ЗАМѢТКА

ОБЪ ОБОБЩЕНІИ УРАВНЕНІЯ РИКАТТИ.

В. П. Алексѣевскаго.

Разысканіе условій, при которыхъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+Py+Qy^2+R=0 \qquad (1)$$

можетъ быть проинтегрировано конечнымъ числомъ квадратуръ, привело профессора А. В. Лѣтникова къ извѣстному уравненію[1], изъ котораго при частныхъ допущеніяхъ получается уравненіе Рикатти, а также уравненіе Мальмстена, Кокля, и другія уравненія, представляющія обобщеніе уравненіе Рикатти[2].

Въ виду этого можно задаться такою задачей: зная, при какихъ условіяхъ уравненіе Рикатти интегрируется конечнымъ числомъ квадратуръ, найдти общее уравненіе вида (1), интеграція котораго возможна.

Слѣдующія разсужденія весьма просто разрѣшаютъ эту задачу и приводятъ къ уравненію профессора Лѣтникова.

Уравненіе Рикатти

---

[1] См. дальше ур. (5).

[2] См. статью А. В. Лѣтникова въ Математическомъ сборникѣ за 1866 годъ.

$$\frac{dy}{dz} + ay^2 = bz^m$$

интегрируется, если

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

гдѣ i цѣлое положительное число. Сдѣлавъ въ немъ замѣну независимаго перемѣннаго, т. е. положивъ

$$z = \varphi(x), \tag{2}$$

и означая производную отъ z по x чрезъ $\varphi'(x)$, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} + a\varphi'(x)y^2 = b\varphi'(x).\varphi(x)^{-\frac{4i}{2i \pm 1}}$$

Полагая здѣсь

$$y = uy_1 \tag{3}$$

гдѣ u есть произвольная функція отъ x, а y_1 новое независимое перемѣнное, находимъ:

$$\frac{dy_1}{dx} + a\varphi'(x).uy_1{}^2 + \frac{u'}{u}y_1 = b.\frac{\varphi'(x).\varphi(x)^{-\frac{4i}{2i \pm 1}}}{u} \tag{4}$$

Это и есть искомое уравненіе вида (1). Если положить

$$\varphi'(x)u = X_1\ ,\ \frac{u'}{u} = X_2\ ,\ a = b = 1\ ,$$

откуда

$$u = e^{\int X_2\,dx}\ ,\ \varphi(x) = c + \int X_1 e^{-\int X_2\,dx}\,dx\ ,$$

то уравненіе (4) принимаетъ видъ уравненія профессора Лѣтникова, именно:

$$\frac{dy_1}{dx} + X_1 y_1^2 + X_2 y_1 -$$

$$- \frac{X_1 e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0 . \qquad (5)$$

Если бы вмѣсто подстановки (3) мы положили

$$y = uy_1 + v,$$

то получили бы уравненіе вида (1), содержащее три произвольныя функціи u, v, $\varphi(x)$.

Изъ предыдущаго же ясно, что для интеграціи уравненія (4) или, что то-же, (5) достаточно ихъ обратить въ уравненіе Рикатти, что легко сдѣлать, пользуясь формулами (2) и (3).