

О ЗНАЧЕНИИ,

КАКОЕ МОЖНО ПРИДАТЬ ВЪ ДИНАМИКЪ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ
ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ГАМИЛЬТОНА И НАИМЕНЬ-
ШАГО ДѢЙСТВІЯ.

П. М. Новикова.

Пусть дана система n матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою p условіями; выразимъ $3n$ координатъ точекъ системы черезъ $3n - p = m$ количествъ, такъ чтобы связи были тождественно удовлетворены; тогда эти m количествъ, которыя мы обозначимъ черезъ q_1, q_2, \dots, q_m , будутъ представлять собою независимыя координаты системы, называемыя координатными параметрами или обобщенными координатами. Если система подвержена дѣйствию силъ, имѣющихъ потенціаль, то, какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія движенія системы приводятъ къ нулю первую вариацию интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt, \quad (1)$$

гдѣ T — живая сила системы, U — потенціаль силъ и интеграція берется между двумя моментами времени, въ которые положенія системы даны.

Обратно, условіе, что 1-я вариация интеграла (1) равна нулю

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0, \quad (2)$$

приводить къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, которыя, принимая для краткости

$$T + U = P,$$

въ вышеупомянутыхъ обобщенныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} - \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} - \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0, \dots$$

$$\dots \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_m'} - \frac{\partial P}{\partial q_m} = 0, \quad (3)$$

гдѣ $q_1', q_2' \dots q_m'$, какъ вообще, обозначаютъ производныя координатъ.

Мы здѣсь постараемся показать, что и вторая вариация интеграла (1) имѣетъ важное значеніе въ динамикѣ, именно по отношенію къ такъ называемой устойчивости движенія.

Если скорости или координаты движущейся системы материальныхъ точекъ будутъ въ какое нибудь мгновеніе бесконечно-мало измѣнены, то точки системы станутъ описывать другія траекторіи, различныя отъ тѣхъ, которыя бы онѣ описали, если бы не было произведено этихъ бесконечно-малыхъ измѣненій координатъ и скоростей. Совокупность измѣненныхъ траекторій можетъ быть названа возмущеннымъ путемъ системы, совокупность же неизмѣненныхъ траекторій точекъ системы назовемъ невозмущеннымъ путемъ. Если послѣ возмущенія положенія системы на возмущенномъ пути будутъ бесконечно-мало разниться отъ положеній, которыя бы система имѣла въ то же время на невозмущенномъ пути, то движеніе системы на невозмущенномъ

пути называется устойчивым; если же положенія точекъ на возмущенномъ пути системы съ теченіемъ времени будутъ удаляться все больше и больше до конечнаго или бесконечно-большаго разстоянія отъ одновременныхъ положеній на невозмущенномъ пути, то движеніе системы называется неустойчивым¹.

Такъ какъ въ возмущенномъ пути координаты системы будутъ разниться отъ координатъ невозмущеннаго, то, обозначая ихъ черезъ $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$ и вставляя въ уравненія (3) вмѣсто q_1, q_2, \dots, q_n , получимъ уравненія движенія на возмущенномъ пути. Развернувъ правыя части такимъ образомъ полученныхъ уравненій по степенямъ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ и изъ производныхъ, отбросивъ члены, содержащіе степени этихъ количествъ выше первой степени, такъ какъ мы, имѣя въ виду опредѣлить условія устойчивости, предполагаемъ, что эти количества сохраняютъ во время движенія бесконечно-малыя значенія; вычитая наконецъ изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій почленно уравненія (3), получимъ уравненія линейныя по отношенію къ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены какъ эти величины, такъ и условія, при которыхъ они сохраняютъ бесконечно-малыя значенія. Полученныя въ концѣ линейныя по отношенію къ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ дифференціальныя уравненія, оче-

¹ Существуютъ еще другія опредѣленія устойчивости, различающіяся отъ вышеприведеннаго. Такъ, устойчивымъ называется такое движеніе, въ которомъ возмущенный путь всегда остается бесконечно близкимъ къ невозмущенному, хотя бы при этомъ одновременныя положенія системы на невозмущенномъ и возмущенномъ путяхъ и расходились въ теченіи времени на конечное или бесконечное разстояніе. Такую устойчивость можно назвать устойчивостью по отношенію къ пространству. Частный случай ея представляетъ консервативная устойчивость, разсматриваемая въ «Natural Philosophy» Томсона и Тэта. Въ моемъ сообщеніи на сѣздѣ естеств. и врач. въ Одессѣ я, имѣя въ виду показать связь между свойствами движенія и свойствами интеграла наименьшаго дѣйствія, назвалъ устойчивымъ такое движеніе, въ которомъ невозмущенный путь имѣетъ общія положенія съ возмущеннымъ. Подробный разборъ различныхъ видовъ устойчивости будетъ представленъ въ имѣющей скоро появиться моей работѣ объ этомъ предметѣ.

видно, представляют собою не что иное какъ первыя вариации уравненій (3) по координатамъ и могутъ быть изображены такимъ образомъ:

$$\delta \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} - \frac{\partial P}{\partial q_1} \right) = 0, \delta \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} - \frac{\partial P}{\partial q_2} \right) = 0, \dots$$

$$\dots \delta \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_n'} - \frac{\partial P}{\partial q_n} \right) = 0. \quad (4)$$

Варьируя на самомъ дѣлѣ, мы получимъ дифференціальныя линейныя уравненія, изъ которыхъ опредѣлятся условія устойчивости и бесконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго. Эти уравненія можно, въ виду ихъ свойствъ, называть дифференціальными уравненіями устойчивости движенія.

Принимая во вниманіе, что первая вариация опредѣленнаго интеграла (1) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\delta \int P dt = \int \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} \right) \delta q_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} \right) \delta q_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{\partial P}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_n'} \right) \delta q_n \right\} dt,$$

можемъ, какъ извѣстно, вторую вариацию выразить такъ:

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_1'} \right) \delta q_1 + \delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_2'} \right) \delta q_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q_n'} \right) \delta q_n \right\} dt, \quad (5)$$

гдѣ, какъ и въ предыдущемъ, интеграція берется между начальнымъ и конечнымъ моментомъ и положенія системы для этихъ моментовъ считаются данными; знаки же предѣловъ опущены для краткости.

Изъ сопоставленія выраженія (5) съ уравненіями устойчивости (4) мы можемъ вывести слѣдующую теорему. Безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, если они удовлетворяютъ предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую вариацию Гамильтонова интеграла къ нулю. Можно эту теорему представить въ нѣсколько другой формѣ. Вторая вариация опредѣленнаго интеграла $\int_{t_0}^{t_1} P dt$, какъ извѣстно, можетъ быть приведена къ формѣ

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1'^2} \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1' \partial q_2'} \omega_1 \omega_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2'^2} \omega_2^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1' \partial q_3'} \omega_1 \omega_3 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2' \partial q_3'} \omega_2 \omega_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3'^2} \omega_3^2 + \dots \right\} dt, \quad (6)$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ извѣстныя линейныя функціи вариаций координатъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Принимая во вниманіе, что $P = T + U$, гдѣ U не содержитъ производныхъ координатъ, имѣемъ

$$\delta^2 \int P dt = \int \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2} \omega_1^2 + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'} \omega_1 \omega_2 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2} \omega_2^2 + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_3'} \omega_1 \omega_3 + \dots \right\} dt.$$

Здѣсь подъ знакомъ интеграла находится не что иное какъ значеніе T , которое оно получитъ, когда мы замѣнимъ q'_1, q'_2, \dots, q'_n черезъ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; но T , какъ живая сила системы матеріальныхъ точекъ, при всѣхъ значеніяхъ производныхъ координатъ q_1, q_2, \dots, q_n , не можетъ сдѣлаться отрицательною величиной и наименьшее ея значеніе будетъ нуль; поэтому нулевое значеніе второй вариации Гамильтонова интеграла будетъ наименьшимъ значеніемъ этой вариации. Отсюда предыдущая теорема можетъ быть высказана такъ: Безконечно малыя отклоненія возмущен-

наго пути отъ невозмущеннаго, удовлетворяющія предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую вариацию Гамильтонова интеграла къ минимуму (I).

Съ другой стороны, беря вторую вариацию Гамильтонова интеграла въ простѣйшей формѣ, которая не подверглась еще никакимъ преобразованіямъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \delta^2 \int P dt = \int & \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2} \delta q_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2} \delta q_2^2 + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_3} \delta q_1 \delta q_3 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \delta q_2 \delta q_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3^2} \delta q_3^2 + \dots \\ & + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_1} \delta q_1 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_2} \delta q_1 \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_n} \delta q_1 \delta q'_n + \\ & + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_1} \delta q_2 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_2} \delta q_2 \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_n} \delta q_2 \delta q'_n + \\ & \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1'^2} \delta q_1'^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_2} \delta q'_1 \delta q'_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2'^2} \delta q_2'^2 + \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_3} \delta q'_1 \delta q'_3 + \dots \right\} dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ вторая вариация интеграла $\int P dt$, представленная въ формѣ (7), получаетъ значеніе минимумъ по отношенію къ произвольнымъ вариациямъ координатъ; иначе говоря, предполагая въ (7) все вторыя производныя P выраженными во времени съ помощью рѣшеній дифференціаль-ныхъ уравненій движенія (3), опредѣлимъ—при какихъ функціональныхъ значеніяхъ $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$, разсматриваемыхъ какъ произвольныя функціи t , $\delta^2 \int P dt$, получить наименьшее значеніе. Поступая по общимъ правиламъ вариационнаго исчисленія, получимъ n дифференціальныхъ уравненій, которыя можно предста-вить въ слѣдующей типической формѣ:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_i} \delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_i} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q_i} \delta q_n + \\ & + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q_i} \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q_i} \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q_i} \delta q'_n - \\ & - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_i} \delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_i} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q'_i} \delta q_n + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_i} \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q'_i} \delta q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q'_i} \delta q'_n \right\} = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

полагая здѣсь $i = 1, 2, \dots, n$, получимъ всѣ n дифференціаль-
ныхъ уравненій задачи вариационнаго исчисленія въ ея прило-
женіи къ данному случаю. Уравненія (8) можно представить,
очевидно, въ весьма сжатомъ видѣ, именно

$$\delta \left(\frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial q'_i} \right) = 0 \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

но эти послѣднія суть не что иное, какъ уравненія устойчи-
вости движенія. Такимъ образомъ мы пришли къ теоремѣ: Усло-
вія, которыя должны быть выполнены для того, чтобы
вторая вариация Гамильтонова интеграла получила
значеніе мінімумъ, представляютъ собою уравненія
устойчивости, т. е. уравненія, изъ которыхъ опредѣ-
ляются безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго
пути отъ невозмущеннаго (II).

Такъ какъ наименьшее значеніе второй вариации есть нуль,
то эту теорему можно перефразировать подобно предыдущей, за-
мѣнивъ только слова «значеніе мінімумъ» словами «нулевое зна-
ченіе».

Эти двѣ теоремы (I) и (II) вмѣстѣ представляютъ новый второстепенный принципъ динамики, который можно назвать принципомъ второй вариации Гамильтонова интеграла. Принципъ второй вариации имѣетъ то же значеніе для устойчивости движенія, какое принципъ самого Гамильтонова интеграла имѣетъ для самого движенія. Аналогія между этими двумя принципами до-того велика, что выраженіе принципа Гамильтона переходитъ въ выраженіе принципа второй вариации; стоитъ только въ первомъ подставить вмѣсто интеграла его вторую вариацию и вмѣсто координатъ ихъ вариации. Тѣ-же самыя разсужденія и выводы, очевидно, приложимы и къ интегралу наименьшаго дѣйствія, который для большей наглядности можно представлять себѣ въ формѣ данной Якоби, т. е. исключить изъ интеграла время посредствомъ уравненія сохраненія энергіи. Но такъ какъ начало наименьшаго дѣйствія требуетъ сохраненія постоянной полной энергіи, то возмущенія движенія должны неизмѣнять живой силы системы; такія возмущенія называются консервативными; если кромѣ возмущеній будутъ еще и смѣщенія, то совокупность смѣщеній и возмущеній не должна мѣнять полной энергіи системы. Сверхъ того, такъ какъ, представивъ интегралъ наименьшаго дѣйствія въ формѣ Якоби, мы исключаемъ время, то изслѣдуемая устойчивость будетъ относиться только къ пространству. Обѣ предыдущія теоремы сохраняютъ свою форму за исключеніемъ замѣны Гамильтонова интеграла интеграломъ наименьшаго дѣйствія.

(II)