ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЯ

$$\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0.$$

В. П. Алексѣевскаго.

1. Замѣтимъ, что достаточно разсмотрѣть уравненіе указаннаго вида, въ которомъ $\beta = 1$, такъ какъ данное уравненіе посредствомъ замѣны независимаго перемѣннаго по формулѣ:

$$z = \frac{x}{\sqrt[n]{\beta}}$$

приводится къ слѣдующему:

$$y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} + y = 0 \tag{1}$$

гдѣ $y^{(n)}$ означаетъ производную отъ y по x. Зависимость между интегралами даннаго уравненія и послѣдняго (1) очевидна.

Умножая обѣ части уравненія (1) на $x^\alpha dx$, интегрируя и отбрасывая произвольное постоянное, получаемъ:

$$x^\alpha y^{(n-1)} + \int x^\alpha y dx = 0.$$

Полагая $\int x^\alpha y dx = x^{\alpha+1} y_1$ (2)

находимъ $y^{(n-1)} + x y_1 = 0.$ (3)

Дифференцируя равенство (2) и сокращая на x^{α}, получимъ:

$$y = xy'_1 + (\alpha+1)y_1. \tag{4}$$

Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную съ указателемъ $(n-1)$, получимъ:

$$y^{(n-1)} = xy_1^{(n)} + (\alpha+n)y_1^{(n-1)}.$$

Исключая изъ послѣдняго равенства и равенства (3) $y^{(n-1)}$ и полагая

$$\alpha + n = \alpha_1,$$

находимъ:

$$y_1^{(n)} + \frac{\alpha_1}{x} y_1^{(n-1)} + y_1 = 0.$$

Повторяя ту-же операцію k разъ, очевидно, получимъ слѣдующее уравненіе

$$y_k^{(n)} + \frac{\alpha_k}{x} y_k^{(n-1)} + y_k = 0, \tag{5}$$

гдѣ

$$\alpha_k = \alpha + nk. \tag{6}$$

2. На основаніи предыдущихъ формулъ не трудно выразить зависимость между интегралами уравненій (1) и (5) въ различныхъ видахъ:

a) По формулѣ (2) имѣемъ:

$$y = x^{-\alpha} D x^{\alpha+1} y_1$$

$$y_1 = x^{-(\alpha+n)} . D x^{\alpha+n+1} y_2$$

$$y_2 = x^{-(\alpha+2n)} . D x^{\alpha+2n+1} y_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{k-1} = x^{-(\alpha+(k-1)n)} . D x^{\alpha+(k-1)n+1} y_k.$$

Умножая послѣдовательно эти равенства на

$$1,\ x^{\alpha+1},\ x^{\alpha+n+1},\ \ldots\ldots,\ x^{\alpha+(k-2)n+1}$$

и исключая $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{k-1}$, получимъ:

$$y = x^{-\alpha}.D.x^{-(n-1)}.D.x^{-(n-1)}\ldots D.x^{-(n-1)}.x^{\alpha+nk}y_k,$$

гдѣ операція $D.x^{-(n-1)}$ повторяется k разъ. Принявъ во вниманіе равенство (6), послѣднюю формулу можно написать въ такомъ видѣ:

$$x^{\alpha}y = \Big[D.x^{-(n-1)}\Big]^{(k)}(x^{\alpha k}y_k). \qquad (7)$$

b) По формулѣ (3) имѣемъ:

$$y = (-1).D^{-(n-1)}xy_1,$$

$$y_1 = (-1).D^{-(n-1)}xy_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{k-1} = (-1).D^{-(n-1)}xy_k,$$

отсюда находимъ:

$$y = (-1)^k\Big[D^{-(n-1)}.x\Big]^{(k)}.y_k. \qquad (8)$$

c) Далѣе мы увидимъ, что $y,\ y_1,\ \ldots$ обладаютъ свойствами, выражаемыми равенствами:

$$D^p.D^q y = D^q.D^p y = D^{p+q}y,$$

гдѣ p и q указатели производныхъ, количества постоянныя.

Поэтому формулу (4) можно написать въ видѣ

$$y = D^{\alpha+1}.x.D^{-\alpha}y_1.$$

Слѣдовательно:

$$y_1 = D^{\alpha+n+1}.x.D^{-(\alpha+n)}y_2$$

$$y_2 = D^{\alpha+2n+1}.x.D^{-(\alpha+2n)}y_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{k-1} = D^{\alpha+(k-1)n+1}.x.D^{-(\alpha+(k-1)n)}y_k.$$

Взявъ отъ втораго изъ этихъ равенствъ производную съ указателемъ $-\alpha$, отъ 3-го съ указателемъ $-(\alpha+n)$, ..., отъ послѣдняго — съ указателемъ $-(\alpha+(k-2)n)$, получимъ:

$$y = D^{\alpha+1}.x.D^{n+1}.x.D^{n+1}.x \ldots D^{n+1}.x.D^{-(\alpha+(k-1)n)}y_k,$$

гдѣ операція $D^{n+1}.x$ повторяется $(k-1)$ разъ. Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную съ указателемъ $-(\alpha-n)$ и принявъ во вниманіе (6), предыдущее соотношеніе напишется такимъ образомъ:

$$D^{-(\alpha-n)}y = \left[D^{n+1}.x\right]^{(k)}.D^{-(\alpha_k-n)}y_k. \qquad (9)$$

d) Наконецъ зависимость между интегралами y и y_k можно представить еще въ новомъ видѣ, выясняющемъ характеръ операцій, связывающихъ функціи y и y_k.

Умножимъ обѣ части равенства (7) на $n^{-k}.x^{-(n-1)}$, тогда оно обратится въ слѣдующее:

$$n^{-k}.x^{\alpha-(n-1)}y = n^{-k}.x^{-(n-1)}.\left[D.x^{-(n-1)}\right]^{(k)}x^{\alpha_k}y_k$$

или

$$n^{-k}x^{\alpha-(n-1)}y = \left[\frac{1}{n}x^{-(n-1)}.D\right]^{(k)}.x^{\alpha_k-(n-1)}y_k.$$

Замѣтимъ, если u есть функція x, а x функція новаго независимаго перемѣннаго z, то, полагая

$$\frac{dz}{dx} = z',$$

имѣемъ:

$$D_z u = \frac{1}{z'} D_x u$$

$$D_z^2 u = \frac{1}{z'} D_x \frac{1}{z'} D_x u = \left[\frac{1}{z'} D_x\right]^{(2)} . u$$

и вообще

$$D_z^{(k)} u = \left[\frac{1}{z'} D_x\right]^{(k)} . u.$$

Сравнивая эту формулу съ предыдущею, видимъ, что

$$z' = nx^{n-1},$$

откуда

$$z = x^n, \qquad u = x^{\alpha k - (n-1)} . y_k,$$

и можно написать

$$x^{\alpha - (n-1)} . y = n^k . D_z^{(k)} \left(x^{\alpha k - (n-1)} y_k \right)_{z = x^n}. \qquad (10)$$

e) При помощи предыдущихъ формулъ весьма легко выразить y_k, чрезъ y. При помощи (7) имѣемъ:

$$x^{\alpha k} y_k = \left[x^{n-1} . D^{-1}\right]^{(k)} x^{\alpha} y \qquad (7')$$

изъ (8) $$y_k = (-1)^k . \left[\frac{1}{x} D^{n-1}\right]^{(k)} y \qquad (8')$$

изъ (9) $$D^{-(\alpha k - n)} y_k = \left[\frac{1}{x} . D^{-(n+1)}\right]^{(k)} D^{-(\alpha - n)} y \qquad (9')$$

изъ (10) $x^{\alpha_k-(n-1)}y_k = n^{-k}.D_z^{(-k)}\left[x^{\alpha-(n-1)}.y\right]_{z=x^n}.$ (10′)

3. Разсмотримъ теперь, въ какихъ случаяхъ уравненіе (1) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ. Очевидно, если въ уравненіе (5) $\alpha_k = 0$, то интегралъ его будетъ:

$$y_k = \sum_{i=1}^{i=n} C_i e^{r_i x}, \tag{11}$$

гдѣ C_i одно изъ произвольныхъ постоянныхъ, а r_i одинъ изъ корней уравненія:

$$r^n + 1 = 0.$$

Изъ предыдущаго ясно, что уравненіе (1), въ которомъ

$$\alpha = -nk,$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ (или квадратуръ) и интегралъ его найдется при помощи одной изъ формулъ (7), (8), (9) или (10), въ которыхъ только y_k надо замѣнить его выраженіемъ (11).

Точно также, если въ уравненіи (1) положимъ $\alpha = 0$, то въ уравненіи (5)

$$\alpha_k = +nk,$$

и, такъ какъ при этихъ условіяхъ интегралъ уравненія (1) выразится формулой (11), то, подставивъ это выраженіе въ формулы (7′), (8′), (9′) или (10′) на мѣсто y, имѣемъ интегралъ уравненія (5).

Просматривая ходъ нашихъ сужденій и обративъ вниманіе на выраженіе интеграла уравненія (1) [формулы (7) и (8) (7′)

и (8′)] легко видѣть, что указанный выше пріемъ интегрированія не зависитъ вовсе отъ значенія постояннаго n. Не трудно замѣтить, что въ интегралѣ уравненія (1) подлежатъ дифференцированію функціи только такого вида

$$ax^m e^{rx},$$

гдѣ a и m нѣкоторыя постоянныя; а отсюда видно, во первыхъ, что всѣ дифференцированія должны производиться въ предѣлахъ $\pm\infty$ и x ($+\infty$, когда дѣйствительная часть $r<0$, $-\infty$, когда д. ч. $r>0$); во вторыхъ, что равенства

$$D^p D^q y = D^q D^p y = D^{p+q} y$$

имѣютъ мѣсто, при какихъ угодно значеніяхъ постоянныхъ p и q*.

И такъ, уравненіе (1) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если $\alpha = \pm nk$, гдѣ n какое угодно постоянное, k — цѣлое число. Такъ, напримѣръ, интегрируя по предыдущему способу уравненіе

$$D^{3/2} y - \frac{3}{x} D^{1/2} y - y = 0$$

по формулѣ (7) получимъ

$$y = \sum_{i=1}^{i=3} C_i \left(1 - \frac{3}{2} r_i x + r_i^2 x^2\right) e^{r_i x}$$

гдѣ r_i корни уравненія

$$r^{3/2} - 1 = 0.$$

---

* См. статью *Лѣтникова* «Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ». Математ. Сборникъ, Т. III, 1868. стр. 28 — 30 и стр. 57 — 58.

4. Разсмотримъ случай, когда n—отрицательное число. Уравненіе (1) по замѣнѣ въ немъ n чрезъ $(-n)$ и обозначеніи $y^{(-n)}$ чрезъ $D^{-n}y$, приметъ слѣдующій видъ:

$$D^{-n}y+\frac{\alpha}{x}D^{-(n+1)}y+y=0. \qquad (12)$$

Легко видѣть, что приложеніе предыдущаго пріема даетъ неполный интегралъ этого уравненія; при n—цѣломъ, находимъ только n частныхъ интеграловъ, такъ какъ, въ предположеніи $\alpha=0$, или $\alpha_k=0$, оно обращается въ уравненіе n-го порядка. Послѣдній $(n+1)$-й интегралъ найдется извѣстнымъ пріемомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ знаніе n частныхъ интеграловъ уравненія даетъ возможность разысканіе послѣдняго интеграла свести къ интегрированію линейнаго уравненія 1-го порядка.

Чтобы яснѣе представить, каково уравненіе (12), положимъ

$$D^{-(n+1)}y=\omega,$$

тогда оно обратится въ слѣдующее

$$\omega^{n+1}+\omega'+\frac{\alpha}{x}\omega=0. \qquad (13)$$

Случаи интегрируемости и сами интегралы послѣдняго уравненія могутъ быть найдены и не преобразуя его въ уравненіе (12) пріемомъ, вполнѣ аналогичнымъ предыдущему; не останавливаясь на этомъ, покажемъ, что интегрированіе уравненія (12) (съ отрицательнымъ указателемъ) можетъ быть сведено къ интегрированію уравненія того-же вида, въ которомъ указатель высшей произвольной есть число положительное.

Дѣйствительно, умноживъ уравненіе (12) на x и дифференцируя съ указателемъ $(-\alpha)$, находимъ:

$$xD^{-(\alpha+n)}y + xD^{-\alpha}y - \alpha D^{-(\alpha+1)}y = 0.$$

Полагая здѣсь

$$D^{-(\alpha+n)}y = u,$$

получимъ

$$u^{(n)} - \frac{\alpha}{x}u^{(n-1)} + u = 0,$$

въ этомъ уравненіи n есть число положительное. Отсюда видимъ, что зависимости между интегралами уравненій (12), (13) и послѣдняго будутъ:

$$y = D^{(\alpha+n)}u, \quad \omega = D^{(\alpha-1)}u.$$

Для большей ясности означимъ интегралъ уравненія (12) y чрезъ $\Phi(-n, \alpha, x)$, а интегралъ послѣдняго уравненія u чрезъ $\Phi(n, -\alpha, x)$, тогда выведенное нами свойство представится въ видѣ:

$$\Phi(-n, \alpha, x) = D^{\alpha+n}\Phi(n, -\alpha, x). \qquad (14)$$

Очевидно, что этимъ зависимостямъ не удовлетворяютъ тѣ частные интегралы уравненія (12) и (13), которые находятся посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

Для поясненія сказаннаго выше приведемъ примѣръ. Пусть требуется проинтегрировать уравненіе:

$$\omega''' + \omega' + \frac{2}{x}\omega = 0.$$

Интеграцію этого уравненія можно свести на интеграцію уравненія

$$u'' - \frac{2}{x}u' + u = 0,$$

частные интегралы котораго на основаніи формулы (7) послѣ извѣстныхъ преобразованій будутъ:

$$u_1 = \int x \sin x . dx, \qquad u_2 = \int x \cos x . dx.$$

Слѣдовательно:

$$\omega_1 = x \sin x, \qquad \omega_2 = x \cos x.$$

Приложеніе способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ даетъ четыре уравненія*:

$$\omega_1 C_1' + \omega_2 C_2' = 0$$

$$\omega_1' C_1' + \omega_2' C_2' = z$$

$$\omega_1'' C_1' + \omega_2'' C_2' = z_1$$

$$z' + z_1 = 0,$$

откуда

$$C_1 = c_1 + c_3 \int \frac{\cos x}{x^3} dx, \qquad C_2 = c_2 - c_3 \int \frac{\sin x}{x^3} dx,$$

вслѣдствіе чего полный интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$\omega = x \sin x \left(c_1 + c_8 \int \frac{\cos x}{x^3} dx \right) + x \cos x \left(c_2 - c_3 \int \frac{\sin x}{x^3} dx \right).$$

Однако, вслѣдствіе сложности выраженій частныхъ интеграловъ уравненія (13), вычисленіе его полнаго интеграла, въ особенности при значительномъ числѣ k, становится затруднительнымъ по своей сложности; поэтому дальше мы укажемъ болѣе простое рѣшеніе этого вопроса.

---

* Располагая выкладки такъ, какъ указано на стр. 528—531 «Cours de calcul différentiel et intégral, par *Serret*. T. second, 1868.

5. Уравненія (1) и (13) могутъ быть разсматриваемы какъ частные виды уравненія

$$xy^{(n+1)} + py^{(n)} + xy' + qy = 0, \qquad (15)$$

гдѣ p и q суть постоянныя. При $n = 1$ это уравненіе обращается въ хорошо извѣстное, изслѣдованное Бейлеромъ и др.[1] и также г. Лѣтниковымъ[2].

a) Интегралъ этого уравненія (15) находится весьма легко, если $p = q$; именно, умноживъ обѣ части его на $x^{p-1}dx$, интегрируя и называя произвольное постоянное чрезъ c_0, получимъ уравненіе

$$y^{(n)} + y = c_0 x^{-p}, \qquad (16)$$

дальнѣйшая интеграція котораго не представляетъ никакихъ затрудненій.

b) Если $p \lesseqgtr q$, то, прилагая тѣ-же преобразованія, какими мы пользовались въ § 1, т. е. посредствомъ k подстановокъ вида

$$\int x^{p-1} y_i dx = x^p y_{i+1}\ ^*$$

вопросъ объ интегрированіи уравненія (15) сводится къ интегрированію уравненія:

$$xy_k^{(n+1)} + p_k y_k^{(n)} + xy_k' + q_k y_k = 0, \qquad (17)$$

гдѣ

$$p_k = p + nk, \qquad q_k = q.$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе (15) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ (или квадратуръ), если $p - q = \pm nk$ (k — цѣлое).

[1] См. *Schlömilch*, «Compendium der höhere Analysis, B. 2. 1874. стр. 525—540.

[2] Математическій сборникъ. Т. VII ст. 177—192.

* Подстановка имѣетъ мѣсто и при $p = 0$

c) Къ тому-же заключенію приводитъ насъ рядъ подстановокъ въ уравненіе (15) вида

$$\int x^{q-1} y_i^{(n)} = x^q y_{i+1}^{(n)} *,$$

такъ какъ k-е уравненіе будетъ:

$$xy_{(k)}^{(n+1)} + p_{(k)} y_{(k)}^{(n)} + xy_{(k)}' + q_{(k)} y_{(k)} = 0 \quad (18)$$

гдѣ

$$p_{(k)} = p, \qquad q_{(k)} = q - nk.$$

Если $n = 1$, то кромѣ указаннаго случая интегрируемости $p - q = \pm k$ существуетъ еще другой случай. Дѣйствительно, при $n = 1$ уравненія (15) и (18) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$xy'' + (p + x)y' + qy = 0$$

$$xy''_{(k)} + (p + x)y'_{(k)} + q_{(k)} y_{(k)} = 0,$$

гдѣ

$$q_{(k)} = q - k.$$

Въ предположеніи или $q = 0$, или $q_{(k)} = 0$, оба эти уравненія становятся интегрируемыми; слѣдовательно, можно сказать, что уравненіе (15) при $n = 1$ интегрируется въ двухъ случаяхъ:

$$1)\ p - q = \pm k, \qquad 2)\ q = \pm k.$$

6. Уравненіе (15) при $p = 0$ обращается въ уравненіе (13), но преобразованіе b) предыдущаго параграфа примѣнимо безъ всякихъ измѣненій, поэтому полный интегралъ уравненія (13) найдется при помощи полнаго же интеграла уравненія вида (16), и не трудно видѣть, что такимъ путемъ полный интегралъ уравненія (13) вычисляется значительно скорѣе, чѣмъ по способу, указанному въ § 4.

* Подстановка примѣнима и въ случаѣ $q = 0$.

Для сличенія обратимся къ примѣру, разсмотрѣнному въ § 4:

$$\omega''' + \omega' + \frac{2}{x}\omega = 0.$$

Преобразованіе b) § 4 приводитъ къ уравненію

$$x\omega_1''' + 2\omega_1'' + x\omega_1' + 2\omega_1 = 0,$$

при чемъ $\omega = x\omega_1'$.

Умножая предпослѣднее уравненіе на x, интегрируя и называя произвольное постоянное чрезъ c_0, находимъ:

$$\omega_1'' + \omega_1 = \frac{c_0}{x^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\omega_1 = \sin x\left(c_1 + c_0\int\frac{\cos x}{x^2}dx\right) + \cos x\left(c_2 - c_0\int\frac{\sin x}{x^2}dx\right),$$

откуда

$$\omega = x\cos x\left(c_1 + c_0\int\frac{\cos x}{x^2}dx\right) - x\sin x\left(c_2 - c_0\int\frac{\sin x}{x^2}dx\right).$$

7. Изъ разсмотрѣнія формулы (18) слѣдуетъ, что интегрированіе уравненія (15) можетъ быть сведено къ интегрированію уравненія вида (1), если $q = \pm nk$, но не трудно показать, что и при какихъ угодно значеніяхъ p и q вопросъ объ интегрированіи уравненія (15) можно поставить въ зависимость отъ интегрированія уравненія вида (1).

Дѣйствительно, взявъ отъ обѣихъ частей уравненія (15) производную съ указателемъ $(-q)$, получимъ:

$$xD^{(n-q+1)}y + (p-q)D^{(n-q)}y + xD^{(-q+1)}y = 0,$$

которое при допущеніи

$$D^{(-q+1)}y = u, \qquad p - q = \alpha$$

и принимаетъ видъ уравненія (1), т. е.

$$u^{(n)} + \frac{\alpha}{x} u^{(n-1)} + u = 0.$$

При помощи n интеграловъ послѣдняго легко получить всѣ $(n+1)$ частныхъ интеграловъ уравненія (15); изъ нихъ n опредѣляется по формулѣ

$$y = D^{(q-1)} u, \tag{19}$$

послѣдній же по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

8. Убѣдившись, что уравненіе (1), которое можно написать въ такомъ видѣ

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} + xy = 0, \tag{20}$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ при k цѣломъ положительномъ или отрицательномъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію, какъ интегрируется это уравненіе, если k будетъ какое угодно постоянное, т. е. къ общему случаю, при чемъ n, указатель порядка уравненія, будемъ считать цѣлымъ и положительнымъ.

Положимъ

$$y = x^{nk+n-1} \cdot u \tag{20'}$$

и подставимъ это въ уравненіе (20). Подстановку эту удобнѣе сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Не трудно видѣть, что

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} = D_x^{\,n-1}\Big(xy' - (nk+n-1)y\Big).$$

Выраженіе въ скобкахъ умножимъ и раздѣлимъ на $x^{-(nk+n)}$, тогда получимъ:

$$xy^{(n)}-nky^{(n-1)}=D^{n-1}\Big[x^{(nk+n)}\Big(x^{-(nk+n-1)}\,.\,y'-$$

$$-(nk+n-1)x^{-(nk+n)}.\,y\Big)\Big]=D^{n-1}\Big[x^{nk+n}\Big(x^{-(nk+n-1)}.\,y\Big)'\Big]$$

Сдѣлавъ теперь указанную подстановку, уравненію (20) дадимъ слѣдующій видъ:

$$x^{-(nk+n)}D^{n-1}\Big(x^{nk+n}u'\Big)+u=0, \qquad (21)$$

или по совершеніи дифференцированія:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}(n-1)_i\,(nk+n)^{(i)}\,.\,x^{-i}u^{(n-i)}+u=0, \qquad (21')$$

здѣсь i — параметръ, цѣлое и положительное число,

$$(n-1)_i=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{i!}$$

$$(nk+n)^{(i)}=(nk+n)\,(nk+n-1)\ldots.(nk+n-i+1),$$

$u^{(n-i)}$ производная $(n-i)$-го (цѣлаго) порядка отъ u по x.

Въ уравненіи (21′) измѣняемъ независимое перемѣнное, полагая

$$x=z^{\frac{1}{n}}.$$

Извѣстно, что

$$D_x{}^m u=\sum_{p=1}^{p=m}A_p{}^{(m)}z^{-\frac{m}{n}+p}\,.\,u_z{}^{(p)}$$

гдѣ p — параметръ, цѣлое положительное число, $u_z{}^{(p)}$ производная p-го порядка отъ u по z, $A_p{}^{(m)}$ извѣстные коэффициѳнты, выраженія которыхъ намъ не понадобятся и относительно которыхъ необходимо только замѣтить, что $A_p^{(m)}=0$, если $p<1$, или $p>m$.

По замѣнѣ независимаго перемѣннаго уравненіе (21)' обратится въ

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}(n-1)_i(nk+n)^{(i)}\sum_{p=1}^{p=n-i}A_p^{(n-i)}z^{p-1}u_z^{(p)}+u=0.$$

Развертывая эти суммы, отобравъ коэффиціенты при одинакихъ указателяхъ p и называя вновь параметры чрезъ p и i, получимъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n}z^{p-1}u^{(p)}\sum_{i=0}^{i=n-1}(n-1)_i(nk+n)^{(i)}A_p^{(n-i)}+u=0.$$

Но на основаніи указаннаго свойства коэффиціентовъ $A_p^{(n-i)}$:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}(n-1)_i(nk+n)^{(i)}A_p^{(n-i)}=\sum_{i=0}^{i=n-p}(n-1)_i(nk+n)^{(i)}A_p^{(n-i)}.$$

Называя этотъ коэффиціентъ чрезъ B_p, дадимъ нашему уравненію видъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n}B_pz^{p-1}u_z^{(p)}+u=0. \tag{22}$$

Взявъ отъ послѣдняго уравненія производную съ указателемъ $(-k)$ по z, имѣемъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n}B_pD^{-k}z^{p-1}u^{(p)}+D^{-k}u=0,$$

или произведя дифференцированіе по общей теоремѣ Ліувилля

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p \sum_{r=0}^{r=p-1} (-k)_r (p-1)^{(r)} z^{p-1-r} D^{-k-r} u^{(p)} + D^{-k} u = 0.$$

Развертывая суммы, суммируя сначала по вертикальнымъ линіямъ, а потомъ по горизонтальнымъ, и означая параметры чрезъ q и ϱ, послѣднее выраженіе можно представить въ видѣ:

$$\sum_{q=1}^{q=n} z^{q-1} D^q D^{-k} u \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-q} (-k)_\varrho (q+\varrho-1)^{(\varrho)} B_{q+\varrho} + D^{-k} u = 0.$$

Положимъ для краткости

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-q} (-k)_\varrho (q+\varrho-1)^{(\varrho)} B_{q+\varrho} = C_q$$

$$D_z^{-k} u = V, \tag{23}$$

тогда послѣднее уравненіе обратится въ такое

$$\sum_{q=1}^{q=n} C_q z^{q-1} V^{(q)} + V = 0. \tag{24}$$

На основаніи формулъ (20)′ и (23) зависимость между интегралами уравненій (20) и (24) будетъ:

$$y = x^{nk+n-1} D_z^{(k)} V. \tag{24'}$$

Поэтому, припомнивъ формулу (10), заключаемъ, что, если k есть цѣлое число, то, сдѣлавъ въ уравненіи (24) снова замѣну независимаго перемѣннаго при помощи соотношенія

$$z = x^n$$

и положивъ $$V = x^{-(n-1)} y_k,$$

уравненіе (24) обратимъ въъ такое

$$y_k^{(n)} + y_k = 0, \qquad (25)$$

гдѣ $y_k^{(n)}$ означаетъ n-ую производную y_k по x. Во избѣжаніе новыхъ выкладокъ, можно поступить иначе. Именно, взявъ уравненіе (25), положимъ въ немъ

$$y_k = x^{(n-1)} V$$

и за тѣмъ сдѣлаемъ указанную замѣну независимаго перемѣннаго, тогда полученное уравненіе должно быть тождественно съ (24). Но такъ какъ уравненіе (25) получается изъ (20), полагая въ немъ $k = 0$, то, очевидно, что искомое нами уравненіе будетъ тождественно съ уравненіемъ (22), если въ немъ положить $k = 0$.

Сдѣлавъ это и замѣняя u чрезъ V и p чрезъ q, будемъ имѣть

$$\sum_{q=1}^{q=n} z^{q-1} V^{(q)} \sum_{i=0}^{i=n-q} (n-1)_i n^{(i)} A_q^{(n-i)} + V = 0. \qquad (26)$$

И такъ, это уравненіе при k цѣломъ непремѣнно тождественно съ уравненіемъ (24).

Коль скоро такъ, то непремѣнно коэффиціенты при одинакихъ членахъ $z^{q-1} V^{(q)}$ въ обоихъ уравненіяхъ (24) и (26) должны быть тождественны, т. е.

$$C_q = \sum_{i=0}^{i=n-q} (n-1)_i n^{(i)} A_q^{(n-i)}. \qquad (27)$$

Но при помощи соотношеній, приведенныхъ выше, C_q можно выразить чрезъ коэффиціенты A еще слѣдующимъ образомъ:

$$C_q = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-q} (-k)_\varrho (q+\varrho-1)^{(\varrho)} \sum_{i=0}^{i=q-\varrho} (n-1)_i A_{q+\varrho}^{(n-i)}. \qquad (28)$$

Достаточно одного взгляда на эту формулу, чтобы замѣтить, что C_q есть цѣлая раціональная функція k вида:

$$C_q = E_q^{(0)} + E_q^{(1)}.k + E_q^{(2)}.k^3 + E_q^{(3)}.k^3 + \ldots . \quad (28')$$

Но, такъ какъ въ выраженіе для C_q k вовсе не входитъ, то заключаемъ, что тождественность выраженій (27) и (28) или (28′) возможна при единственномъ условіи (когда k не нуль), если коэффиціенты при различныхъ степеняхъ k тождественно равны нулю, т. е. необходимо:

$$E_q^{(1)} = E_q^{(2)} = E_q^{(3)} = \ldots\ldots = 0$$

и

$$C_q = E_q^{(0)}.$$

Въ томъ же самомъ можно убѣдиться непосредственно, если подставить въ формулу (28) извѣстныя значенія коэффиціентовъ A; но по сложности этихъ выраженій такой путь слишкомъ утомителенъ.

Однако, при выводѣ уравненія (24), мы не дѣлали никакихъ ограниченій относительно k и, понятно, что составъ коэффиціентовъ C_q (28) остается тотъ-же, будетъ-ли k цѣлое или какое-угодно постоянное, и разъ мы убѣдились, что въ (28′) коэффиціенты E_q тождественно равны нулю, исключая $E_q^{(0)}$, то заключаемъ, что и при какомъ угодно значеніи k, коэффиціенты C_q вовсе не зависятъ отъ k и выраженія (27) и (28) равны между собой; значитъ, и уравненіе (24) при *всякомъ* k тождественно съ уравненіемъ (26). А это послѣднее есть не что иное, какъ преобразованное уравненіе (25), интегралъ котораго извѣстенъ, именно:

$$y_k = \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i x} .$$

Слѣдовательно, интегралъ ур. (26) или что то-же (24) есть

$$V = z^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}$$

гдѣ c_i одно изъ произвольныхъ постоянныхъ; а отсюда изъ (24′) и видно, что интегралъ уравненія (20) при всякомъ значеніи k будетъ:

$$y = x^{nk+n-1} D_z^{(k)} \left(z^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} \right);$$

или, принявъ прежнее обозначеніе, т. е. полагая $\alpha = -nk$, будемъ имѣть, что интегралъ уравненія (20), или что то-же (1), при какомъ угодно α равенъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x^{-(\alpha-n+1)} D_z^{-\frac{\alpha}{n}} \left(z^{-\frac{n-1}{n}} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} \right)_{\pm\infty}^{z=x^n}. \quad (29)$$

Эту формулу можно упростить, а именно, замѣтивъ, что

$$z^{-\frac{n-1}{n}} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{r_i} \frac{d}{dz} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}$$

и отнеся множители $\frac{n}{r_i}$ къ произвольнымъ постояннымъ, получимъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x^{-\alpha+n-1} D^{-\frac{\alpha}{n}+1} \left(e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} \right)_{\pm\infty}^{z=x^n}. \quad (29')$$

9. Выраженіе это при помощи извѣстныхъ формулъ дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ представляется въ видѣ опредѣленнаго интеграла[1]. Намъ достаточно найдти его только для случая $\alpha > n$, такъ какъ, если въ уравненіи (1) $\alpha < n$, то посредствомъ преобразованія, указаннаго въ § 1, всегда возможно выразить интегралъ этого уравненія чрезъ интегралъ

[1] См. статью г. *Лѣтникова* въ Матем. сборникѣ, Т. III, стр. 28—30, формулы (А) и (А′).

другаго уравненія того-же вида, въ которомъ уже соотвѣтственное $\alpha > n$. Искомое выраженіе будетъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \frac{1}{x} \int_0^\infty \xi^{\frac{\alpha}{n}-2} e^{r_i x(1 \pm \xi)^{\frac{1}{n}}} . d\xi, \qquad (30)$$

гдѣ $\alpha > n$, ξ — вспомо ательное перемѣнное, знаки $\pm$ берутся, смотря по тому $r_i \lesseqgtr 0$, C_i — произвольное постоянное, отличное отъ предыдущаго.

Зная же интегралъ уравненія (1), при помощи формулъ (14) и (19) находимъ интегралы уравненій (12) и (15).

10. Извѣстно, что при $n = 2$, интегралъ уравненія (1) находится въ весьма простой зависимости съ трансцендентными функціями Бесселя. Именно, если въ уравненіи (1) положимъ $\alpha = 2i + 1$ и назовемъ интегралъ этого уравненія чрезъ y_i, а функцію Бесселя означимъ чрезъ $J_i(x)$, то

$$y_i = x^{-i} J_i(x). \qquad (a)$$

Предыдущій анализъ обнаруживаетъ, что и при какомъ угодно n функціи, связанныя съ интеграломъ уравненія (1) посредствомъ зависимости (а), обладаютъ свойствами, аналогичными со свойствами функцій Бесселя. Основныя изъ нихъ легко выводятся изъ равенствъ (7), (8), (9) и (10). Полагая въ уравненіи (1)

$$\alpha = ni + (n - 1)$$

и принявъ во вниманіе равенства (*a*), изъ формулы (7) имѣемъ:

$$J_{i-1}(x) = DJ_i(x) + \frac{(n-1)i}{x} J_i(x) \qquad (b)$$

изъ (8): $$D^{(n-1)}\Big(x^{-i} J_i(x)\Big) + x^{-i} J_{i-1}(x) = 0 \qquad (c)$$

изъ (9): $$D^{-ni}\left(x^{-(i-1)}J_{i-1}(x)\right)=xD^{-ni+1}\left(x^{-i}J_i(x)\right) \quad \text{(d)}$$

изъ (10): $$D^{(k)}\left(z^{\frac{n-1}{n}(i+k)}J_{i+k}(\sqrt[n]{z})\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)^k z^{\frac{(n-1)}{n}i} J_i(\sqrt[n]{z}). \quad \text{(e)}$$

При $n=2$ эти зависимости выражаютъ извѣстныя свойства функцій Бесселя[1].

11. Пріемъ, изложенный въ § 1, можетъ быть примѣненъ къ разысканію случаевъ интегрируемости въ конечной формѣ многихъ другихъ уравненій. Изъ нихъ мы укажемъ слѣдующее:

$$y^{(n)}+\frac{\alpha}{x}y^{(n-1)}+\beta x^\mu . y=0, \quad \text{(a)}$$

гдѣ α, β и μ — постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части этого уравненія на x^α, интегрируя и отбрасывая произвольное постоянное, получимъ:

$$x^\alpha y^{(n-1)}+\beta\int x^{\alpha+\mu}y dx=0.$$

Полагая $$\int x^{\alpha+\mu}y dx=x^{\alpha+\mu+1}y_1,$$

исключая изъ послѣднихъ двухъ уравненій y, и за-тѣмъ, повторивъ тотъ-же рядъ операцій k разъ, мы придемъ къ такому уравненію:

$$y_k^{(n)}+\frac{\alpha+k(\mu+n)}{x}y_k^{(n-1)}+\beta x^\mu y_k=0. \quad (\text{a}_k)$$

---

[1] См. *J. Todhunter*, «An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions». 1875. § 386 и § 391.

Если извѣстенъ интегралъ одного изъ уравненій (a) или (a_k), то не трудно будетъ найдти интегралъ другаго.

Примѣръ 1. Извѣстно, что уравненіе

$$y^{(n)} + \beta x^{-2n} y = 0,$$

интегрируется въ конечной формѣ (въ этомъ легко убѣдиться, положивъ $x = -\frac{1}{z}$). Зная же это, изъ разсмотрѣнія уравненій (a) и (a_k) слѣдуетъ, что и уравненіе

$$y^{(n)} \pm \frac{nk}{x} y^{(n-1)} + \beta x^{-2n} y = 0, \qquad \text{(b)}$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если k цѣлое.

Въ этомъ же можно убѣдиться, если въ уравненіи (1) сдѣлать замѣну независимаго перемѣннаго по формулѣ $x = -\frac{1}{z}$.

Примѣръ 2. Найдемъ случаи интегрируемости уравненія:

$$y''' + \frac{3(i+1)}{x} y' + \beta x^{\mu} y = 0. \qquad \text{(c)}$$

Положивъ

$$x = z^{-\frac{1}{3i+1}},$$

получимъ

$$y''' + \frac{3(2i+1)}{3i+1} \frac{1}{z} y'' + \beta_1 z^{\mu_1} y = 0, \qquad \text{(c')}$$

гдѣ производныя отъ y взяты по z и

$$\mu_1 = -\frac{\mu + 3(3i+2)}{3i+1}, \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{(3i+1)^3}.$$

Отъ уравненія (c') при помощи m операцій, указанныхъ въ началѣ этого параграфа, переходимъ къ такому уравненію

$$y_m''' + \frac{\lambda}{z} y_m'' + \beta_1 z^{\mu_1} y_m = 0, \qquad (c'_m)$$

гдѣ
$$\lambda = \frac{3(2i+1) - m(\mu+3)}{3i+1}.$$

Замѣтивъ, что уравненіе (c) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если i — цѣлое, а $\mu = 0$ или $\mu = -6$, находимъ два уравненія вида (c'_m) тоже интегрируемыя, которыя, какъ не трудно видѣть, заключаются въ одномъ слѣдующемъ:

$$y''' + \frac{3k}{3i+1} \frac{1}{z} y'' + \beta_1 z^{-3 \pm \frac{3}{3i+1}} . y = 0, \qquad (d)$$

гдѣ k и i — какія угодно положительныя или отрицательныя цѣлыя числа[1].

---

[1] Уравненіе (d) есть частный случай уже разсмотрѣннаго нами уравненія: $x^2 y''' + Axy'' + By' + Cx^{\mu} y = 0$. См. Сообщенія мат. общ. за 1883 годъ. Вып. II, стр. 115—126. При $k=0$ ур. (d) тождественно съ изученнымъ г. Флоровымъ. См. тамъ-же стр. 129—133.
