1} \cdot x \cdot D^{n+1} \cdot x \dots D^{n+1} \cdot x \cdot D^{-(\alpha+(k-1)n)} y_k,$$

гдѣ операція $D^{n+1} \cdot x$ повторяется $(k-1)$ разъ. Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную съ указателемъ $-(\alpha-n)$ и принявъ во вниманіе (6), предыдущее соотношеніе напишется такимъ образомъ:

$$D^{-(\alpha-n)} y = \left[D^{n+1} \cdot x \right]^{(k)} \cdot D^{-(\alpha_k-n)} y_k \quad (9)$$

d) Наконецъ зависимость между интегралами y и y_k можно представить еще въ новомъ видѣ, выясняющемъ характеръ операцій, связывающихъ функціи y и y_k .

Умножимъ обѣ части равенства (7) на $n^{-k} \cdot x^{-(n-1)}$, тогда оно обратится въ слѣдующее:

$$n^{-k} \cdot x^{\alpha-(n-1)} y = n^{-k} \cdot x^{-(n-1)} \cdot \left[D \cdot x^{-(n-1)} \right]^{(k)} x^{\alpha_k} y_k$$

или

$$n^{-k} x^{\alpha-(n-1)} y = \left[\frac{1}{n} x^{-(n-1)} \cdot D \right]^{(k)} \cdot x^{\alpha_k-(n-1)} y_k.$$

Замѣтимъ, если u есть функція x , а x функція новаго независимаго переменнаго z , то, полагая

$$\frac{dz}{dx} = z',$$

имѣемъ:

$$D_z u = \frac{1}{z'} D_x u$$

$$D_z^2 u = \frac{1}{z'} D_x \frac{1}{z'} D_x u = \left[\frac{1}{z'} D_x \right]^{(2)} \cdot u$$

и вообще

$$D_z^{(k)} u = \left[\frac{1}{z'} D_x \right]^{(k)} \cdot u.$$

Сравнивая эту формулу съ предыдущею, видимъ, что

$$z' = nx^{n-1},$$

откуда

$$z = x^n, \quad u = x^{\alpha_k - (n-1)} \cdot y_k,$$

и можно написать

$$x^{\alpha - (n-1)} \cdot y = n^k \cdot D_z^{(k)} \left(x^{\alpha_k - (n-1)} y_k \right)_{z = x^n}. \quad (10)$$

е) При помощи предыдущихъ формулъ весьма легко выразить y_k , чрезъ y . При помощи (7) имѣемъ:

$$x^{\alpha_k} y_k = \left[x^{n-1} \cdot D^{-1} \right]^{(k)} x^{\alpha} y \quad (7')$$

изъ (8)
$$y_k = (-1)^k \cdot \left[\frac{1}{x} D^{n-1} \right]^{(k)} y \quad (8')$$

изъ (9)
$$D^{-(\alpha_k - n)} y_k = \left[\frac{1}{x} D^{-(n+1)} \right]^{(k)} D^{-(\alpha - n)} y \quad (9')$$

изъ (10) $x^{\alpha_k - (n-1)} y_k = n^{-k} \cdot D_z^{(-k)} [x^{\alpha - (n-1)} \cdot y]_{z=x^n}$. (10')

3. Разсмотримъ теперь, въ какихъ случаяхъ уравненіе (1) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ. Очевидно, если въ уравненіе (5) $\alpha_k = 0$, то интеграль его будетъ:

$$y_k = \sum_{i=1}^{i=n} C_i e^{r_i x}, \quad (11)$$

гдѣ C_i одно изъ произвольныхъ постоянныхъ, а r_i одинъ изъ корней уравненія:

$$r^n + 1 = 0.$$

Изъ предыдущаго ясно, что уравненіе (1), въ которомъ

$$\alpha = -nk,$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ (или квадратуръ) и интеграль его найдется при помощи одной изъ формулъ (7), (8), (9) или (10), въ которыхъ только y_k надо замѣнить его выраженіемъ (11).

Точно также, если въ уравненіи (1) положимъ $\alpha = 0$, то въ уравненіи (5)

$$\alpha_k = +nk,$$

и, такъ какъ при этихъ условіяхъ интеграль уравненія (1) выразится формулой (11), то, подставивъ это выраженіе въ формулы (7'), (8'), (9') или (10') на мѣсто y , имѣемъ интеграль уравненія (5).

Просматривая ходъ нашихъ сужденій и обративъ вниманіе на выраженіе интеграла уравненія (1) [формулы (7) и (8) (7')]

и (8')] легко видѣть, что указанный выше приемъ интегрирования не зависитъ (вовсе) отъ значенія постояннаго n . Не трудно замѣтить, что въ интегралѣ уравненія (1) подлежатъ дифференцированію функціи только такого вида

$$(8) \quad 0 = y + \frac{y^{(1+n)}}{ax^m e^{rx}},$$

гдѣ a и m нѣкоторыя постоянныя; а отсюда видно, во первыхъ, что все дифференцированія должны производиться въ предѣлахъ $\pm \infty$ и x ($+\infty$, когда дѣйствительная часть $r < 0$, $-\infty$, когда д. ч. $r > 0$); во вторыхъ, что равенства

$$D^p D^q y = D^q D^p y = D^{p+q} y$$

имѣютъ мѣсто, при какихъ угодно значеніяхъ постоянныхъ p и q *

И такъ, уравненіе (1) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если $\alpha = \pm nk$, гдѣ n какое угодно постоянное, k — цѣлое число. Такъ, на примѣръ, интегрируя по предыдущему способу уравненіе

$$D^{3/2} y - \frac{3}{x} D^{1/2} y - y = 0$$

по формулѣ (7) получимъ

$$y = \sum_{i=1}^{i=3} C_i \left(1 - \frac{3}{2} r_i x + r_i^2 x^2 \right) e^{r_i x}$$

гдѣ r_i корни уравненія

$$r^{3/2} - 1 = 0.$$

* См. статью Ляпунова «Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ». Математ. Сборникъ, Т. III, 1868. стр. 28 — 30 и стр. 57 — 58.

4. Разсмотримъ случай, когда n — отрицательное число. Уравнение (1) по замѣнѣ въ немъ n чрезъ $(-n)$ и обозначеніи $y^{(-n)}$ чрезъ $D^{-n}y$, приметъ слѣдующій видъ:

$$D^{-n}y + \frac{\alpha}{x} D^{-(n+1)}y + y = 0. \quad (12)$$

Легко видѣть, что приложеніе предыдущаго приема даетъ неполный интеграль этого уравненія; при n — цѣломъ, находимъ только $(n >)$ частныхъ интеграловъ, такъ какъ, въ предположеніи $\alpha = 0$, или $\alpha_k = 0$, оно обращается въ уравненіе n -го порядка. Послѣдній $(n + 1)$ -й интеграль найдется извѣстнымъ приемомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ знаніе n частныхъ интеграловъ уравненія даетъ возможность разысканіе послѣдняго интеграла свести къ интегрированію линейнаго уравненія 1-го порядка.

Чтобы яснѣе представить, каково уравненіе (12), положимъ

$$D^{-(n+1)}y = \omega,$$

тогда оно обратится въ слѣдующее

$$\omega^{n+1} + \omega' + \frac{\alpha}{x} \omega = 0. \quad (13)$$

Случай интегрируемости и сами интегралы послѣдняго уравненія могутъ быть найдены и не преобразуя его въ уравненіе (12) приемомъ, вполне аналогичнымъ предыдущему; не останавливаясь на этомъ, покажемъ, что интегрированіе уравненія (12) (съ отрицательнымъ указателемъ) можетъ быть сведено къ интегрированію уравненія того-же вида, въ которомъ указатель высшей произвольной есть число положительное.

Дѣйствительно, умноживъ уравненіе (12) на x и дифференцируя съ указателемъ $(-\alpha)$, находимъ:

$$xD^{-(\alpha+n)}y + xD^{-\alpha}y - \alpha D^{-(\alpha+1)}y = 0.$$

Полагая здѣсь

$$D^{-(\alpha+n)}y = u,$$

получимъ

$$u^{(n)} - \frac{\alpha}{x}u^{(n-1)} + u = 0,$$

въ этомъ уравненіи n есть число положительное. Отсюда видимъ, что зависимости между интегралами уравненій (12), (13) и послѣдняго будутъ:

$$y = D^{(\alpha+n)}u, \quad \omega = D^{(\alpha-1)}u.$$

Для большей ясности означимъ интеграль уравненія (12) y чрезъ $\Phi(-n, \alpha, x)$, а интеграль послѣдняго уравненія u чрезъ $\Phi(n, -\alpha, x)$, тогда выведенное нами свойство представится въ видѣ:

$$\Phi(-n, \alpha, x) = D^{\alpha+n}\Phi(n, -\alpha, x). \quad (14)$$

Очевидно, что этимъ зависимостямъ не удовлетворяютъ тѣ частные интегралы уравненія (12) и (13), которые находятся посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

Для поясненія сказаннаго выше приведемъ примѣръ. Пусть требуется проинтегрировать уравненіе:

$$u''' + \omega' + \frac{2}{x}\omega = 0.$$

Интеграцію этого уравненія можно свести на интеграцію уравненія

$$u'' - \frac{2}{x}u' + u = 0,$$

частные интегралы котораго на основаніи формулы (7) послѣ известныхъ преобразованій будутъ:

$$u_1 = \int x \sin x \cdot dx, \quad u_2 = \int x \cos x \cdot dx.$$

Слѣдовательно:

$$\alpha_1 = x \sin x, \quad \alpha_2 = x \cos x.$$

Приложеніе способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ даетъ четыре уравненія*:

$$\omega_1 C_1' + \omega_2 C_2' = 0$$

$$\omega_1' C_1' + \omega_2' C_2' = z$$

$$\omega_1'' C_1' + \omega_2'' C_2' = z_1$$

$$z' + z_1 = 0,$$

откуда

$$C_1 = c_1 + c_3 \int \frac{\cos x}{x^3} dx = C_2 = c_2 - c_3 \int \frac{\sin x}{x^3} dx,$$

вслѣдствіе чего полный интеграль даннаго уравненія будетъ

$$\omega = x \sin x \left(c_1 + c_3 \int \frac{\cos x}{x^3} dx \right) + x \cos x \left(c_2 - c_3 \int \frac{\sin x}{x^3} dx \right).$$

Однако, вслѣдствіе сложности выраженій частныхъ интеграловъ уравненія (13), вычисленіе его полного интеграла, въ особенности при значительномъ числѣ k , становится затруднительнымъ по своей сложности; поэтому дальше мы укажемъ болѣе простое рѣшеніе этого вопроса.

* Располагая выкладки такъ, какъ указано на стр. 528 — 531 «Cours de calcul différentiel et intégral, par Serret. T. second, 1868.

5. Уравнения (1) и (13) могут быть рассматриваемы как частные виды уравнения

$$xy^{(n+1)} + py^{(n)} + xy' + qy = 0, \quad (15)$$

гдѣ p и q суть постоянныя. При $n = 1$ это уравнение обращается въ хорошо извѣстное, изслѣдованное Вейлеромъ и др.¹ и также г. Лѣтниковымъ².

а) Интеграль этого уравнения (15) находится весьма легко, если $p = q$; именно, умноживъ обѣ части его на $x^{p-1}dx$, интегрируя и называя произвольное постоянное чрезъ c_0 , получимъ уравнение

$$y^{(n)} + y = c_0 x^{-p}, \quad (16)$$

дальнѣйшая интеграція котораго не представляетъ никакихъ затрудненій.

б) Если $p \neq q$, то, прилагая тѣ-же преобразованія, какими мы пользовались въ § 1, т. е. посредствомъ k подстановокъ вида

$$\int x^{p-1} y_i dx = x^p y_{i+1}^*$$

вопросъ объ интегрированіи уравнения (15) сводится къ интегрированію уравнения:

$$xy_k^{(n+1)} + p_k y_k^{(n)} + xy_k' + q_k y_k = 0, \quad (17)$$

гдѣ

$$p_k = p + nk, \quad q_k = q.$$

Отсюда заключаемъ, что уравнение (15) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ (или квадратуръ), если $p - q = \pm nk$ (k — цѣлое).

¹ См. *Schlömilch*, «Compendium der höheren Analysis», В. 2. 1874. стр. 525—540.

² Математическій сборникъ. Т. VII. ст. 177—192.

* Подстановка имѣеть мѣсто при $p = 0$.

с) Къ тому-же заключенію приводитъ насъ рядъ подстано-
вокъ въ уравненіе (15) вида

$$(15) \quad \int x^{q-1} y_i^{(n)} = x^q y_{i+1}^{(n)*},$$

такъ какъ k -е уравненіе будетъ:

$$xy^{(k)(n+1)} + p^{(k)} y^{(k)(n)} + xy^{(k)'} + q^{(k)} y^{(k)} = 0 \quad (18)$$

гдѣ

$$p^{(k)} = p, \quad q^{(k)} = q - nk.$$

Если $n = 1$, то кромѣ указаннаго случая интегрируемости $p - q = \pm k$ существуетъ еще другой случай. Дѣйствительно, при $n = 1$ уравненія (15) и (18) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$xy'' + (p + x)y' + qy = 0$$

$$xy''^{(k)} + (p + x)y'^{(k)} + q^{(k)}y^{(k)} = 0,$$

гдѣ

$$q^{(k)} = q - k.$$

Въ предположеніи или $q = 0$, или $q^{(k)} = 0$, оба эти уравненія становятся интегрируемыми; слѣдовательно, можно сказать, что уравненіе (15) при $n = 1$ интегрируется въ двухъ случаяхъ:

$$(1) \quad p - q = \pm k, \quad (2) \quad q = \pm k.$$

6. Уравненіе (15) при $p = 0$ обращается въ уравненіе (13), но преобразование б) предыдущаго параграфа примѣнимо безъ всякихъ измѣненій, поэтому полный интеграль уравненія (13) найдется при помощи полнаго же интеграла уравненія вида (16), и не трудно видѣть, что такимъ путемъ полный интеграль уравненія (13) вычисляется значительно скорѣе, чѣмъ по способу, указанному въ § 4.

* Подстановка примѣнима и въ случаѣ $q = 0$.

Для сличенія обратимся къ примѣру, разсмотрѣнному въ § 4:

$$\omega''' + \omega' + \frac{2}{x} \omega = 0.$$

Преобразование b) § 4 приводитъ къ уравненію

$$x \omega_1''' + 2\omega_1'' + x\omega_1' + 2\omega_1 = 0,$$

при чемъ $\omega = x\omega_1'$.

Умножая предпоследнее уравненіе на x , интегрируя и называя произвольное постоянное чрезъ c_0 , находимъ:

$$\omega_1'' + \omega_1 = \frac{c_0}{x^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\omega_1 = \sin x \left(c_1 + c_0 \int \frac{\cos x}{x^2} dx \right) + \cos x \left(c_2 - c_0 \int \frac{\sin x}{x^2} dx \right),$$

откуда

$$\omega = x \cos x \left(c_1 + c_0 \int \frac{\cos x}{x^2} dx \right) - x \sin x \left(c_2 - c_0 \int \frac{\sin x}{x^2} dx \right).$$

7. Изъ разсмотрѣнія формулы (18) слѣдуетъ, что интегрированіе уравненія (15) можетъ быть сведено къ интегрированію уравненія вида (1), если $q = \pm nk$, но не трудно показать, что и при какихъ угодно значеніяхъ p и q вопросъ объ интегрированіи уравненія (15) можно поставить въ зависимость отъ интегрированія уравненія вида (1).

Дѣйствительно, взявъ отъ обѣихъ частей уравненія (15) производную съ указателемъ $(-q)$, получимъ:

$$xD^{(n-q+1)}y + (p-q)D^{(n-q)}y + xD^{(-q+1)}y = 0,$$

которое при допущеніи

$$D^{(-q+1)}y = u, \quad p - q = \alpha$$

и принимает видъ уравненія (1), т. е.

$$u^{(n)} + \alpha u^{(n-1)} + u = 0.$$

При помощи n интеграловъ послѣдняго легко получить всѣ $(n + 1)$ частныхъ интеграловъ уравненія (15); изъ нихъ n опредѣляется по формулѣ

$$y = D^{(q-1)}u, \quad (19)$$

послѣдній же по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

8. Убѣдившись, что уравненіе (1), которое можно написать въ такомъ видѣ

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} + xy = 0, \quad (20)$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ при k цѣломъ положительномъ или отрицательномъ, перейдемъ къ рассмотрѣнію, какъ интегрируется это уравненіе, если k будетъ какое угодно постоянное, т. е. къ общему случаю, при чемъ n , указатель порядка уравненія, будемъ считать цѣлымъ и положительнымъ.

Положимъ

$$y = x^{nk+n-1} \cdot u \quad (20')$$

и подставимъ это въ уравненіе (20). Подстановку эту удобнѣе сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Не трудно видѣть, что

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} = D_x^{n-1} \left(xy' - (nk + n - 1)y \right).$$

Выраженіе въ скобкахъ умножимъ и раздѣлимъ на $x^{-(nk+n)}$, тогда получимъ:

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} = D^{n-1} \left[x^{(nk+n)} \left(x^{-(nk+n-1)} \cdot y' - (nk+n-1)x^{-(nk+n)} \cdot y \right) \right] = D^{n-1} \left[x^{nk+n} \cdot \left(x^{-(nk+n-1)} \cdot y' \right) \right]$$

Сдѣлавъ теперь указанную подстановку, уравненію (20) дадимъ слѣдующій видъ:

$$x^{-(nk+n)} D^{n-1} \left(x^{nk+n} u' \right) + u = 0, \quad (21)$$

или по совершеніи дифференцірованія:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} \cdot x^{-i} u^{(n-i)} + u = 0, \quad (21')$$

здѣсь i — параметръ, цѣлое и положительное число,

$$(n-1)_i = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-i)}{i!}$$

$$(nk+n)^{(i)} = (nk+n)(nk+n-1)\dots(nk+n-i+1),$$

производная $(n-i)$ -го (цѣлаго) порядка отъ u по x .

Въ уравненіи (21') измѣняемъ независимое переменное, полагая

$$x = z^n.$$

Извѣстно, что

$$D_x^m u = \sum_{p=1}^{p=m} A_p^{(m)} z^{-\frac{m}{n} + p} \cdot u_z^{(p)},$$

гдѣ p — параметръ, цѣлое положительное число, $u_z^{(p)}$ производная p -го порядка отъ u по z , $A_p^{(m)}$ извѣстные коэффи-

енты, выраженія которыхъ намъ не понадобятся и относительно которыхъ необходимо только замѣтить, что $A_p^{(m)} = 0$, если $p < 1$, или $p > m$.

По замѣнѣ независимаго переменнаго уравненіе (21)' обратится въ

$$\sum_{i=0}^{p=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} \sum_{p=1}^{p=n-i} A_p^{(n-i)} z^{p-1} u_z^{(p)} + u = 0.$$

Развертывая эти суммы, отобразивъ коэффициенты при одинакихъ указателяхъ p и называя вновь параметры чрезъ p и i , получимъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n} z^{p-1} u^{(p)} \sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} A_p^{(n-i)} + u = 0.$$

Но на основаніи указаннаго свойства коэффициентовъ $A_p^{(n-i)}$:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} A_p^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{i=n-p} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} A_p^{(n-i)}.$$

Называя этотъ коэффициентъ чрезъ B_p , дадимъ нашему уравненію видъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p z^{p-1} u_z^{(p)} + u = 0. \tag{22}$$

Взявъ отъ послѣдняго уравненія производную съ указателемъ $(-k)$ по z , имѣемъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p D^{-k} z^{p-1} u^{(p)} + D^{-k} u = 0,$$

или произведя дифференцированіе по общей теоремѣ Лувилля

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p \sum_{r=0}^{r=p-1} (-k)_r (p-1)^{(r)} z^{p-1-r} D^{-k-r} u^{(p)} + D^{-k} u = 0.$$

Развертывая суммы, суммируя сначала по вертикальным ли-
 ниямъ, а потомъ по горизонтальнымъ, и означая параметры чрезъ
 q и ρ , послѣднее выраженіе можно представить въ видѣ:

$$\sum_{q=1}^{q=n} z^{q-1} D^q D^{-k} u \sum_{\rho=0}^{\rho=n-q} (-k)_\rho (q+\rho-1)^{(\rho)} B_{q+\rho} + D^{-k} u = 0.$$

Положимъ для краткости

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=n-q} (-k)_\rho (q+\rho-1)^{(\rho)} B_{q+\rho} = C_q$$

$$D_z^{-k} u = V, \tag{23}$$

тогда послѣднее уравненіе обратится въ такое

$$\sum_{q=1}^{q=n} C_q z^{q-1} V^{(q)} + V = 0. \tag{24}$$

На основаніи формулъ (20)' и (23) зависимость между ин-
 тегралами уравненій (20) и (24) будетъ:

$$y = x^{nk+n-1} D_z^{(k)} V. \tag{24'}$$

Поэтому, припомнивъ формулу (10), заключаемъ, что, если k
 есть цѣлое число, то, сдѣлавъ въ уравненіи (24) снова за-
 мѣну независимаго переменнаго при помощи соотношенія

$$V = x^{-(n-1)} y_k,$$

и положивъ

уравнение (24) обратимъ въ такое

$$y_k^{(n)} + y_k = 0, \quad (25)$$

гдѣ $y_k^{(n)}$ означаетъ n -ую производную y_k по x . Во избѣжаніе новыхъ выкладокъ, можно поступить иначе. Именно, взявъ уравненіе (25), положимъ въ немъ

$$y_k = x^{(n+1)} V$$

и затѣмъ сдѣлаемъ (указанную замѣну) независимаго переменнаго, тогда полученное уравненіе должно быть тождественно съ (24). Но такъ какъ уравненіе (25) получается изъ (20), полагая въ немъ $k=0$, то, очевидно, что искомое нами уравненіе будетъ тождественно съ уравненіемъ (22), если въ немъ положить $k=0$.

Сдѣлавъ это и замѣняя u чрезъ V и p чрезъ q , будемъ имѣть

$$\sum_{q=1}^{q=n} z^{q-1} V^{(q)} \sum_{i=0}^{i=n-q} (n-1)_i n^{(i)} A_q^{(n-i)} + V = 0. \quad (26)$$

И такъ, это уравненіе при k цѣломъ непремѣнно тождественно съ уравненіемъ (24).

Коль скоро такъ, то непремѣнно коэффициенты при одинакихъ членахъ $z^{q-1} V^{(q)}$ въ обоихъ уравненіяхъ (24) и (26) должны быть тождественны, т. е.

$$C_q = \sum_{i=0}^{i=n-q} (n-1)_i n^{(i)} A_q^{(n-i)}. \quad (27)$$

Но при помощи соотношеній, приведенныхъ выше, C_q можно выразить чрезъ коэффициенты A еще слѣдующимъ образомъ:

$$C_q = \sum_{\rho=0}^{\rho=n-q} (-k)_{\rho} (q+\rho-1)^{(\rho)} \sum_{i=0}^{i=q-\rho} (n-1)_i A_{q+\rho}^{(n-i)}. \quad (28)$$

Достаточно одного взгляда на эту формулу, чтобы замѣтить, что C_q есть цѣлая рациональная функція k вида:

$$C_q = E_q^{(0)} + E_q^{(1)} \cdot k + E_q^{(2)} \cdot k^2 + E_q^{(3)} \cdot k^3 + \dots \quad (28')$$

Но, такъ какъ въ выраженіе для C_q k вовсе не входитъ, то заключаемъ, что тождественность выраженій (27) и (28) или (28') возможна при единственномъ условіи (когда k не нуль), если коэффициенты при различныхъ степеняхъ k тождественно равны нулю, т. е. необходимо:

$$E_q^{(1)} = E_q^{(2)} = E_q^{(3)} = \dots = 0$$

и
$$C_q = E_q^{(0)}.$$

Въ томъ же самомъ можно убѣдиться непосредственно, если подставить въ формулу (28) извѣстныя значенія коэффициентовъ A ; но по сложности этихъ выраженій такой путь слишкомъ утомителенъ.

Однако, при выводѣ уравненія (24), мы не дѣлали никакихъ ограниченій относительно k и, понятно, что составъ коэффициентовъ C_q (28) остается тотъ-же, будетъ-ли k цѣлое или какое-угодно постоянное, и разъ мы убѣдились, что въ (28') коэффициенты E_q тождественно равны нулю, исключая $E_q^{(0)}$, то заключаемъ, что и при какомъ угодно значеніи k , коэффициенты C_q вовсе не зависятъ отъ k и выраженія (27) и (28) равны между собой; значитъ, и уравненіе (24) при всякомъ k тождественно съ уравненіемъ (26). А это послѣднее есть не что иное, какъ преобразованное уравненіе (25), интеграль котораго извѣстенъ, именно:

$$y_k = \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i x}$$

Слѣдовательно, интеграль ур. (26) или что то-же (24) есть

$$V = z^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}$$

гдѣ c_i одно изъ произвольныхъ постоянныхъ; а отсюда изъ (24') и видно, что интеграль уравненія (20) при всякомъ значеніи k будетъ:

$$y = x^{nk+n-1} D_z^{(k)} \left(z^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} \right); \quad (28)$$

или, принявъ прежнее обозначеніе, т. е. полагая $\alpha = -nk$, будемъ имѣть, что интеграль уравненія (20), или что то-же (1), при какомъ угодно α равенъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x^{-(\alpha-n+1)} D_z^{-\frac{\alpha}{n}} \left(z^{-\frac{n-1}{n}} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} \right) z = x^n \pm \infty \quad (29)$$

Эту формулу можно упростить, а именно, замѣтивъ, что

$$z^{-\frac{n-1}{n}} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{r_i} \frac{d}{dz} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}$$

и отнеся множители $\frac{n}{r_i}$ къ произвольнымъ постояннымъ, получимъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x^{-\alpha+n-1} D^{-\frac{\alpha}{n}+1} \left(e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} \right) z = x^n \pm \infty \quad (29)$$

9. Выраженіе это при помощи извѣстныхъ формулъ дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ представляется въ видѣ опредѣленнаго интеграла¹. Намъ достаточно найти его только для случая $\alpha > n$, такъ какъ, если въ уравненіи (1) $\alpha < n$, то посредствомъ преобразованія, указаннаго въ § 1, всегда возможно выразить интеграль этого уравненія чрезъ интеграль

¹ См. статью г. *Льтникова* въ Матем. сборникъ, Т. III, стр. 28 — 30, формулы (A) и (A').

другаго уравненія того-же вида, въ которомъ уже соотвѣтственное $\alpha > n$. Искомое выраженіе будетъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \xi^{\frac{\alpha}{n}-2} e^{r_i x (1 \pm \xi)^{\frac{1}{n}}} d\xi, \quad (30)$$

гдѣ $\alpha > n$, ξ — вспомо ательное переменное, знаки \pm берутся, смотря по тому $r_i \leq 0$, C_i — произвольное постоянное, отличное отъ предыдущаго.

Зная же интеграль уравненія (1), при помощи формулъ (14) и (19) находимъ интегралы уравненій (12) и (15).

10. Извѣстно, что при $n = 2$, интеграль уравненія (1) находится въ весьма простой зависимости съ трансцендентными функціями Бесселя. Именно, если въ уравненія (1) положимъ $\alpha = 2i + 1$ и назовемъ интеграль этого уравненія чрезъ y_i , а функцію Бесселя означимъ чрезъ $J_i(x)$, то

$$y_i = x^{-i} J_i(x). \quad (a)$$

Предыдущій анализъ обнаруживаетъ, что и при какомъ угодно n функція, связанная съ интеграломъ уравненія (1) посредствомъ зависимости (a), обладаютъ свойствами, аналогичными со свойствами функцій Бесселя. Основные изъ нихъ легко выводятся изъ равенствъ (7), (8), (9) и (10). Полагая въ уравненія (1)

$$\alpha = ni + (n - 1)$$

и принявъ во вниманіе равенства (a), изъ формулы (7) имѣемъ:

$$J_{i-1}(x) = DJ_i(x) + \frac{(n-1)i}{x} J_i(x) \quad (b)$$

изъ (8): $D^{(n-1)} \left(x^{-i} J_i(x) \right) + x^{-i} J_{i-1}(x) = 0 \quad (c)$

изъ (9):
$$D^{-ni} \left(x^{-(i-1)} J_{i-1}(x) \right) = x D^{-ni+1} \left(x^{-i} J_i(x) \right) \quad (d)$$

изъ (10):
$$D^{(k)} \left(z^{\frac{n-1}{n}(i+k)} J_{i+k}(\sqrt{z}) \right) =$$

$$= \binom{1}{n}^k z^{\frac{(n-1)}{n}i} J_i(\sqrt{z}). \quad (e)$$

При $n = 2$ эти зависимости выражаютъ известные свойства функций Бесселя¹⁾.

11. Приемъ, изложенный въ § 1, можетъ быть примененъ къ разысканію случаевъ интегрируемости въ конечной формѣ многихъ другихъ уравненій. Изъ нихъ мы укажемъ слѣдующее:

$$y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} + \beta x^\mu \cdot y = 0, \quad (a)$$

гдѣ α , β и μ — постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части этого уравненія на x^α , интегрируя и отбрасывая произвольное постоянное, получимъ:

$$x^\alpha y^{(n-1)} + \beta \int x^{\alpha+\mu} y dx = 0.$$

Полагая $\int x^{\alpha+\mu} y dx = x^{\alpha+\mu+1} y_1$,

исключая изъ послѣднихъ двухъ уравненій y , и затѣмъ, повторивъ тотъ-же рядъ операций k разъ, мы придемъ къ такому уравненію:

$$y_k^{(n)} + \frac{\alpha + k(\mu + n)}{x} y_k^{(n-1)} + \beta x^\mu y_k = 0. \quad (a_k)$$

¹⁾ См. J. Todhunter, «An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions». 1875. § 386 и § 391.

Если известенъ интеграль одного изъ уравненій (а) или (а_к), то не трудно будетъ найти интеграль другаго.

Примѣръ 1. Известно, что уравненіе

$$y^{(n)} + \beta x^{-2n} y = 0, \quad (1)$$

интегрируется въ конечной формѣ (въ этомъ легко убѣдиться, положивъ $x = -\frac{1}{z}$). Зная же это, изъ рассмотрѣнія уравненій (а) и (а_к) слѣдуетъ, что и уравненіе

$$y^{(n)} \pm \frac{n^k}{x} y^{(n-1)} + \beta x^{-2n} y = 0, \quad (b)$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если k цѣлое.

Въ этомъ же можно убѣдиться, если въ уравненіи (1) сдѣлать замѣну независимаго переменнаго по формулѣ $x = -\frac{1}{z}$.

Примѣръ 2. Найдемъ случаи интегрируемости уравненія:

$$y''' + \frac{3(i+1)}{x} y'' + \beta x^i y = 0. \quad (c)$$

Положивъ $x = z^{-\frac{1}{3i+1}}$,

получимъ

$$y''' + \frac{3(2i+1)}{3i+1} \frac{1}{z} y'' + \beta_1 z^{\mu_1} y = 0, \quad (c')$$

гдѣ производныя отъ y взяты по z и

$$\mu_1 = -\frac{\mu + 3(3i+2)}{3i+1}, \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{(3i+1)^3}.$$

Отъ уравненія (с') при помощи m операцій, указанныхъ въ началѣ этого параграфа, переходимъ къ такому уравненію

$$y_m''' + \frac{\lambda}{z} y_m'' + \beta_1 z^\mu y_m = 0, \quad (c'_m)$$

гдѣ
$$\lambda = \frac{3(2i+1) - m(\mu+3)}{3i+1}.$$

Замѣтивъ, что уравненіе (с) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если i — цѣлое, а $\mu=0$ или $\mu=-6$, находимъ два уравненія вида (с'_m) тоже интегрируемыя, которыя, какъ не трудно видѣть, заключаются въ одномъ слѣдующемъ:

$$y''' + \frac{3k}{3i+1} \frac{1}{z} y'' + \beta_1 z^{-3 \pm \frac{3}{3i+1}} y = 0, \quad (d)$$

гдѣ k и i — какія угодно положительныя или отрицательныя цѣлыя числа¹.

¹ Уравненіе (d) есть частный случай уже рассмотрѣннаго нами уравненія: $x^2 y''' + Axy'' + By' + Cx^\mu y = 0$. См. Сообщенія мат. общ. за 1883 годъ. Вып. II, стр. 115—126. При $k=0$ ур. (d) тождественно съ изученнымъ г. Флоровымъ. См. тамъ-же стр. 129—133.

О ЗНАЧЕНИИ,

КАКОЕ МОЖНО ПРИДАТЬ ВЪ ДИНАМИКЪ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ
ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ГАМИЛЬТОНА И НАИМЕНЬ-
ШАГО ДѢЙСТВІЯ.

П. М. Новикова.

Пусть дана система n матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою p условіями; выразимъ $3n$ координатъ точекъ системы черезъ $3n - p = m$ количествъ, такъ чтобы связи были тождественно удовлетворены; тогда эти m количествъ, которыя мы обозначимъ черезъ q_1, q_2, \dots, q_m , будутъ представлять собою независимыя координаты системы, называемыя координатными параметрами или обобщенными координатами. Если система подвержена дѣйствию силъ, имѣющихъ потенціалъ, то, какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія движенія системы приводятъ къ нулю первую вариацию интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt, \quad (1)$$

гдѣ T — живая сила системы, U — потенціалъ силъ и интеграція берется между двумя моментами времени, въ которые положенія системы даны.

Обратно, условіе, что 1-я вариация интеграла (1) равна нулю

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0, \quad (2)$$

приводить къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, которыя, принимая для краткости

$$T + U = P,$$

въ вышеупомянутыхъ обобщенныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} - \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} - \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0, \dots$$

$$\dots \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_m'} - \frac{\partial P}{\partial q_m} = 0, \quad (3)$$

гдѣ $q_1', q_2' \dots q_m'$, какъ вообще, обозначаютъ производныя координатъ.

Мы здѣсь постараемся показать, что и вторая вариация интеграла (1) имѣетъ важное значеніе въ динамикѣ, именно по отношенію къ такъ называемой устойчивости движенія.

Если скорости или координаты движущейся системы материальныхъ точекъ будутъ въ какое нибудь мгновеніе бесконечно-мало измѣнены, то точки системы станутъ описывать другія траекторіи, различныя отъ тѣхъ, которыя бы онѣ описали, если бы не было произведено этихъ бесконечно-малыхъ измѣненій координатъ и скоростей. Совокупность измѣненныхъ траекторій можетъ быть названа возмущеннымъ путемъ системы, совокупность же неизмѣненныхъ траекторій точекъ системы назовемъ невозмущеннымъ путемъ. Если послѣ возмущенія положенія системы на возмущенномъ пути будутъ бесконечно-мало разниться отъ положеній, которыя бы система имѣла въ то же время на невозмущенномъ пути, то движеніе системы на невозмущенномъ

пути называется устойчивым; если же положенія точекъ на возмущенномъ пути системы съ теченіемъ времени будутъ удаляться все больше и больше до конечнаго или бесконечно-большаго разстоянія отъ одновременныхъ положеній на невозмущенномъ пути, то движеніе системы называется неустойчивым¹.

Такъ какъ въ возмущенномъ пути координаты системы будутъ различаться отъ координатъ невозмущеннаго, то, обозначая ихъ черезъ $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$ и вставляя въ уравненія (3) вмѣсто q_1, q_2, \dots, q_n , получимъ уравненія движенія на возмущенномъ пути. Развернувъ правыя части такимъ образомъ полученныхъ уравненій по степенямъ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ и изъ производныхъ, отбросивъ члены, содержащіе степени этихъ количествъ выше первой степени, такъ какъ мы, имѣя въ виду опредѣлить условія устойчивости, предполагаемъ, что эти количества сохраняютъ во время движенія бесконечно-малыя значенія; вычитая наконецъ изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій почленно уравненія (3), получимъ уравненія линейныя по отношенію къ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены какъ эти величины, такъ и условія, при которыхъ они сохраняютъ бесконечно-малыя значенія. Полученныя въ концѣ линейныя по отношенію къ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ дифференціальныя уравненія, оче-

¹ Существуютъ еще другія опредѣленія устойчивости, различающіяся отъ вышеприведеннаго. Такъ, устойчивымъ называется такое движеніе, въ которомъ возмущенный путь всегда остается бесконечно близкимъ къ невозмущенному, хотя бы при этомъ одновременныя положенія системы на невозмущенномъ и возмущенномъ путяхъ и расходились въ теченіи времени на конечное или бесконечное разстояніе. Такую устойчивость можно назвать устойчивостью по отношенію къ пространству. Частный случай ея представляетъ консервативная устойчивость, разсматриваемая въ «Natural Philosophy» Томсона и Тэта. Въ моемъ сообщеніи на сѣздѣ естеств. и врач. въ Одессѣ я, имѣя въ виду показать связь между свойствами движенія и свойствами интеграла наименьшаго дѣйствія, назвалъ устойчивымъ такое движеніе, въ которомъ невозмущенный путь имѣетъ общія положенія съ возмущеннымъ. Подробный разборъ различныхъ видовъ устойчивости будетъ представленъ въ имѣющей скоро появиться моей работѣ объ этомъ предметѣ.

видно, представляют собою не что иное какъ первыя вариации уравненій (3) по координатамъ и могутъ быть изображены такимъ образомъ:

$$\delta \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} - \frac{\partial P}{\partial q_1} \right) = 0, \delta \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} - \frac{\partial P}{\partial q_2} \right) = 0, \dots$$

$$\dots \delta \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_n'} - \frac{\partial P}{\partial q_n} \right) = 0. \quad (4)$$

Варьируя на самомъ дѣлѣ, мы получимъ дифференціальныя линейныя уравненія, изъ которыхъ опредѣлятся условія устойчивости и бесконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго. Эти уравненія можно, въ виду ихъ свойствъ, называть дифференціальными уравненіями устойчивости движенія.

Принимая во вниманіе, что первая вариация опредѣленнаго интеграла (1) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\delta \int P dt = \int \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} \right) \delta q_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} \right) \delta q_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{\partial P}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_n'} \right) \delta q_n \right\} dt,$$

можемъ, какъ извѣстно, вторую вариацию выразить такъ:

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} \right) \delta q_1 + \delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} \right) \delta q_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_n'} \right) \delta q_n \right\} dt, \quad (5)$$

гдѣ, какъ и въ предыдущемъ, интеграція берется между начальнымъ и конечнымъ моментомъ и положенія системы для этихъ моментовъ считаются данными; знаки же предѣловъ опущены для краткости.

Изъ сопоставленія выраженія (5) съ уравненіями устойчивости (4) мы можемъ вывести слѣдующую теорему. Безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, если они удовлетворяютъ предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую вариацию Гамильтонова интеграла къ нулю. Можно эту теорему представить въ нѣсколько другой формѣ. Вторая вариация опредѣленнаго интеграла $\int_{t_0}^{t_1} P dt$, какъ извѣстно, можетъ быть приведена къ формѣ

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1'^2} \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1' \partial q_2'} \omega_1 \omega_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2'^2} \omega_2^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1' \partial q_3'} \omega_1 \omega_3 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2' \partial q_3'} \omega_2 \omega_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3'^2} \omega_3^2 + \dots \right\} dt, \quad (6)$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ извѣстныя линейныя функціи вариаций координатъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Принимая во вниманіе, что $P = T + U$, гдѣ U не содержитъ производныхъ координатъ, имѣемъ

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2} \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'} \omega_1 \omega_2 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2} \omega_2^2 + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_3'} \omega_1 \omega_3 + \dots \right\} dt.$$

Здѣсь подъ знакомъ интеграла находится не что иное какъ значеніе T , которое оно получитъ, когда мы замѣнимъ q'_1, q'_2, \dots, q'_n черезъ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; но T , какъ живая сила системы матеріальныхъ точекъ, при всѣхъ значеніяхъ производныхъ координатъ q_1, q_2, \dots, q_n , не можетъ сдѣлаться отрицательною величиной и наименьшее ея значеніе будетъ нуль; поэтому нулевое значеніе второй вариации Гамильтонова интеграла будетъ наименьшимъ значеніемъ этой вариации. Отсюда предыдущая теорема можетъ быть высказана такъ: Безконечно малыя отклоненія возмущен-

наго пути отъ невозмущеннаго, удовлетворяющія предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую вариацию Гамильтонова интеграла къ минимуму (I).

Съ другой стороны, беря вторую вариацию Гамильтонова интеграла въ простѣйшей формѣ, которая не подверглась еще никакимъ преобразованіямъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \delta^2 \int P dt = \int \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} \delta q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2} \delta q_2^2 + \right. \\ + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_3} \delta q_1 \delta q_3 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \delta q_2 \delta q_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3^2} \delta q_3^2 + \dots \\ + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_1} \delta q_1 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_2} \delta q_1 \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_n} \delta q_1 \delta q'_n + \\ + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_1} \delta q_2 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_2} \delta q_2 \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_n} \delta q_2 \delta q'_n + \\ \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1'^2} \delta q_1'^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_2} \delta q'_1 \delta q'_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2'^2} \delta q_2'^2 + \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_3} \delta q'_1 \delta q'_3 + \dots \right\} dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ вторая вариация интеграла $\int P dt$, представленная въ формѣ (7), получаетъ значеніе минимума по отношенію къ произвольнымъ вариациямъ координатъ; иначе говоря, предполагая въ (7) все вторыя производныя P выраженными во времени съ помощью рѣшеній дифференціальныхъ уравненій движенія (3), опредѣлимъ—при какихъ функциональных значеніяхъ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, рассматриваемыхъ какъ произвольныя функціи t , $\delta^2 \int P dt$, получить наименьшее значеніе. Поступая по общимъ правиламъ вариационнаго исчисленія, получимъ n дифференціальныхъ уравненій, которыя можно представить въ слѣдующей типической формѣ:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_i} \delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_i} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q_i} \delta q_n + \\ & + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q_i} \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q_i} \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q_i} \delta q'_n - \\ & - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_i} \delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_i} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q'_i} \delta q_n + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_i} \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q'_i} \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q'_i} \delta q'_n \right\} = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

полагая здѣсь $i = 1, 2, \dots, n$, получимъ всѣ n дифференціаль-
ныхъ уравненій задачи вариационнаго исчисленія въ ея прило-
женіи къ данному случаю. Уравненія (8) можно представить,
очевидно, въ весьма сжатомъ видѣ, именно

$$\delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q'_i} \right) = 0 \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

но эти послѣднія суть не что иное, какъ уравненія устойчи-
вости движенія. Такимъ образомъ мы пришли къ теоремѣ: Усло-
вія, которыя должны быть выполнены для того, чтобы
вторая вариация Гамильтонова интеграла получила
значеніе мінімумъ, представляютъ собою уравненія
устойчивости, т. е. уравненія, изъ которыхъ опредѣ-
ляются безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго
пути отъ невозмущеннаго (II).

Такъ какъ наименьшее значеніе второй вариации есть нуль,
то эту теорему можно перефразировать подобно предыдущей, за-
мѣнивъ только слова «значеніе мінімумъ» словами «нулевое зна-
ченіе».

Эти двѣ теоремы (I) и (II) вмѣстѣ представляютъ новый второстепенный принципъ динамики, который можно назвать принципомъ второй вариации Гамильтонова интеграла. Принципъ второй вариации имѣетъ то же значеніе для устойчивости движенія, какое принципъ самого Гамильтонова интеграла имѣетъ для самого движенія. Аналогія между этими двумя принципами до-того велика, что выраженіе принципа Гамильтона переходитъ въ выраженіе принципа второй вариации; стоитъ только въ первомъ подставить вмѣсто интеграла его вторую вариацию и вмѣсто координатъ ихъ вариации. Тѣ-же самыя разсужденія и выводы, очевидно, приложимы и къ интегралу наименьшаго дѣйствія, который для большей наглядности можно представлять себѣ въ формѣ данной Якоби, т. е. исключить изъ интеграла время посредствомъ уравненія сохраненія энергіи. Но такъ какъ начало наименьшаго дѣйствія требуетъ сохраненія постоянной полной энергіи, то возмущенія движенія должны неизмѣнять живой силы системы; такія возмущенія называются консервативными; если кромѣ возмущеній будутъ еще и смѣщенія, то совокупность смѣщеній и возмущеній не должна мѣнять полной энергіи системы. Сверхъ того, такъ какъ, представивъ интегралъ наименьшаго дѣйствія въ формѣ Якоби, мы исключаемъ время, то изслѣдуемая устойчивость будетъ относиться только къ пространству. Обѣ предыдущія теоремы сохраняютъ свою форму за исключеніемъ замѣны Гамильтонова интеграла интеграломъ наименьшаго дѣйствія.

(II)

Прихвръ. 1) Пусть

1

Пусть II

$$(1) \dots, (w, z), \lambda, (w, y), \lambda, (w, x), \lambda$$

О РАЗЛОЖЕНІИ ВЪ РЯДЪ МАКЛОРЕНА

НѢКОТОРЫХЪ ФУНКЦІЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕ- МѢННЫМИ.

И. Пташицаго.

Эрмитъ въ своемъ «Cours d'analyse de l'école polytechnique» на 64-й стр. указываетъ на нѣсколько разложеній функцій отъ двухъ перемѣнныхъ въ рядъ Маклорена. Указанныя Эрмитомъ разложенія тѣмъ интересны, что въ нихъ коэффициенты приведены къ очень простому виду, между тѣмъ какъ привести ихъ къ этому виду довольно трудно, если для полученія коэффициентовъ пользоваться общимъ приемомъ, т. е. если вычислять ихъ съ помощью производныхъ.

Въ настоящей замѣткѣ я указываю на два весьма элементарныхъ приема, которые позволяютъ, пользуясь разложеніями функцій отъ одной перемѣнной, получить разложенія Эрмита.

(2) Съ помощью тѣхъ же приемовъ, какъ легко видѣть, можно найти разложенія многихъ другихъ функцій отъ двухъ и болѣе перемѣнныхъ, причемъ коэффициенты въ этихъ разложеніяхъ будутъ выражены въ простомъ видѣ, между тѣмъ какъ приведеніе ихъ къ такому виду иногда очень затруднительно, если для ихъ вычисленія пользоваться общимъ приемомъ.

I.

Пусть

$$f_1(x, u), f_2(y, u), f_3(z, u); \dots, \quad (1)$$

разсматриваемыя какъ функціи отъ переменныхъ

$$x, y, z, \dots,$$

разлагаются въ рядъ Маклорена, такъ что

$$f_1(x, u) = \sum \Phi_1^{(m)}(u) \cdot x^m, \quad f_2(y, u) = \sum \Phi_2^{(n)}(u) \cdot y^n,$$

$$f_3(z, u) = \sum \Phi_3^{(p)}(u) \cdot z^p, \dots;$$

тогда $\Phi(x, y, z, \dots)$, функція отъ переменныхъ x, y, z, \dots , опредѣляемая равенствомъ

$$\Phi(x, y, z, \dots) = \int_a^b f_1(x, u) \cdot f_2(y, u) \cdot f_3(z, u) \dots du, \quad (2)$$

будетъ разлагаться въ рядъ Маклорена, а именно:

$$\Phi(x, y, z, \dots) = \sum A_{(m, n, p, \dots)} x^m y^n z^p \dots, \quad (3)$$

гдѣ

$$A_{(m, n, p, \dots)} = \int_a^b \Phi_1^{(m)}(u) \cdot \Phi_2^{(n)}(u) \cdot \Phi_3^{(p)}(u) \dots du. \quad (4)$$

Если теперь выбирать функціи (1) такъ, чтобы интегралъ (2) выражался въ конечномъ видѣ и чтобы интегралы (4) выражались особенно просто, то мы будемъ получать сейчасъ же разложенія (3) въ рядъ Маклорена нѣкоторыхъ функцій отъ многихъ переменныхъ и въ этихъ разложеніяхъ коэффициенты будутъ выражаться особенно просто.

Примѣры. 1) Пусть

$$f_1(x, u) = \frac{1}{1-xu} = \sum x^m u^m,$$

$$f_2(y, u) = \frac{1}{1-y(1-u)} = \sum y^n (1-u)^n;$$

$$a=0, \quad b=1;$$

такъ что интегралы (2), (4) соответственно равны

$$\int_0^1 \frac{1}{1-xu} \cdot \frac{1}{1-y(1-u)} du, \quad \int_0^1 u^m (1-u)^n du.$$

Такъ-какъ значенія ихъ соответственно приводятся къ

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y}, \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+n+1)},$$

то равенство (3) даетъ

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y} = \sum \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+n+1)} x^m y^n.$$

Это третій рядъ Эрмита.

2) Пусть

$$f_1(x, u) = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-xu} = \sum u^{m-\frac{1}{2}} x^m,$$

$$f_2(y, u) = \frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-y(1-u)} = \sum (1-u)^{n-\frac{1}{2}} y^n,$$

$$a=0, \quad b=1;$$

такъ что интегралы (2), (4) соответственно равны

*

$$\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-xu} \cdot \frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-y(1-u)} du, \quad \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}} (1-u)^{n-\frac{1}{2}} du,$$

Значеніе перваго изъ нихъ выражается въ конечномъ видѣ; значеніе втораго, какъ извѣстно, представляется очень просто. Подставляя эти значенія въ равенство (3), находимъ

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1 + (1-x)^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2(m+n)} x^m y^n. \end{aligned}$$

Это первый рядъ Эрмита.

II.

Пусть

$$\Phi_m(y) \tag{1}$$

функции отъ переменнѣй y , разлагающіяся въ рядъ Маклорена, такъ что

$$\Phi_m(y) = \sum \Lambda_n^{(m)} y^n;$$

тогда $\Phi(x, y)$, функция отъ переменнѣхъ x, y , опредѣляемая равенствомъ

$$\Phi(x, y) = \sum \Phi_m(y) \cdot x^m \quad (m \text{ цѣлое и полож.}), \tag{2}$$

будетъ разлагаться въ рядъ Маклорена, а именно:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum \Lambda_n^{(m)} x^m y^n = \\ &= \sum (\Lambda_0^{(m)} + \Lambda_1^{(m)} y + \Lambda_2^{(m)} y^2 + \dots) x^m. \end{aligned} \tag{3}$$

Если теперь выбирать функции (1) такъ, чтобы коэффициенты $A_n^{(m)}$ выражались особенно просто и чтобы сумма ряда (2) определялась легко, то мы будемъ получать сейчасъ же разложениа (3) нѣкоторыхъ функций отъ переменныхъ x, y , и въ этихъ разложениахъ коэффициенты будутъ выражаться особенно просто.

Примѣры. 1) Пусть

$$\varphi_m(y) = \frac{d^m \{ [f(c)]^m F(c) \}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot dc^m},$$

гдѣ

$$f(c) = c^2, \quad F(c) = \frac{1}{1-cy},$$

такъ что

$$\varphi_m(y) = \sum \frac{(2m+n)(2m+n-1)\dots(m+n+1) \cdot c^{m+n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} y^n.$$

При нашемъ выборѣ $\varphi_m(y)$, сумма ряда (2), какъ извѣстно, будетъ

$$F(z) \frac{dz}{dc},$$

гдѣ

$$z = c + xz^2;$$

т. е. она приводится къ

$$\frac{1}{1 + (1-4cx)^{-\frac{1}{2}}}$$

Слѣдовательно равенство (3) даетъ

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2m+n)(2m+n-1)\dots(m+n+1) x^{m+n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \frac{1}{1-2cy+(1-4cx)\frac{1}{2}}$$

Этотъ рядъ обращается во второй рядъ Эрмита, если въ немъ положить $c=1$ и на мѣсто x, y соответственно подставить $\frac{x^2}{2^2}, \frac{y}{2}$.

2) Пусть

$$\Phi_m(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \int \frac{y^{m+1} dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

такъ что, какъ извѣстно,

$$\Phi_m(y) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \dots (2m+1)} \left(1 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^4 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} y^{2m} \right).$$

При нашемъ выборѣ $\Phi_m(y)$ сумма ряда (2) легко можетъ быть опредѣлена. Въ самомъ дѣлѣ, она не что иное какъ

$$\sum \frac{-x^m}{\sqrt{1-y^2}} \int \frac{y^{m+1} dy}{\sqrt{1-y^2}} = \\ = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \sum x^m y^{2m+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \int \frac{y dy}{(1-xy^2)\sqrt{1-y^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1-y^2)}} \cdot \arccos \sqrt{\frac{1-x}{1-xy^2}}.$$

Слѣдовательно равенство (3) даетъ

$$\frac{\arccos \sqrt{\frac{1-x}{1-xy^2}}}{\sqrt{x(1-x)(1-y^2)}} =$$

$$= \sum \frac{2.4 \dots 2m}{3.5 \dots (2m+1)} \left(1 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1.3}{2.4} y^4 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} y^{2m} \right) x^m.$$

Этот ряд обращается въ четвертый рядъ Эрмита, если въ немъ подставить $\frac{y}{x}$ на мѣсто y^2 .

3) Пусть

$$\Phi_m(y) = \frac{-1}{y\sqrt{1-y^2}} \int \frac{y^{2m+2} dy}{\sqrt{1-y^2}} +$$

$$+ \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{1.3.5 \dots (2m+1)}{2.4.6 \dots (2m+2)} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Поступая въ этомъ примѣрѣ подобнымъ образомъ, какъ въ предыдущемъ, послѣ замѣны въ окончательномъ результатѣ y^2 на $\frac{y}{x}$, получимъ пятый рядъ Эрмита.

$$\frac{\frac{x-1}{x} \sqrt{\frac{209}{916}}}{\frac{1-x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots \right) = \sum \frac{1}{x^n}$$

$$x^m \left(\frac{1-m}{x} + \dots \right)$$

ЗАМѢТКА

ОБЪ ОБОБЩЕНІИ УРАВНЕНІЯ РИКАТТИ.

В. П. Алексѣевскаго.

Разысканіе условій, при которыхъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 + R = 0 \tag{1}$$

можетъ быть проинтегрировано конечнымъ числомъ квадратуръ, привело профессора А. В. Лѣтникова къ извѣстному уравненію¹, изъ котораго при частныхъ допущеніяхъ получается уравненіе Рикатти, а также уравненіе Мальмстена, Кокля, и другія уравненія, представляющія обобщеніе уравненіе Рикатти².

Въ виду этого можно задаться такою задачей: зная, при какихъ условіяхъ уравненіе Рикатти интегрируется конечнымъ числомъ квадратуръ, найти общее уравненіе вида (1), интеграція котораго возможна.

Слѣдующія разсужденія весьма просто разрѣшаютъ эту задачу и приводятъ къ уравненію профессора Лѣтникова.

Уравненіе Рикатти

¹ См. дальше ур. (5).

² См. статью А. В. Лѣтникова въ Математическомъ сборникѣ за 1866 годъ.

$$\frac{dy}{dz} + ay^2 = bz^m$$

интегрируется, если

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

гдѣ i цѣлое положительное число. Сдѣлавъ въ немъ замѣну независимаго переменнаго, т. е. положивъ

$$z = \varphi(x), \quad (2)$$

и означая производную отъ z по x чрезъ $\varphi'(x)$, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} + a\varphi'(x)y^2 = b\varphi'(x)\varphi(x) - \frac{4i}{2i \pm 1}$$

Полагая здѣсь

$$y = uy_1, \quad (3)$$

гдѣ u есть произвольная функція отъ x , а y_1 новое независимое переменное, находимъ:

$$\frac{dy_1}{dx} + a\varphi'(x)uy_1^2 + \frac{u'}{u}y_1 = b \frac{\varphi'(x)\varphi(x) - \frac{4i}{2i \pm 1}}{u} \quad (4)$$

Это и есть искомое уравненіе вида (1). Если положить

$$\varphi'(x)u = X_1, \quad \frac{u'}{u} = X_2, \quad a = b = 1,$$

откуда

$$u = e^{\int X_2 dx}, \quad \varphi(x) = c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx,$$

то уравненіе (4) принимаетъ видъ уравненія профессора Лѣтникова, именно:

$$\frac{dy_1}{dx} + X_1 y_1^2 + X_2 y_1 -$$

$$\frac{X_1 e^{-2 \int X_2 dx}}{\left(c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} \right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0. \quad (5)$$

Если бы вмѣсто подстановки (3) мы положили

$$(2) \quad y = u y_1 + v,$$

то получили бы уравнение вида (1), содержащее три произвольныя функции u , v , $\Phi(x)$.

Изъ предыдущаго же ясно, что для интеграціи уравненія (4) или, что то-же, (5) достаточно ихъ обратить въ уравнение Рикатти, что легко сдѣлать, пользуясь формулами (2) и (3).

(3)

Въ уравненіи (1) положимъ $y = u y_1 + v$, тогда получимъ уравненіе Рикатти въ u , которое можно интегрировать, если известна одна изъ функций u , v или $\Phi(x)$.

Если же известна только одна изъ функций u или v , то уравненіе Рикатти можно свести къ уравненію Бернулли, которое можно интегрировать, если известна одна изъ функций u , v или $\Phi(x)$.

Если же известна только одна изъ функций u или v , то уравненіе Рикатти можно свести къ уравненію Бернулли, которое можно интегрировать, если известна одна изъ функций u , v или $\Phi(x)$.

Слѣдующія рассужденія весьма просто разрешаютъ эту задачу и сводятъ уравненіе Рикатти къ уравненію Бернулли, которое можно интегрировать, если известна одна изъ функций u , v или $\Phi(x)$.

Уравненіе Рикатти

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е

нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться

А. А. Маркова.

Задача.

Опредѣлить коэффициенты

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

цѣлой функціи отъ x

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n$$

такъ, чтобы наибольшее численное значеніе отношенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

гдѣ $f(x)$ нѣкоторая данная цѣлая функція отъ x не выше какъ $2n$ -ой степени

$$f(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \dots (1 + a_{2n} x)$$

и x получаетъ всѣ значенія между -1 и $+1$, было какъ можно меньше.

Примѣчаніе.

Вопросъ этотъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, для рѣшенія которыхъ мы не имѣемъ никакихъ общихъ приемовъ, кромѣ указанныхъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ «Sur les questions de Minima etc.».

Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ представляетъ обобщеніе двухъ вопросовъ, рѣшенныхъ въ только что упомянутомъ мемуарѣ. На этомъ частномъ примѣрѣ я имѣю въ виду показать, что для всѣхъ разобранныхъ до сихъ поръ примѣровъ основныя разсужденія П. Л. Чебышева¹ могутъ быть замѣнены болѣе элементарными и наглядными.

По примѣру П. Л. Чебышева требованіе нашей задачи можно формулировать такъ: отношеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$ должно наименѣе уклоняться отъ нуля.

Замѣтимъ еще, что одни изъ данныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

могутъ быть вещественными, другія мнимыми.

Я предполагаю только, что произведеніе

$$(1 + a_1x)(1 + a_2x) \dots (1 + a_{2n}x)$$

приводится къ вещественной функціи отъ x и не обращается въ нуль ни при какихъ значеніяхъ x между -1 и $+1$.

Выводъ дифференціального уравненія.

По примѣру Е. И. Золотарева² приведемъ вопросъ нашъ къ интегрированію нѣкотораго дифференціального уравненія.

Пусть будутъ

¹ Sur les questions de Minima etc. 1858. Théorème 1.

² Приложение алгебраическихъ функций и пр. 1877.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots < \alpha_{m-1} < \alpha_m$$

всѣ корни уравненія

$$y = 0,$$

лежащіе между -1 и $+1$, причемъ двукратные корни считаются дважды, трехкратные трижды и т. д.

Нетрудно убѣдиться, что m должно равняться n .

Въ противномъ случаѣ, полагая

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m) = \omega(x)$$

и

$$\text{наименьшее численное значеніе } \frac{y}{\omega(x)} = k, \left[-1 \leq x \leq +1 \right],$$

можно составить функцію

$$\frac{y \mp k\omega(x)^*}{\sqrt{f(x)}}$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ вопроса и при $-1 \leq x \leq +1$

менѣе уклоняющуюся отъ нуля, чѣмъ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Наибольшія отклоненія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

отъ нуля соответствують

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1.$$

* Изъ двухъ знаковъ \mp передъ $k\omega(x)$ надо взять $-$, если между $x = -1$ и $x = +1$ отношеніе $\frac{y}{\omega(x)}$ число положительное, и $+$ въ противномъ случаѣ.

Здѣсь

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ означаютъ корни уравненія

$$d \frac{y}{\sqrt{f(x)}} = \frac{y' f(x) - \frac{1}{2} y f'(x)}{\{ \sqrt{f(x)} \}^3} = 0,$$

и лежатъ соотвѣтственно между

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2, \alpha_2 \text{ и } \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} \text{ и } \alpha_n.$$

Если въ одномъ изъ этихъ промежутковъ приходится нѣсколько корней уравненія

$$y' f(x) - \frac{1}{2} y f'(x) = 0,$$

то мы выбираемъ изъ этихъ корней одинъ и притомъ такой, какому соотвѣтствуетъ наибольшее численное значеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Всѣ полученныя такимъ образомъ наибольшія отклоненія нашей функціи отъ нуля должны быть равны между собой. Въ противномъ случаѣ можно составить другую функцію того же вида, менѣе отклоняющуюся отъ нуля.

Пусть напримѣръ наибольшее отклоненіе нашей функціи отъ нуля равно L' въ промежуткѣ отъ $x = \alpha_k$ до $x = \alpha_{k+1}$ и L въ промежуткѣ отъ $x = -1$ до $x = \alpha_k$ и отъ $x = \alpha_{k+1}$ до $x = 1$, причемъ $L > L'$.

Составимъ функцію

$$\omega(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+2}) \dots \dots (x - \alpha_n) = \frac{y}{(x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1})},$$

которая сохраняетъ знакъ одинаковый съ y .

при $-1 \leq x \leq \alpha_k$ и при $\alpha_{k+1} \leq x \leq +1$.

Положим затѣмъ

наибольшее численное значеніе $\frac{\omega(x)}{\sqrt{f(x)}} = h; [-1 \leq x \leq +1]$.

Тогда не трудно видѣть, что функція

$$y = \frac{L - L'}{h} \omega(x) \sqrt{f(x)}$$

при $-1 \leq x \leq +1$ будетъ менѣе уклоняться отъ нуля, чѣмъ

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при $x = +1$ и при $x = -1$ наша функція также должна равняться $\pm L$.

Въ предыдущемъ разсужденіи придется замѣнить только

$$\omega(x) \text{ на } -(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})$$

$$\text{или } +(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n).$$

И такъ, выраженіе

$$\frac{y^2}{f(x)} - L^2 = \frac{y^2 - L^2 f(x)}{f(x)}$$

должно обращаться въ нуль при

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1$$

и производная его

$$1 + \frac{d \frac{y^2}{f(x)}}{dx} = \frac{2yy'f(x) - y^2f'(x)}{[f(x)]^2} \geq 1 - \text{при}$$

при $x = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$.

А потому

$$\frac{d[y^2 - L^2 f(x)]}{dx} = 2yy' - L^2 f'(x)$$

при

$$x = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

также обращается въ нуль.

Слѣдовательно

$$y^2 - L^2 f(x) = -(1 - x^2) W^2$$

$$2y'f(x) - yf'(x) = 2WV,$$

гдѣ V и W двѣ цѣлыя функціи отъ x .

Степень W равна $n - 1$, а степень V не больше степени $f(x)$ и $2n - 1$.

Положимъ:

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}} = z$$

и исключимъ изъ нашихъ двухъ уравненій W .

Такимъ образомъ получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dz}{\sqrt{L^2 - z^2}} = \frac{V dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot f(x)} = \sum \frac{A_k dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot (1 + a_k x)}. \quad (1)$$

Рѣшеніе.

Введемъ вспомогательныя числа φ_k , опредѣляемыя уравненіями:

$$\cos \varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad \sin \varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_k x}},$$

причемъ для полной опредѣленности всѣ встрѣчающіеся у насъ квадратные корни будемъ извлекать такъ, чтобы вещественныя части выходили положительными, и сверхъ того при $x = -1$

положимъ $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+a_k} \sqrt{1-a_k}}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a_k x)}$$

и вещественная часть этого выраженія постоянно остается отрицательною (конечно $-1 < x < +1$).

При помощи введенныхъ нами величинъ φ_k общее рѣшеніе дифференціального уравненія (1) можетъ быть выражено слѣдующею формулою:

$$z = L \cos \left(C + \sum \frac{2 A_k \varphi_k}{\sqrt{1+a_k} \sqrt{1-a_k}} \right).$$

Въ этой формулѣ постоянныя

$$L, C, A_1, A_2, \dots, A_{2n}$$

остаются неопредѣленными.

Необходимыя значенія ихъ я просто угадываю.

А именно, искомая нами функция z определяется такимъ равенствомъ:

$$z = L \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}),$$

откуда

$$y = L \sqrt{f(x)} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}), \quad (2)$$

или

$$y = \frac{L}{2} \left\{ \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{x-1} \right) + \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{x-1} \right) \right\}. \quad (3)$$

Здѣсь буквою \prod_k мы хотимъ выразить произведение, распространенное на все значенія k .

Нетрудно видѣть, что написанная нами функция y дѣйстви-тельно цѣлая и притомъ n -ой степени.

Располагая эту функцию по степенямъ x , для коэффициента при x^n получаемъ слѣдующее выраженіе

$$\frac{L}{2} \left\{ \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right) + \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right) \right\}.$$

По условіямъ вопроса, коэффициентъ этотъ долженъ приводиться къ единицѣ.

Слѣдовательно,

$$L = \frac{2}{\prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right) + \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right)}. \quad (4)$$

Остается доказать, что составленная такимъ образомъ функція $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ дѣйствительно наименѣе отклоняется отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$.

Доказательство.

По мѣрѣ возрастанія x отъ -1 до $+1$ вещественныя части всѣхъ φ_k убываютъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до нуля; вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}$$

убываетъ отъ $n\pi$ до нуля.

А при такомъ убываніи суммы

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}$$

косинусъ ея

$$\text{Cos} (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n})$$

переходитъ черезъ нуль ровно n разъ и каждый разъ мѣняетъ свой знакъ.

Тотъ-же косинусъ достигаетъ своего наибольшаго численнаго значенія, единицы, при

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n} = n\pi, (n-1)\pi, (n-2)\pi, \dots, 2\pi, \pi, 0.$$

Соотвѣтствующія значенія x пусть будутъ

$$-1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1.$$

Сравнимъ нашу функцію $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ съ какою нибудь другою

$$\text{того-же вида } z = \frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}.$$

Разность ихъ

$$\frac{y_1 - y}{\sqrt{f(x)}}$$

можетъ обращаться въ нуль только $n - 1$ разъ, такъ-какъ $y_1 - y$ цѣлая функція отъ x не выше $(n-1)$ -ой степени.

Поэтому знакъ этой разности не можетъ быть противоположенъ знаку $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ при всѣхъ $n + 1$ слѣдующихъ значеніяхъ x :

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1.$$

А коль-скоро при

$$x = \beta_k$$

разность

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

имѣетъ одинаковый знакъ съ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$, численное значеніе

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}$$

больше соответственнаго численнаго значенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

т. е. болѣе L .

Итакъ, дѣйствительно, найденная нами функція z менѣе отклоняется отъ нуля, чѣмъ какая бы то ни было другая функція того-же вида.