ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ РИКАТТИ.

П. С. Флорова.

§ I. Дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy}{dx} + ry + py^2 + q = 0, \qquad (1)$$

въ которомъ количества r, p и q означаютъ функціи одного только x, принадлежитъ къ разряду не проинтегрированныхъ уравненій. Поэтому умѣстна задача объ отысканіи такихъ соотношеній между количествами r, p и q, при существованіи которыхъ вопросъ объ интегрированіи упомянутаго уравненія можно было бы свести къ квадратурамъ. Рѣшеніе этой задачи мы ставимъ въ зависимость отъ слѣдующихъ свойствъ уравненія (1): отъ способности его сохранять свой видъ послѣ подстановки

$$y = u + v\frac{1}{y_1}$$

гдѣ u и v функціи x, а y_1 новая зависимая; и отъ способности его сполна интегрироваться по одному изъ частныхъ интеграловъ (теорема Эйлера). Эти свойства мы полагаемъ въ основаніе нашего изслѣдованія потому, что ими устанавливается одинъ изъ раціональныхъ методовъ интегрированія уравненія (1):

во многихъ случаяхъ по первому изъ нихъ оказывается возможнымъ найдти частный интегралъ этого уравненія; по второму — докончить интеграцію. Въ смыслѣ отысканія признаковъ интегрируемости разсматриваемаго нами уравненія наиболѣе незамѣнимыя услуги оказываетъ первое его свойство: оно даетъ возможность, исходя изъ этого уравненія, строить системы новыхъ уравненій, интегралы которыхъ опредѣленнымъ образомъ (помощью нѣкоторыхъ непрерывныхъ дробей) связаны съ интеграломъ исходнаго и которые по виду тождественны съ нимъ; оно даетъ, слѣдовательно, возможность — таково заключеніе a priori — по одному изъ признаковъ интегрируемости уравненія (1), опредѣленному заранѣе, открывать цѣлыя системы ихъ.

Такимъ образомъ тому изслѣдованію уравненія (1), которое мы намѣрены предпринять, должны предшествовать двѣ операціи: непосредственное опредѣленіе одного изъ признаковъ интегрируемости этого уравненія и построеніе системы уравненій по виду подобныхъ данному. Мы произведемъ сначала вторую операцію. Предварительно замѣтимъ, что, нисколько не уменьшая общности уравненія (1), его можно разсматривать подъ видомъ

$$\frac{dz}{dx}+Pz^2=Q, \tag{2}$$

гдѣ P и Q по прежнему функціи одного x. Слѣдуетъ это изъ того, что, положивъ

$$y=e^{-\int r dx}\,.\,z\,,$$

мы найдемъ для опредѣленія z уравненіе (2), если въ немъ P и Q опредѣлены условіями

$$\left.\begin{aligned} P&=pe^{-\int r dx}\\ Q&=-qe^{\int r dx}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Обращаясь теперь къ уравненію (2), полагаемъ

$$z = u + v \cdot \frac{1}{z_1}.$$

Чтобы результатъ этой подстановки

$$\frac{dz_1}{dx} - \frac{1}{v}(v' + 2Puv)z_1 - \frac{1}{v}(u' + Pu^2 - Q)z_1^2 = Pv$$

получилъ опредѣленный характеръ, нужно функціямъ u и v сообщить частныя значенія. Мы допустимъ

$$u' + Pu^2 = 0\ ,\ v' + 2Puv = 0,$$

а значитъ допустимъ

$$u = (\beta + \int Pdx)^{-1}\ ,\ v = \alpha(\beta + \int Pdx)^{-2},$$

гдѣ α и β постоянныя величины. Для такихъ u и v предыдущее уравненіе даетъ

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1^2 = Q_1$$

причемъ

$$P_1 = \frac{Q}{\alpha}(\beta + \int Pdx)^2$$

$$Q_1 = \alpha P(\beta + \int Pdx)^{-2}.$$

Такимъ же образомъ полагая

$$z_1 = (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-1} + \alpha_1(\beta_1 + \int P_1 dx)^{-2} \cdot \frac{1}{z_2},$$

мы отъ уравненія для z_1 перейдемъ къ уравненію

$$\frac{dz_2}{dx} + P_2 z_2^2 = Q_2$$

въ которомъ

$$P_2 = \frac{Q_1}{\alpha_1}(\beta_1 + \int P_1 dx)^2$$

$$Q_2 = \alpha_1 P_1 (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-2}.$$

Теперь понятно, что послѣ k преобразованій будемъ имѣть

$$\frac{dz_k}{dx} + P_k z_k^2 = Q_k$$

причемъ

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{Q_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\left(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx\right)^2 \\ Q_k &= \alpha_{k-1} P_{k-1}\left(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx\right)^{-2}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

И такъ система искомыхъ уравненій построена. Понятно, что возможны иныя системы; для нашей цѣли достаточно разсмотрѣть только эту.

Теперь, согласно предначертанному нами пути, нужно еще найдти одинъ изъ признаковъ интегрируемости занимающаго насъ уравненія. Чтобы легче оріентироваться въ обозначеніяхъ, мы возьмемъ для этой цѣли уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Hy^2 = G,$$

въ которомъ подъ H и G будемъ разумѣть функціи одного x. Легко подмѣтить, что уравненіе это можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \frac{1}{4H^2}(4GH^3 + 3H'^2 - 2HH'').$$

Дѣйствительно, для этого достаточно сдѣлать подстановку

$$y=\frac{v}{H}+\frac{H'}{2H^2}.$$

Съ другой стороны, подстановка

$$\frac{1}{y}=\frac{u}{G}+\frac{G'}{2G^2}$$

приводитъ то же уравненіе къ такому

$$\frac{du}{dx}+u^2=\frac{1}{4G^2}(4HG^3+3G'^2-2GG'').$$

Въ томъ случаѣ, когда $u=v$, вопросъ объ отысканіи y въ функціи x можно считать поконченнымъ, ибо онъ сведется на разрѣшеніе квадратнаго уравненія

$$y^2-\frac{1}{2H}\left(\frac{H'}{H}-\frac{G'}{G}\right)y=\frac{G}{H}.$$

Но высказанное предположеніе имѣетъ мѣсто лишь при существованіи такого соотношенія между H и G:

$$2HG(H''G-G''H)=3(H'^2G^2-G'^2H^2).$$

Такъ какъ

$$\left\{\begin{aligned}&H''G-G''H=(H'G-G'H)'\\&H'^2G^2-G'^2H^2=(HG)'(H'G-G'H),\end{aligned}\right.$$

то предыдущее соотношеніе даетъ

$$\frac{(H'G-G'H)'}{H'G-G'H}=\frac{3}{2}\,\frac{(HG)'}{HG}$$

откуда

$$\left(\frac{H}{G}\right)' = 2h \, . \, H\left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Интегрируя это и разрѣшая результатъ относительно G, находимъ

$$G = H(g + h\int H dx)^{-2},$$

гдѣ g и h постоянныя величины. Изъ сказаннаго обнаружилось, что уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Hy^2 = H(g + h\int H dx)^{-2}$$

всегда интегрируется и что частный его интегралъ выражается формулой:

$$y = \frac{h \pm \sqrt{h^2+4}}{2}(g + h\int H dx)^{-1}.$$

Полный интегралъ того-же уравненія на основаніи теоремы Эйлера выразится, слѣдовательно, отношеніемъ

$$y = \frac{h \pm \sqrt{h^2+4}}{2}(g + h\int H dx)^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{H} l'g \left\{ c + (g + h\int H dx)^{\frac{\mp\sqrt{h^2+4}}{h}} \right\}$$

гдѣ $l'g = \frac{d}{dx} lg$, а c постоянная произвольная.

Теперь нами вполнѣ подготовлена почва для отысканія признаковъ интегрируемости уравненія (2). Переходимъ къ самому отысканію.

§ II. Предположимъ, что коэффиціенты k-го уравненія данной выше системы удовлетворяютъ найденному признаку интегрируемости и посмотримъ, какая въ этомъ случаѣ существуетъ зависимость между P и Q, коэффиціентами исходнаго уравненія. Согласно съ предположеніемъ имѣемъ

$$Q_k = P_k(g + h\int P_k dx)^{-2} \qquad (5)$$

что по замѣнѣ Q_k его значеніемъ изъ (4) даетъ:

$$P_k(g + h\int P_k dx)^{-2} = \alpha_{k-1} P_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-2}.$$

Предполагая, что h отлично отъ нуля, мы получаемъ право на интегрированіе обѣихъ частей этого равенства. Опуская постоянную произвольную, вводимую этимъ интегрированіемъ, и затѣмъ дифференцируя результатъ интеграціи, найдемъ

$$P_k = \alpha_{k-1} P_{k-1}.$$

Наконецъ внося сюда вмѣсто P_k его значеніе изъ (4) имѣемъ:

$$Q_{k-1} = \alpha^2_{k-1} P_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-2}.$$

Отсюда мы видимъ, что если для k-го, то и для всѣхъ другихъ уравненій системы подмѣченный нами признакъ интегрируемости имѣетъ мѣсто. Это значитъ, что, разрѣшая уравненіе (5), относительно Q мы должны получить

$$Q = P(a + b\int P dx)^{-2}.$$

Результатъ этотъ не представляетъ однако ничего новаго. Поэтому дальнѣйшій анализъ мы поведемъ въ томъ предположеніи, при которомъ упомянутый результатъ не имѣетъ мѣста, т. е. въ предположеніи $h = 0$. Равенство (5) въ этомъ случаѣ обратится въ такое

$$Q_k = cP_k,$$

гдѣ c нѣкоторая постоянная; а по замѣнѣ P_k и Q_k ихъ значеніями въ такое

$$Q_{k-1} = cP_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1}\,dx)^{-4}.$$

Здѣсь для избѣжанія новыхъ символовъ мы замѣнили $\frac{\alpha^2{}_{k-1}}{c}$ черезъ c. Съ тою же цѣлью подобныя замѣны будемъ дѣлать и впослѣдствіи. Если въ предыдущее равенство на мѣсто Q_{k-1} поставимъ его выраженіе черезъ P_{k-2} и проинтегрируемъ слѣдствіе, то, опуская постоянную произвольную, получимъ

$$\beta_{k-2} + \int P_{k-2}\,dx = c(\beta_{k-1} + \int P_{k-1}\,dx)^3.$$

Разрѣшая это относительно $\int P_{k-1}\,dx$ и дифференцируя результатъ находимъ

$$P_{k-1} = cP_{k-2}(\beta_{k-2} + \int P_{k-2}dx)^{-\frac{2}{3}}.$$

Наконецъ замѣна P_{k-1} его значеніемъ даетъ

$$Q_{k-2} = cP_{k-2}(\beta_{k-2} + \int P_{k-2}\,dx)^{-\frac{8}{3}}.$$

Помощью тѣхъ же операцій, какія были произведены нами при переходѣ отъ равенства для Q_{k-1} къ равенству для Q_{k-2} мы отъ этого послѣдняго перейдемъ къ такому

$$Q_{k-3} = cP_{k-3}(\beta_{k-3} + \int P_{k-3}\,dx)^{-\frac{12}{5}}.$$

Сказаннаго вполнѣ достаточно для того, чтобы сдѣлать догадку, не будетъ ли соотношеніе

$$Q_{k-i} = cP_{k-i}(\beta_{k-i} + \int P_{k-i}dx)^{\frac{-4i}{2i-1}}$$

выражать ту именно зависимость между Q_{k-i} и P_{k-i}, которая должна явиться результатомъ допущенія $Q_k = cP_k$? Чтобы оправдать догадку мы должны доказать, что предположенное соотношеніе имѣетъ мѣсто для числа $i+1$, разъ оно имѣетъ его для числа i. Сдѣлать это легко. Замѣняя Q_{k-i} его выраженіемъ черезъ P_{k-i-1} и интегрируя результатъ по опущеніи постоянной произвольной, найдемъ

$$\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1}dx = c(\beta_{k-i} + \int P_{k-i}dx)^{\frac{2i+1}{2i-1}}.$$

Разрѣшая это относительно P_{k-i} получаемъ

$$P_{k-i} = cP_{k-i-1}(\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1}dx)^{\frac{-2}{2i+1}}.$$

Наконецъ внося сюда вмѣсто P_{k-i} его значеніе изъ (4) будемъ имѣть

$$Q_{k-i-1} = cP_{k-i-1}(\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1}dx)^{\frac{-4(i+1)}{2(i+1)-1}},$$

Этотъ результатъ и доказываетъ, что равенство для Q_{k-i} имѣетъ мѣсто при всякомъ i. Полагая въ немъ $i=k$ и замѣчая, что $P_0 = P$ а $Q_0 = Q$, мы окончательно рѣшаемъ нашу задачу. Именно мы получаемъ, что если

$$Q = P(a + b\int Pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

то уравненіе (2) послѣ k преобразованій приведется къ интегрируемому въ квадратурахъ. Замѣтивъ, что уравненіе (2) можно представить въ видѣ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right)+Q\left(\frac{1}{z}\right)^2=P$$

заключаемъ, что оно интегрируется посредствомъ неопредѣленныхъ квадратуръ еще въ томъ случаѣ, когда

$$P=Q(a_1+b_1\int Qdx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k цѣлое положительное число. Разрѣшеніе этого равенства относительно $\int Qdx$ и дифференцированіе результата даетъ

$$\left(\frac{Q}{P}\right)' \cdot \left(\frac{Q}{P}\right)^{-\frac{6k+1}{4k}}=bP.$$

Отсюда находимъ вторую группу признаковъ интегрируемости занимающаго насъ уравненія

$$Q=P(a+b\int Pdx)^{\frac{-4k}{2k+1}}.$$

Легко видѣть, что эта вторая группа можетъ быть получена изъ первой замѣною k на $-k$. Поэтому классъ уравненій интегрирующихся по способу послѣдовательныхъ преобразованій, который можно назвать способомъ непрерывныхъ дробей, напишется такъ

$$\frac{dz}{dx}+Pz^2=P(a+b\int Pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k положительное или отрицательное цѣлое число. Если угодно можно даже полагать $k=\pm\infty$, потому что это положеніе даетъ намъ уравненіе

$$\frac{dz}{dx}+Pz^2=P(a+b\int Pdx)^{-2}$$

интегрируемое въ квадратурахъ.

И такъ мы пришли къ тому самому обобщенію уравненія Рикатти, которое было получено А. В. Лѣтниковымъ[1]. Нашъ анализъ, основанный на опущеніи постоянныхъ произвольныхъ, при разрѣшеніи относительно Q уравненія (5) указываетъ на возможность болѣе полнаго обобщенія. Къ сожалѣнію, трудности, лежащія на этомъ пути въ формѣ квадратуръ, и сопряженная съ ними сложность вычисленій убиваютъ въ самомъ зародышѣ попытку составить хотя приблизительное понятіе объ общемъ характерѣ тѣхъ уравненій, которыя могутъ быть проинтегрированы по способу непрерывныхъ дробей.

§ III. Приступая къ изслѣдованію уравненія (2) мы, разумѣется, не могли предвидѣть того результата, который долженъ былъ получиться. Теперь же, когда онъ извѣстенъ, мы можемъ констатировать случаи интегрируемости уравненія

$$\frac{dz}{dx}+Pz^2=P(a+b\int Pdx)^m$$

другимъ, болѣе простымъ путемъ.

Прежде всего подстановка

$$z=\alpha(a+b\int Pdx)^\beta,$$

гдѣ α и β постоянныя подлежащія опредѣленію, откроетъ намъ случай $m=-2$. Для опредѣленія другихъ случаевъ полагаемъ

$$z=b(a+b\int Pdx)^{-1}+(a+b\int Pdx)^{-2}.\frac{1}{z_1}$$

[1] Математическій сборникъ. Т. I, стр. 323—350.

тогда предыдущее уравненіе обратится въ такое

$$\frac{dz_1}{dx}+P_1z_1^{\,2}=Q_1$$

гдѣ

$$P_1=P(a+b\int Pdx)^{m+2}$$

$$Q_1=P(a+b\int Pdx)^{-2}.$$

Выразимъ отсюда Q_1 посредствомъ P_1. Для этого предварительно пишемъ

$$a+b\int Pdx=\{\alpha+(m+3)\int P_1dx\}^{\frac{1}{m+3}}$$

$$P=\frac{P_1}{b}\{\alpha+(m+3)\int P_1dx\}^{-\frac{m+2}{m+3}}$$

имѣя это легко уже получить

$$Q_1=P_1(a_1+b_1\int P_1dx)^{-\frac{m+4}{m+3}}$$

гдѣ a_1 и b_1 новыя постоянныя. Уравненіе для z_1 послѣ этого будетъ

$$\frac{dz_1}{dx}+P_1z_1^{\,2}=P_1(a_1+b_1\int P_1dx)^{-\frac{m+4}{m+3}}.$$

Полагая теперь

$$z=\frac{1}{z_2}$$

подобно предыдущему найдемъ

$$\frac{dz_2}{dx}+P_2z_2{}^2=P_2(a_2+b_2\int P_2dx)^{\frac{-m}{m+1}},$$

гдѣ

$$P_2=P(a+b\int Pdx)^m,$$

а a_2 и b_2 постоянныя величины. Сопоставляя уравненія для z, z_1 и z_2 и замѣчая, что первое изъ нихъ интегрируется при $m=0$, мы легко найдемъ и всѣ другіе случаи его интегрируемости, указанные выше.

Анализъ этого параграфа можно еще вести по способу измѣненія независимаго перемѣннаго. Чтобы не повторяться, мы укажемъ лишь какъ по этому способу уравненіе

$$\frac{dz}{dx}+P(a+b\int Pdx)^n.z^2=P(a+b\int Pdx)^m$$

приводится къ Рикаттіевскому. Допустимъ, что z не непосредственно выражено въ x, а помощью нѣкоторой функціи его ξ, т. е. допустимъ, что

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}$$

тогда наше уравненіе дастъ

$$\frac{dz}{d\xi}+P(a+b\int Pdx)^n\frac{dx}{d\xi}z^2=P(a+b\int Pdx)^m\frac{dx}{d\xi}.$$

Отсюда разумѣя подъ Π функцію одного ξ и полагая

$$P(a+b\int Pdx)^n dx=\Pi d\xi$$

получимъ

Ас 33475 уч

$$\frac{dz}{d\xi} + \Pi z^2 = \Pi(\alpha + \beta\int \Pi d\xi)^{\frac{m-n}{n+1}},$$

что и нужно было показать.

Если сдѣлаемъ здѣсь $\alpha = 0$, $\Pi = 1$, $n = 0$, $\beta^m = c$, то придемъ къ обыкновенному виду уравненія Рикатти

$$\frac{dz}{d\xi} + z^2 = c\xi^m,$$

на которое такимъ образомъ всегда можетъ быть сведено обобщенное нами.

§ IV. Если въ соотношеніе

$$Q = P(a + b\int Pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k цѣлое число, поставимъ на-мѣсто P и Q ихъ значенія изъ (2), то будетъ

$$-qe^{\int rdx} = pe^{-\int rdx}(a + b\int pe^{-\int rdx}.\ dx)^{\frac{-4k}{2k-1}}$$

или

$$pe^{-\int rdx}(a + b\int pe^{-\int rdx}.\ dx)^{\frac{-2k}{2k-1}} = (-pq)^{1/2}.$$

Интегрируя это и разрѣшая результатъ относительно r, получимъ

$$r = \frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha + \int (pq)^{1/2} dx} + \frac{p'}{2p} - \frac{q'}{2q}$$

гдѣ α постоянная величина. Мы находимъ такимъ образомъ классъ уравненій (1), интегрирующихся по способу непрерывныхъ дробей,

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha+\int(pq)^{1/2}dx}+\frac{p'}{2p}-\frac{q'}{2q}\right)y+py^2+q=0. \qquad (6)$$

Если не по существу, то по крайней мѣрѣ по внѣшнему виду мы должны за этимъ уравненіемъ, какъ содержащимъ двѣ произвольныя функціи p и q, признать большую общность, чѣмъ за разсмотрѣннымъ выше. Дѣйствительно, послѣднее можетъ быть изъ него получено при частномъ допущеніи, выражаемомъ соотношеніемъ

$$\frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha+\int(pq)^{1/2}dx}+\frac{p'}{2p}-\frac{q'}{2q}=0,$$

интегралъ котораго таковъ:

$$q=p(a+b\int pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}}.$$

Въ уравненіи Рикатти число k можно было принимать равнымъ безконечности; въ уравненіи (6) этого по-видимому сдѣлать нельзя. Но если мы допустимъ, что постоянная α имѣетъ видъ $\frac{2k}{a}$, то эта кажущаяся невозможность изчезнетъ и мы, при $k=\infty$, найдемъ всегда интегрируемое уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+\left\{a(pq)^{1/2}+\frac{p'}{2p}-\frac{q'}{2q}\right\}y+py^2+q=0,$$

всегда интегрируемое, ибо положивъ

$$y=\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}e^{-a\int(pq)^{1/2}dx}z$$

увидимъ, что въ уравненіи для z удовлетворяется основной признакъ интегрируемости. Поэтому будемъ имѣть:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}$$

Если въ уравненіи (6) сдѣлаемъ

$$p = 1,\ y = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx},$$

то получимъ классъ линейныхъ уравненій втораго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2k q^{1/2}}{\alpha + \int q^{1/2} dx} - \frac{q'}{2q}\right)\frac{du}{dx} + qu = 0, \qquad (7)$$

интегрирующихся посредствомъ неопредѣленныхъ квадратуръ. Отсюда при $k = \infty$ найдемъ уравненіе Пецваля

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(aq^{1/2} - \frac{q'}{2q}\right)\frac{du}{dx} + qu = 0,$$

интегралъ котораго на основаніи сказаннаго выше можно считать извѣстнымъ.

Намъ кажется не лишеннымъ интереса слѣдующій символистическій способъ интеграціи этого уравненія. Называя чрезъ α_1 и α_2 корни уравненія

$$\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0$$

мы можемъ привести уравненіе Пецваля, по раздѣленіи обѣихъ его частей на q и по отвлеченіи субъекта u отъ символа $\frac{d}{dx}$, къ слѣдующему виду:

$$\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_1\right)\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)u=0.$$

Полагая теперь

$$\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)u=v,$$

получимъ

$$\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_1\right)v=0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія таковъ

$$v=ce^{\alpha_1\int q^{1/2}dx};$$

поэтому интегралъ уравненія Пецваля будетъ

$$u=c_1e^{\alpha_1\int q^{1/2}dx}+c_2e^{\alpha_2\int q^{1/2}}x.$$

Для случая $\alpha_1=\alpha_2=\pm 1$ нашъ способъ дастъ

$$u=(c_1+c_2\int q^{1/2}dx)\,e^{\pm\int q^{1/2}dx},$$

гдѣ верхній знакъ отвѣчаетъ допущенію $a=-2$, а нижній допущенію $a=2$.

Обращаясь снова къ уравненію (7), укажемъ на тѣ простѣйшія формы, какія оно можетъ принять. Съ этою цѣлью допуская, что u выражено въ x помощью нѣкоторой функціи его ξ, найдемъ

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2},$$

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{2kq^{1/2}}{\alpha+\int q^{1/2}dx}\,\frac{d\xi}{dx} - \frac{q'}{2q}\,\frac{d\xi}{dx}\right)\frac{du}{d\xi} + qu = 0.$$

Разумѣя теперь подъ Q функцію одного ξ, сдѣлаемъ положеніе

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{q}{Q}$$

и напишемъ его слѣдствія

$$\alpha + \int q^{1/2}\,dx = a + \int Q^{1/2}\,d\xi$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{q'}{2q^{1/2}}\cdot\frac{1}{Q^{1/2}} - \frac{q}{2Q^2}\cdot\frac{dQ}{d\xi}$$

На основаніи этихъ соотношеній предыдущее уравненіе дастъ

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(\frac{2kQ^{1/2}}{a+\int Q^{1/2}d\xi} - \frac{Q'}{2Q}\right)\frac{du}{d\xi} + Qu = 0,$$

гдѣ $Q' = \frac{dQ}{d\xi}$. Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ одно изъ положеній

$$Q = 1\,,\quad \frac{2kQ^{1/2}}{a+\int Q^{1/2}d\xi} = \frac{Q'}{2Q},$$

то получимъ соотвѣтственно

$$\frac{d^2u}{d\xi} + \frac{2k}{a+\xi}\cdot\frac{du}{d\xi} + u = 0$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+(b+c\xi)^{\frac{-4k}{2k-1}}u=0.$$

Уравненіе (7) всегда, слѣдовательно, можно свести на то или другое изъ послѣднихъ.

§ V. Результаты, къ которымъ мы пришли выше, можно вывести и изъ разсмотрѣнія линейнаго уравненія втораго порядка

$$u''+Pu'+Qu=0,$$

въ которомъ $u'=\frac{du}{dx}$, $u''=\frac{d^2u}{dx^2}$, а P и Q функціи одного x. Въ самомъ дѣлѣ, если подставимъ

$$u=ve^{-\int Q\frac{u_1}{u'_1}dx}$$

и если въ результатѣ этой подстановки

$$Q\{u''_1-(P+l'gQv^2)u'_1+Qu_1\}vu_1+(v''+Pv')u'^2_1=0$$

выберемъ v такъ, чтобы

$$v''+Pv'=0,$$

то придемъ къ уравненію

$$u_1''+P_1u_1'+Qu_1=0,$$

въ которомъ

$$P_1=-P-l'gQ\left(\alpha_1+\int e^{-\int Pdx}dx\right)^2,$$

а α_1 постоянная величина. Равнымъ образомъ полагая

$$u_1 = \left(\alpha_2 + \int e^{-\int P dx} dx\right) e^{-\int Q \frac{u_2}{u'_2} dx}$$

получимъ

$$u''_2 + P_2 u'_2 + Q u_2 = 0\,,$$

гдѣ

$$P_2 = -P_1 - l'gQ\left(\alpha_2 + \int e^{-\int P_1 dx} dx\right)^2.$$

Наконецъ послѣ k преобразованій будемъ имѣть

$$u''_k + P_k u'_k + Q u_k = 0\,,$$

причемъ

$$P_k = -P_{k-1} - l'gQ\left(\alpha_k + \int e^{-\int P_{k-1} dx} dx\right)^2.$$

Замѣтимъ тутъ же, что послѣднее соотношеніе по разрѣшеніи его относительно P_{k-1} можно представить въ видѣ совмѣстныхъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} P_{k-1} &= l'g\,\frac{(\int N_k dx)^2}{N_k} \\ N_k &= Qe^{\int P_k dx} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Обращаясь теперь къ уравненію для u_k, дѣлаемъ въ немъ подстановки

$$u_k = v e^{-{}^1\!/_2 \int P_k dx}$$

$$u_k = e^{\int \frac{Q\,dx}{\frac{w}{w'} + {}^1\!/_2\left(P_k + \frac{Q'}{Q}\right)}}$$

Ясно, что результаты этихъ подстановокъ

$$v'' + {}^1/_4\,(4Q - 2P'_k - P_k^2)v = 0$$

$$w'' + {}^1/_4 \left\{ 4Q + 2P'_k - P_k^2 + 2\left(\frac{Q'}{Q}\right)' - \right.$$

$$\left. - 2P_k\left(\frac{Q'}{Q}\right) - \left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 \right\} w = 0$$

совпадутъ и что u_k опредѣлится изъ уравненія

$$u'^2_k + aQ^{1/2}u'_k u_k + Qu_k^2 = 0,$$

если между P_k и Q будетъ существовать зависимость, выражаемая отношеніемъ

$$P'_k - \frac{Q'}{2Q}P_k = \left(\frac{Q'}{2Q}\right)^2 - \left(\frac{Q'}{2Q}\right)'$$

или отношеніемъ

$$P_k = aQ^{1/2} - \frac{Q'}{2Q} = aQ^{1/2} + lg'Q^{-1/2},$$

гдѣ a постоянная величина. Допустимъ же, что зависимость эта существуетъ, и посмотримъ, какую она установитъ связь между количествами P и Q.

Для рѣшенія задачи обращаемся къ формуламъ (8). Если постоянную, вводимую интегрированіемъ функціи N_k, посчитаемъ за нуль, то онѣ дадутъ

$$N_k = Q^{1/2}e^{a\int Q^{1/2}dx}$$

$$P_{k-1} = a\,Q^{1/2} + lg'\,Q^{-1/2} = P_k.$$

Отсюда приходимъ къ слѣдствію

$$P = aQ^{1/2} + lg'Q^{-1/2},$$

не представляющему ничего новаго. При выводѣ этого слѣдствія, конечно, предположено, что a отлично отъ нуля. Если же a нуль, картина измѣнится; именно, мы получимъ

$$N_k = Q^{1/2}$$

$$P_{k-1} = lg'\,\frac{(\alpha + \int Q^{1/2}\,dx)^2}{Q^{1/2}}.$$

Вычисляя на основаніи послѣдней формулы количества N_{k-1} и P_{k-2}, будемъ имѣть

$$N_{k-1} = Q^{1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}\,dx)^2$$

$$P_{k-2} = lg'Q^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^4.$$

Здѣсь постоянная интеграла $\int N_{k-1}dx$ принята нами за нуль; тоже будемъ наблюдать и ниже. Дальнѣйшее вычисленіе затрудненій не представляетъ. Такъ, для количествъ N_{k-2} и P_{k-3} найдемъ

$$N_{k-2} = Q^{1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}\,dx)^4$$

$$P_{k-3} = l'gQ^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}\,dx)^6.$$

Понятно теперь, что для какого угодно числа i меньшаго k будемъ имѣть

$$P_{k-i}=lg'Q^{-1/2}(\alpha+\int Q^{1/2})^{2i}.$$

Заключеніе это вытекаетъ изъ того, что непосредственное слѣдствіе предыдущаго равенства

$$P_{k-i-1}=lg'Q^{-1/2}(\alpha+\int Q^{1/2}dx)^{2(i+1)}$$

можетъ быть получено изъ него простою замѣной i на $i+1$. Если въ равенствѣ для P_{k-i} положимъ $i=k$, то найдемъ

$$P=l'gQ^{-1/2}(\alpha+\int Q^{1/2}dx)^{2k}.$$

Это и есть искомая группа признаковъ интегрируемости уравненія для u. А такъ-какъ уравненіе это подстановкой

$$u=e^{-\int Q\frac{v}{v'}dx}$$

приводится къ виду

$$v''-\left(P+\frac{Q'}{Q}\right)v'+Qv=0,$$

то для него существуетъ и другая группа, выражаемая отношеніемъ

$$-P-\frac{Q'}{Q}=l'gQ^{-1/2}(\alpha+\int Q^{1/2})^{2k}$$

или отношеніемъ

$$P=l'gQ^{-1/2}(\alpha+\int Q^{1/2}dx)^{-2k}.$$

Понятно, что если подъ k разумѣть какое угодно цѣлое число, то обѣ эти группы можно выразить одною формулой

$$P = \frac{2kQ^{1/2}}{\alpha + \int Q^{1/2} dx} - \frac{Q'}{2Q},$$

которая и составитъ такимъ образомъ окончательное и уже извѣстное намъ рѣшеніе вопроса объ интегрируемомъ классѣ линейныхъ уравненій втораго порядка.

§ VI. Хотя въ предыдущихъ параграфахъ указаны средства для вычисленія интеграловъ тѣхъ уравненій, которыхъ интегрируемость нами констатирована, однако лучше интегралы эти вычислять по другому способу, изложеніемъ котораго мы теперь займемся. Мы уже видѣли, что каждое изъ разсмотрѣнныхъ нами уравненій можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha\eta^2 = \beta\xi^\delta.$$

Если же положимъ здѣсь

$$\eta = ay, \; \xi = bx^c$$

и выберемъ постоянныя a, b и c такъ, чтобы

$$a\alpha cb = 1, \; 4c\beta b^{\delta+1} = a, \; c(\delta + 2) + 2 = 0,$$

то будемъ имѣть

$$\frac{dy}{dx} + x^{-\frac{\delta+4}{\delta+2}} \cdot y^2 = {}^1/_4\, x^{-\frac{3\delta+4}{\delta+2}}.$$

Отсюда посредствомъ подстановки

$$y = -\frac{\delta+4}{2\delta+4}\, x^{\frac{2}{\delta+2}} + x^{\frac{\delta+4}{\delta+2}} \cdot v$$

получимъ

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + nx^{-2} - {}^1/_4\, x^{-4} = 0,$$

гдѣ

$$n = \frac{\delta(\delta+4)}{4(\delta+2)^2}.$$

Наконецъ если сдѣлаемъ

$$v = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{u'}{u},$$

то найдемъ

$$x^2u'' + (2x+1)u' + nu = 0. \qquad (9)$$

Приведенное къ такому виду уравненіе Рикатти легко интегрируется помощью послѣдовательнаго дифференцированія въ тѣхъ случаяхъ, на которые мы указали выше. Въ самомъ дѣлѣ результатъ k дифференцированій уравненія (9) будетъ

$$x^2u^{k+2} + \{2(k+1)x + 1\}u^{k+1} + \{n + k(k+1)\}u^k = 0.$$

Но если мы допустимъ, что

$$n + k(k+1) = 0,$$

т. е. что

$$\delta = \frac{-4k}{2k+1} \text{ или } \delta = \frac{-4(k+1)}{2(k+1)-1}$$

ибо таковы корни уравненія

$$\delta(\delta+4) + 4k(k+1)(\delta+2)^2 = 0,$$

то найдемъ

$$u^{k+2} + \left\{\frac{2(k+1)}{x} + \frac{1}{x^2}\right\}u^{k+1} = 0.$$

Интегрируя это относительно u^{k+1} и означая постоянную произвольную черезъ c, будемъ имѣть

$$u^{k+1} = cx^{-2(k+1)} . e^{\frac{1}{x}} .$$

Отсюда посредствомъ $k+1$ интегрированій получимъ

$$u = c\int x^{-2(k+1)} . e^{\frac{1}{x}} \, dx^{k+1} + c' \sum_{i=0}^{k} A_i x^i ,$$

гдѣ A_i постоянная подлежащая опредѣленію, а c' какая угодно. Для опредѣленія A_i ставимъ въ уравненіе

$$x^2 u'' + (2x+1)u' - k(k+1)u = 0 \qquad (10)$$

на мѣсто u сумму

$$\sum_{i=0}^{k} A_i \, x^i$$

и уравниваемъ нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x. Результатомъ этой операціи будетъ равенство:

$$A_{i+1} = \frac{k(k+1) - i(i+1)}{i+1} A_i$$

изъ котораго легко найдемъ

$$A_i = \frac{1}{i!} k(k+1) \{ k(k+1) - 2 \} \ldots \{ k(k+1) - (i-1)i \}$$

гдѣ въ силу произвольности c' положено $A_0 = 1$. Такимъ образомъ данное выше для u выраженіе есть полный интегралъ уравненія (10) въ предположеніи, что A_i имѣетъ указанное сейчасъ значеніе.

Полный интегралъ уравненія (10) можно найдти еще посредствомъ послѣдовательнаго интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если проинтегрируемъ упомянутое уравненіе $k+1$ разъ и назовемъ постоянную вводимую i-мъ интегрированіемъ черезъ $c'B_{k-i+1}$, то будетъ

$$x^2\int u dx^{k-1} - (2kx-1)\int u dx^k = c'\sum_{i=0}^{k} B_i x^i$$

отсюда для интегралла $\int u dx^k$ получимъ

$$\int u dx^k = x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\left(c + c'\sum_{i=0}^{k} B_i \int x^{i-2k-2} e^{-\frac{1}{x}} dx\right)$$

Дифференцируя это k разъ, найдемъ

$$u = c\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\right) + c'\sum_{i=0}^{k} B_i \frac{d^k}{dx^k}\left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}} \int x^{i-2k-2} e^{-\frac{1}{x}} dx\right).$$

Останавливаясь на второмъ членѣ правой части этого равенства, замѣчаемъ, что, относительно x, онъ есть цѣлая раціональная функція степени k; поэтому предыдущее равенство можно написать въ видѣ

$$u = c\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\right) + c'\sum_{i=0}^{k} A_i x^i$$

и принимать за полный интегралъ уравненія (10) въ предположеніи, что A_i имѣетъ данное ему выше значеніе.

Идея изложеннаго нами способа интегрированія уравненія Рикатти принадлежитъ Ліувиллю.

§ VII. Мы видѣли сейчасъ, что существуютъ случаи, въ которыхъ уравненіе (9), а слѣдовательно и уравненіе Рикатти интегрируется алгебраическими функціями независимаго. Является вопросъ, нѣтъ ли другихъ подобныхъ же случаевъ? Этотъ вопросъ по отношенію къ тому и другому изъ упомянутыхъ уравненій разрѣшаетъ анализъ Ліувилля[1]. Мы же, имѣя въ виду простоту вычисленій, разрѣшимъ его лишь по отношенію къ уравненію (9).

Это уравненіе сопровождается раціональными относительно x коэффиціентами; поэтому допустивъ, что оно интегрируется нѣкоторой ирраціональностью x, мы обязаны трактовать его интегралами всѣ корни того неразлагаемаго алгебраическаго уравненія, которымъ упомянутая ирраціональность опредѣляется. Но если такъ, то любыхъ два корня u_i и u_j этого уравненія должны удовлетворять условію

$$u_j u_i' - u_i u'_j = a x^{-2} e^{\frac{1}{x}},$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная. Понятно, что если a не нуль, то предыдущее равенство нелѣпо, ибо лѣвая его часть есть алгебраическая, а правая—трансцендентная функція x. Поэтому неизбѣжно

$$\frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_j}{u_j}.$$

Предполагая теперь, что число корней уравненія, опредѣляющаго алгебраическіе интегралы уравненія (9), есть m и называя ихъ черезъ $u_1 u_2 \ldots . u_m$ получимъ:

$$\frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_1}{u_1}, \quad \frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_2}{u_2}, \ldots \frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_m}{u_m}$$

Сложивъ эти равенства и проинтегрировалъ результатъ, найдемъ

$$u^m{}_i = c u_1 u_2 \ldots . u_m = R,$$

[1] Журналъ Ліувилля. Т. 6. стр. 1—12.

гдѣ R раціональная функція x. Убѣдившись такимъ образомъ, что алгебраическіе интегралы уравненія (9) должны быть вида $R^{\frac{1}{m}}$, ставимъ въ это уравненіе $R^{\frac{1}{m}}$ на мѣсто u. Результатъ подстановки будетъ

$$x^2RR''+(2x+1)RR'+n.mR^2-\frac{m-1}{m}x^2R'^2=0. \quad (11)$$

Докажемъ теперь, что $m=1$. Съ этою цѣлью вообразимъ, что въ раціональной функціи R цѣлая часть отдѣлена отъ дробной и послѣдняя приведена къ виду

$$\sum\frac{A}{(x-\alpha)^i},$$

гдѣ A, α и i параметральныя постоянныя. Если по внесеніи такого значенія R въ уравненіе (11), мы остановимъ свое вниманіе на той изъ дробей, которая отвѣчаетъ наибольшему i при данномъ α, то увидимъ, что дробь

$$\frac{i(m+i)A^2x^2}{m(x-\alpha)^{2i+2}}$$

до тѣхъ поръ не найдетъ себѣ подобной и, слѣдовательно, не уничтожится, пока α отлично отъ нуля. Отсюда заключаемъ, что

$$R=\sum_{i=-p}^{i=k}A_ix^i,$$

гдѣ k высшая положительная степень x, а p высшая отрицательная. Внеся это значеніе R въ уравненіе (11) и уравнявъ нулю коэффиціентъ, сопровождающій высшую отрицательную степень x, получимъ

$$pA^2_{-p}=0$$

Такъ какъ требованіе, выражаемое этимъ равенствомъ, не можетъ быть выполнено на-счетъ p до тѣхъ поръ, пока p отлично отъ нуля, то всѣ A съ отрицательными указателями суть нули. По этому

$$R = \sum_{i=0}^{k} A_i x^i.$$

Убѣдившись такимъ образомъ, что R есть цѣлая раціональная фукція x, мы можемъ, разложивъ эту функцію на линейныхъ множителей, привести ее къ виду

$$R = q_1 q_2^{\,2} q_3^{\,3} \ldots . q_r^{\,r},$$

гдѣ q_i означаетъ произведеніе всѣхъ множителей i-й кратности. Что касается производныхъ R, то онѣ будутъ

$$R' = q_2 q_3^{\,2} \ldots . q_r^{\,r-1} . \omega$$

$$R'' = q_3 q_4^{\,2} \ldots . q_r^{\,r-2} . \Theta,$$

гдѣ ω и Θ, будучи первыми между собою, таковы же и по отношенію къ каждому изъ нумерованныхъ q. На основаніи написанныхъ соотношеній уравненіе (11) приведется къ виду:

$$x^2 q_1 \Theta + (2x+1) q_1 q_2 \ldots . q_r \omega + n . m . q_1^{\,2} q_2^{\,2} \ldots . q_r^{\,2} =$$

$$= \frac{m-1}{m} x^2 \omega^2.$$

При анализѣ этого равенства представляются два случая: когда произведеніе $q_2 \; q_3 \ldots . q_r$ равно единицѣ и когда оно отлично отъ единицы. Въ первомъ случаѣ имѣемъ:

$$\{ x^2 \Theta + (2x+1)\omega + n . m . q_1 \} q_1 = \frac{m-1}{m} x^2 \omega^2.$$

Такъ какъ лѣвая часть этого равенства дѣлится на q_1, то и правая должна дѣлиться; а потому въ разсматриваемомъ случаѣ $m = 1$. Что касается втораго случая, то онъ даетъ:

$$q_1 \Theta = \frac{m-1}{m} \omega^2$$

$$(2x+1)\omega + n \,.\, m \,.\, q_1 q_2 \,. \dots . q_r = 0.$$

Замѣнивъ Θ и ω ихъ значеніями черезъ R, получимъ:

$$RR'' = \frac{m-1}{m} R'^2$$

$$(2x+1)R' + n \,.\, mR = 0.$$

Интегрируя это и переходя отъ R къ u, находимъ

$$u = ax + b$$

$$u = c(2x+1)^{-\frac{n}{2}}$$

гдѣ a, b и c постоянныя величины. Такъ какъ эти равенства должны существовать совмѣстно, то имѣемъ:

$$n = -2\,,\ a = 2c,\ b = c.$$

Изъ сказаннаго обнаружилось, что интегралы уравненія (9) не могутъ быть алгебраическими, не будучи раціональными вида

$$u = \sum_{i=0}^{k} A_i x^i.$$

Отсюда на основаніи предыдущаго параграфа прямо заключаемъ, что случаями, тамъ указанными, сполна исчерпывается способность упомянутаго уравненія интегрироваться алгебраическими функціями независимаго.

гдѣ $m = 1$. Что касается втораго случая, то онъ даетъ:

$$q_r \Theta = \frac{m-1}{m}\omega$$

$$(2z+1)\omega + n \cdot m^2 q_1 q_2 \ldots q_r = 0.$$

Замѣнивъ Θ и ω ихъ значеніями черезъ R, получимъ:

$$RR'' = \frac{m-1}{m} R'^2$$

$$(2z+1)R' + n \cdot m R = 0.$$

Интегрируя это и переходя отъ R къ u, находимъ

$$u = az + b$$

$$u = c(2z+1)^{-\frac{n}{2}}$$

гдѣ a, b и c постоянныя величины. Такъ какъ эти равенства должны существовать совмѣстно, то имѣемъ:

$$n = -2, \; a = 2c, \; b = c.$$

Изъ сказаннаго обнаружилось, что интегралы уравненія (9) не могутъ быть алгебраическими, не будучи раціональными вида

$$u = \sum_{i=0}^{\lambda} A_i z^i.$$

Отсюда на основаніи предыдущаго параграфа прямо заключаемъ, что случаями, такъ указанными, сполна исчерпывается способность упомянутаго уравненія интегрироваться алгебраическими функціями независимаго.