О РАЗЛОЖЕНИИ ВЪ РЯДЪ МАКЛОРЕНА НѢКОТОРЫХЪ ФУНКЦІЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

И. Пташицкаго.

Эрмитъ въ своемъ «Cours d'analyse de l'école polytechnique» на 64-й стр. указываетъ на нѣсколько разложеній функцій отъ двухъ перемѣнныхъ въ рядъ Маклорена. Указанныя Эрмитомъ разложенія тѣмъ интересны, что въ нихъ коэффиціенты приведены къ очень простому виду, между тѣмъ какъ привести ихъ къ этому виду довольно трудно, если для полученія коэффиціентовъ пользоваться общимъ пріемомъ, т. е. если вычислять ихъ съ помощью производныхъ.

Въ настоящей замѣткѣ я указываю на два весьма элементарныхъ пріема, которые позволяютъ, пользуясь разложеніями функцій отъ одной перемѣнной, получить разложенія Эрмита.

Съ помощью тѣхъ же пріемовъ, какъ легко видѣть, можно найти разложенія многихъ другихъ функцій отъ двухъ и болѣе перемѣнныхъ, причемъ коэффиціенты въ этихъ разложеніяхъ будутъ выражены въ простомъ видѣ, между тѣмъ какъ приведеніе ихъ къ такому виду иногда очень затруднительно, если для ихъ вычисленія пользоваться общимъ пріемомъ.

I.

Пусть

$$f_1(x,u)\,,\; f_2(y,u)\,,\; f_3(z,u)\,,\ldots, \qquad (1)$$

разсматриваемыя какъ функціи отъ перемѣнныхъ

$$x\,,\; y\,,\; z\,,\ldots,$$

разлагаются въ рядъ Маклорена, такъ что

$$f_1(x,u)=\sum \varphi_1^{(m)}(u).x^m\,,\; f_2(y,u)=\sum \varphi_2^{(n)}(u).y^n\,,$$

$$f_3(z,u)=\sum \varphi_3^{(p)}(u).z^p\,,\ldots\,;$$

тогда $\Phi(x, y, z,\ldots)$, функція отъ перемѣнныхъ $x, y, z,\ldots,$ опредѣляемая равенствомъ

$$\Phi(x,y,z,\ldots)=\int_a^b f_1(x,u).f_2(y,u).f_3(z,u)\ldots du, \quad (2)$$

будетъ разлагаться въ рядъ Маклорена, а именно:

$$\Phi(x,y,z,\ldots)=\sum \mathrm{A}_{(m,n,p\ldots)}\, x^m y^n z^p\ldots, \quad (3)$$

гдѣ

$$\mathrm{A}_{(m,n,p\ldots)}=\int_a^b \varphi_1^{(m)}(u).\varphi_2^{(n)}(u).\varphi_3^{(p)}(u)\ldots du. \quad (4)$$

Если теперь выбирать функціи (1) такъ, чтобы интегралъ (2) выражался въ конечномъ видѣ и чтобы интегралы (4) выражались особенно просто, то мы будемъ получать сейчасъ же разложенія (3) въ рядъ Маклорена нѣкоторыхъ функцій отъ многихъ перемѣнныхъ и въ этихъ разложеніяхъ коэффиціенты будутъ выражаться особенно просто.

Примѣры. 1) Пусть

$$f_1(x,u)=\frac{1}{1-xu}=\sum x^m u^m\,,$$

$$f_2(y,u)=\frac{1}{1-y(1-u)}=\sum y^n(1-u)^n\,;$$

$$a=0\,,\quad b=1\,;$$

такъ что интегралы (2), (4) соотвѣтственно равны

$$\int_0^1 \frac{1}{1-xu}\cdot\frac{1}{1-y(1-u)}\,du\,,\quad \int_0^1 u^m(1-u)^n\,du\,.$$

Такъ-какъ значенія ихъ соотвѣтственно приводятся къ

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y}\,,\quad \frac{1.2.3\ldots.m.1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots.(m+n+1)}\,,$$

то равенство (3) даетъ

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y}=\sum\frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots.(m+n+1)}x^m y^n\,.$$

Это третій рядъ Эрмита.

2) Пусть

$$f_1(x,u)=\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-xu}=\sum u^{m-\frac{1}{2}}x^m\,,$$

$$f_2(y,u)=\frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-y(1-u)}=\sum(1-u)^{n-\frac{1}{2}}y^n\,,$$

$$a=0\,,\quad b=1\,;$$

такъ что интегралы (2), (4) соотвѣтственно равны

$$\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-xu} \cdot \frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-y(1-u)}\, du\,, \quad \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}} (1-u)^{n-\frac{1}{2}}\, du\,.$$

Значеніе перваго изъ нихъ выражается въ конечномъ видѣ; значеніе втораго, какъ извѣстно, представляется очень просто. Подставляя эти значенія въ равенство (3), находимъ

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sum \frac{1.3.5.\ldots(2m-1).1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots 2(m+n)} x^m y^n.$$

Это первый рядъ Эрмита.

II.

Пусть

$$\varphi_m(y) \qquad (1)$$

функціи отъ перемѣнной y, разлагающіяся въ рядъ Маклорена, такъ что

$$\varphi_m(y) = \sum A_n^{(m)} y^n\,;$$

тогда $\Phi(x, y)$, функція отъ перемѣнныхъ x, y, опредѣляемая равенствомъ

$$\Phi(x,y) = \sum \varphi_m(y).x^m \quad (m \text{ цѣлое и полож.}), \qquad (2)$$

будетъ разлагаться въ рядъ Маклорена, а именно:

$$\Phi(x,y) = \sum A_n^{(m)} x^m y^n =$$

$$= \sum (A_0^{(m)} + A_1^{(m)} y + A_2^{(m)} y^2 + \ldots.) x^m\,. \qquad (3)$$

*

Если теперь выбирать функціи (1) такъ, чтобы коэффиціенты $A_n^{(m)}$ выражались особенно просто и чтобы сумма ряда (2) опредѣлялась легко, то мы будемъ получать сейчасъ же разложенія (3) нѣкоторыхъ функцій отъ перемѣнныхъ x, y, и въ этихъ разложеніяхъ коэффиціенты будутъ выражаться особенно просто.

Примѣры. 1) Пусть

$$\varphi_m(y) = \frac{1}{1.2.3\ldots m} \frac{d^m\{[f(c)]^m F(c)\}}{dc^m},$$

гдѣ

$$f(c) = c^2, \quad F(c) = \frac{1}{1-cy},$$

такъ что

$$\varphi_m(y) = \sum \frac{(2m+n)(2m+n-1)\ldots(m+n+1) \cdot c^{m+n}}{1.2.3\ldots m} y^n.$$

При нашемъ выборѣ $\varphi_m(y)$, сумма ряда (2), какъ извѣстно, будетъ

$$F(z)\frac{dz}{dc},$$

гдѣ

$$z = c + xz^2;$$

т. е. она приводится къ

$$\frac{1+(1-4cx)^{-\frac{1}{2}}}{1-2cy+(1-4cx)^{\frac{1}{2}}}.$$

Слѣдовательно равенство (3) даетъ

$$\frac{1+(1-4cx)^{-\frac{1}{2}}}{1-2cy+(1-4cx)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum\frac{(2m+n)(2m+n-1)\ldots(m+n+1).c^{m+n}}{1.2.3\ldots m}x^m y^n.$$

Этотъ рядъ обращается во второй рядъ Эрмита, если въ немъ положить $c=1$ и на мѣсто x, y соотвѣтственно подставить $\frac{x^2}{2^2}$, $\frac{y}{2}$.

2) Пусть

$$\varphi_m(y)=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{y^{m+1}dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

такъ что, какъ извѣстно,

$$\varphi_m(y)=\frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5\ldots(2m+1)}\Big(1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}y^4+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}y^{2m}\Big).$$

При нашемъ выборѣ $\varphi_m(y)$ сумма ряда (2) легко можетъ быть опредѣлена. Въ самомъ дѣлѣ, она не что иное какъ

$$\sum\frac{-x^m}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{y^{m+1}dy}{\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\sum x^m y^{2m+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{ydy}{(1-xy^2)\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1-y^2)}}\cdot\arccos\sqrt{\frac{1-x}{1-xy^2}}.$$

Слѣдовательно равенство (3) даетъ

$$\frac{\arccos\sqrt{\dfrac{1-x}{1-xy^2}}}{\sqrt{x(1-x)(1-y^2)}}=$$

$$=\sum\frac{2.4\ldots.\,2m}{3.5\ldots.\,(2m+1)}\left(1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}y^4+\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.+\frac{1.3.5\ldots.\,(2m-1)}{2.4.6\ldots.\,2m}y^{2m}\right)x^m.$$

Этотъ рядъ обращается въ четвертый рядъ Эрмита, если въ немъ подставить $\frac{y}{x}$ на мѣсто y^2.

3) Пусть

$$\varphi_m(y)=\frac{-1}{y\sqrt{1-y^2}}\int\frac{y^{2m+2}dy}{\sqrt{1-y^2}}+$$

$$+\frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{1.3.5\ldots.\,(2m+1)}{2.4.6\ldots.\,(2m+2)}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Поступая въ этомъ примѣрѣ подобнымъ образомъ, какъ въ предыдущемъ, послѣ замѣны въ окончательномъ результатѣ y^2 на $\frac{y}{x}$, получимъ пятый рядъ Эрмита.
