

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е

нѣкоторой функции по условию наименѣе отклоняться

А. А. Маркова.

Задача.

Опредѣлить коэффициенты

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

цѣлой функции отъ x

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n$$

такъ, чтобы наибольшее численное значеніе отношенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

гдѣ $f(x)$ нѣкоторая данная цѣлая функция отъ x не выше какъ $2n$ -ой степени

$$f(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \dots (1 + a_{2n} x)$$

и x получаетъ всѣ значенія между -1 и $+1$, было какъ можно меньше.

Примѣчаніе.

Вопросъ этотъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, для рѣшенія которыхъ мы не имѣемъ никакихъ общихъ приемовъ, кромѣ указанныхъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ «Sur les questions de Minima etc.».

Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ представляетъ обобщеніе двухъ вопросовъ, рѣшенныхъ въ только что упомянутомъ мемуарѣ. На этомъ частномъ примѣрѣ я имѣю въ виду показать, что для всѣхъ разобранныхъ до сихъ поръ примѣровъ основныя разсужденія П. Л. Чебышева¹ могутъ быть замѣнены болѣе элементарными и наглядными.

По примѣру П. Л. Чебышева требованіе нашей задачи можно формулировать такъ: отношеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$ должно наименѣе уклоняться отъ нуля.

Замѣтимъ еще, что одни изъ данныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

могутъ быть вещественными, другія мнимыми.

Я предполагаю только, что произведеніе

$$(1 + a_1x)(1 + a_2x) \dots (1 + a_{2n}x)$$

приводится къ вещественной функціи отъ x и не обращается въ нуль ни при какихъ значеніяхъ x между -1 и $+1$.

Выводъ дифференціального уравненія.

По примѣру Е. И. Золотарева² приведемъ вопросъ нашъ къ интегрированію нѣкотораго дифференціального уравненія.

Пусть будутъ

¹ Sur les questions de Minima etc. 1858. Théorème 1.

² Приложение алгебраическихъ функций и пр. 1877.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots < \alpha_{m-1} < \alpha_m$$

всѣ корни уравненія

$$y = 0,$$

лежащіе между -1 и $+1$, причемъ двукратные корни считаются дважды, трехкратные трижды и т. д.

Нетрудно убѣдиться, что m должно равняться n .

Въ противномъ случаѣ, полагая

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m) = \omega(x)$$

и

наименьшее численное значеніе $\frac{y}{\omega(x)} = k$, $[-1 \leq x \leq +1]$,

можно составить функцію

$$\frac{y \mp k\omega(x)^*}{\sqrt{f(x)}}$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ вопроса и при $-1 \leq x \leq +1$

менѣе уклоняющуюся отъ нуля, чѣмъ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Наибольшія отклоненія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

отъ нуля соответствуютъ

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1.$$

* Изъ двухъ знаковъ \mp передъ $k\omega(x)$ надо взять $-$, если между $x = -1$ и $x = +1$ отношеніе $\frac{y}{\omega(x)}$ число положительное, и $+$ въ противномъ случаѣ.

Здѣсь

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ означаютъ корни уравненія

$$\frac{d}{dx} \frac{y}{\sqrt{f(x)}} = \frac{y' f(x) - \frac{1}{2} y f'(x)}{\{ \sqrt{f(x)} \}^3} = 0,$$

и лежатъ соотвѣтственно между

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2, \alpha_2 \text{ и } \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} \text{ и } \alpha_n.$$

Если въ одномъ изъ этихъ промежутковъ приходится нѣсколько корней уравненія

$$y' f(x) - \frac{1}{2} y f'(x) = 0,$$

то мы выбираемъ изъ этихъ корней одинъ и притомъ такой, какому соотвѣтствуетъ наибольшее численное значеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Всѣ полученныя такимъ образомъ наибольшія отклоненія нашей функціи отъ нуля должны быть равны между собой. Въ противномъ случаѣ можно составить другую функцію того же вида, менѣе отклоняющуюся отъ нуля.

Пусть напримѣръ наибольшее отклоненіе нашей функціи отъ нуля равно L' въ промежуткѣ отъ $x = \alpha_k$ до $x = \alpha_{k+1}$ и L въ промежуткѣ отъ $x = -1$ до $x = \alpha_k$ и отъ $x = \alpha_{k+1}$ до $x = 1$, причемъ $L > L'$.

Составимъ функцію

$$\omega(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+2}) \dots \dots (x - \alpha_n) = \frac{y}{(x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1})},$$

которая сохраняетъ знакъ одинаковый съ y .

при $-1 \leq x \leq \alpha_k$ и при $\alpha_{k+1} \leq x \leq +1$.

Положим затѣмъ

наибольшее численное значеніе $\frac{\omega(x)}{\sqrt{f(x)}} = h; [-1 \leq x \leq +1]$.

Тогда не трудно видѣть, что функція

$$y = \frac{L - L'}{h} \omega(x) \sqrt{f(x)}$$

при $-1 \leq x \leq +1$ будетъ меньше уклоняться отъ нуля, чѣмъ

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при $x = +1$ и при $x = -1$ наша функція также должна равняться $\pm L$.

Въ предыдущемъ разсужденіи придется замѣнить только

$\omega(x)$ на $-(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})$

или $+(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n)$.

И такъ, выраженіе

$$\frac{y^2}{f(x)} - L^2 = \frac{y^2 - L^2 f(x)}{f(x)}$$

должно обращаться въ нуль при

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1$$

и производная его

$$1 + \frac{d \frac{y^2}{f(x)}}{dx} = \frac{2yy'f(x) - y^2f'(x)}{[f(x)]^2} \geq 1 - \text{при}$$

при

$$x = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}.$$

А потому

$$\frac{d[y^2 - L^2 f(x)]}{dx} = 2yy' - L^2 f'(x)$$

при

$$x = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

также обращается въ нуль.

Слѣдовательно

$$y^2 - L^2 f(x) = -(1 - x^2) W^2$$

$$2y'f(x) - yf'(x) = 2WV,$$

гдѣ V и W двѣ цѣлыя функціи отъ x .

Степень W равна $n - 1$, а степень V не больше степени $f(x)$ и $2n - 1$.

Положимъ:

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}} = z$$

и исключимъ изъ нашихъ двухъ уравненій W .

Такимъ образомъ получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dz}{\sqrt{L^2 - z^2}} = \frac{V dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot f(x)} = \sum \frac{A_k dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot (1 + a_k x)}. \quad (1)$$

Рѣшеніе.

Введемъ вспомогательныя числа φ_k , опредѣляемыя уравненіями:

$$\cos \varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad \sin \varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+a_k x}},$$

причемъ для полной опредѣленности всѣ встрѣчающіеся у насъ квадратныя корни будемъ извлекать такъ, чтобы вещественныя части выходили положительными, и сверхъ того при $x = -1$

положимъ $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+a_k} \sqrt{1-a_k}}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a_k x)}$$

и вещественная часть этого выраженія постоянно остается отрицательною (конечно $-1 < x < +1$).

При помощи введенныхъ нами величинъ φ_k общее рѣшеніе дифференціального уравненія (1) можетъ быть выражено слѣдующею формулою:

$$z = L \cos \left(C + \sum \frac{2 A_k \varphi_k}{\sqrt{1+a_k} \sqrt{1-a_k}} \right).$$

Въ этой формулѣ постоянныя

$$L, C, A_1, A_2, \dots, A_{2n}$$

остаются неопредѣленными.

Необходимыя значенія ихъ я просто угадываю.

А именно, искомая нами функция z определяется такимъ равенствомъ:

$$z = L \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}),$$

откуда

$$y = L \sqrt{f(x)} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}), \quad (2)$$

или

$$y = \frac{L}{2} \left\{ \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{x-1} \right) + \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \sqrt{x-1} \right) \right\}. \quad (3)$$

Здѣсь буквою \prod_k мы хотимъ выразить произведение, распространенное на все значенія k .

Нетрудно видѣть, что написанная нами функция y дѣйстви-тельно цѣлая и притомъ n -ой степени.

Располагая эту функцию по степенямъ x , для коэффициента при x^n получаемъ слѣдующее выраженіе

$$\frac{L}{2} \left\{ \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right) + \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right) \right\}.$$

По условіямъ вопроса, коэффициентъ этотъ долженъ приводиться къ единицѣ.

Слѣдовательно,

$$L = \frac{2}{\prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right) + \prod_k \left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}} \right)}. \quad (4)$$

Остается доказать, что составленная такимъ образомъ функція $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ дѣйствительно наименѣе отклоняется отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$.

Доказательство.

По мѣрѣ возрастанія x отъ -1 до $+1$ вещественныя части всѣхъ φ_k убываютъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до нуля; вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}$$

убываетъ отъ $n\pi$ до нуля.

А при такомъ убываніи суммы

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n}$$

косинусъ ея

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n})$$

переходитъ черезъ нуль ровно n разъ и каждый разъ мѣняетъ свой знакъ.

Тотъ-же косинусъ достигаетъ своего наибольшаго численнаго значенія, единицы, при

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n} = n\pi, (n-1)\pi, (n-2)\pi, \dots, 2\pi, \pi, 0.$$

Соотвѣтствующія значенія x пусть будутъ

$$-1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1.$$

Сравнимъ нашу функцію $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ съ какою нибудь другою

$$\text{того-же вида } z = \frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}.$$

Разность ихъ

$$\frac{y_1 - y}{\sqrt{f(x)}}$$

можетъ обращаться въ нуль только $n - 1$ разъ, такъ-какъ $y_1 - y$ цѣлая функція отъ x не выше $(n-1)$ -ой степени.

Поэтому знакъ этой разности не можетъ быть противоположенъ знаку $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ при всѣхъ $n + 1$ слѣдующихъ значеніяхъ x :

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, +1.$$

А коль-скоро при

$$x = \beta_k$$

разность

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

имѣетъ одинаковый знакъ съ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$, численное значеніе

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}$$

больше соответственнаго численнаго значенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

т. е. болѣе L .

Итакъ, дѣйствительно, найденная нами функція z менѣе отклоняется отъ нуля, чѣмъ какая бы то ни было другая функція того-же вида.