СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

1884 года.

II.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1884.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія:

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

16 марта 1884 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, А. А. Клюшниковъ, Н. Д. Пильчиковъ, И. К. Шейдтъ, М. Ѳ. Ковальскій, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

1. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о полученіи обществомъ статьи г. *Новикова* подъ заглавіемъ: «О значеніи, какое можно придать въ динамикѣ второй варіаціи опредѣленныхъ интеграловъ Гамильтона и наименьшаго дѣйствія», затѣмъ —

2. О полученіи обществомъ слѣдующихъ изданій:

1) Записки математическаго отдѣленія новороссійскаго общества естествоиспытателей. Т. V. 1884 г.

2) Математическій сборникъ. Москва. Т. XI, вып. 3. 1884 г.

3) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. 1883. № 3 съ приложеніемъ.

4) Journal de mathématiques spéciales. № 2, Février, 1884.

5) Journal de mathématiques élémentaires. № 2, Février. 1884.

6) Протоколы XXIX — XXXIII засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ общества естествоиспытателей при Императорскомъ казанскомъ университетѣ. Собранія протоколовъ. Т. 2, вып. 1.

7) *A. Socoloff*, Sur la queue du premier type de la comète de 1858. V. Moscou. 1844. Изданіе общества испытателей природы.

8) *Th. Bredichin*, Quelques remarques concernant mes recherches sur les comètes. Moscou. 1884. Изданіе общества испытателей природы.

9) *Новиковъ П. М.*, Признакъ устойчивости движенія и его связь съ однимъ изъ признаковъ maximum'a или minimum'a простыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

3. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе «Объ интегрированіи уравненія: $\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\alpha}{z} \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0$».

4. *М. А. Тихомандрицкій* доложилъ замѣтку г. *Новикова* подъ заглавіемъ — «О значеніи, какое можно придать въ динамикѣ второй варіаціи опредѣленныхъ интеграловъ Гамильтона и наименьшаго дѣйствія».

5. *Н. Д. Пильчиковъ* изложилъ свое рѣшеніе задачи г. Аршаулова, предложенной въ предыдущемъ засѣданіи общества.

Протоколъ засѣданія 30-го марта.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, А. А. Клюшниковъ, А. П. Грузинцевъ, Н. Д. Пильчиковъ, И. Д. Штукаревъ, М. А. Тихомандрицкій, П. С. Флоровъ, В. П. Алексѣевскій.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

1. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію 1) о полученіи обществомъ: 1° замѣтки г. Маркова подъ заглавіемъ — «Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля», и 2° чрезъ посредство проф. К. А. Поссе статьи Г. И. Пташицкаго подъ заглавіемъ — «О разложеніи въ рядъ Маклорена функцій со многими перемѣнными»; затѣмъ — о полученіи 2) Записокъ студентовъ математическаго отдѣленія физико-математическаго факультета Императорскаго С.-Петербургскаго университета. Годъ I, выпускъ 1. 1884 года.

2. *К. А. Андреевъ* доложилъ вышеупомянутую статью г. Пташицкаго — «О разложеніи въ рядъ Маклорена функцій со многими перемѣнными».

3. *П. С. Флоровъ* сдѣлалъ сообщеніе — Объ интегрированіи уравненія $\sum_{i=0}^{k} a_i x^{k-i} y^{n-i} = x^{m+k} y.$

4. *А. П. Грузинцевъ* доложилъ свою «Замѣтку къ электромагнитной теоріи поляризаціи свѣта».

5. *К. А. Андреевъ* доложилъ вышеупомянутую замѣтку г. Маркова подъ заглавіемъ — «Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля».

ОПЫТЪ ИЗУЧЕНІЯ

СТАЦІОНАРНАГО СОСТОЯНІЯ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ.

А. П. Грузинцева.

1.

Предметомъ настоящей статьи будетъ служить рѣшеніе слѣдующаго вопроса: дана упругая изотропная среда, частицы которой выполняютъ нѣкоторыя перемѣщенія, какъ поступательныя, такъ и вращательныя около нѣкоторыхъ осей; эти перемѣщенія даны для точекъ внутри нѣкотораго объема, составляющаго часть данной среды: найдти перемѣщенія и силы, развивающіяся вслѣдствіе этихъ перемѣщеній, въ остальной части среды.

Пусть въ точкѣ M $(x, y\ z)$ данной упругой среды возбуждены молекулярныя перемѣщенія, причемъ частицы вращаются около нѣкоторыхъ осей. Положимъ, что u, v, w суть составляющія параллельно осямъ прямоугольныхъ координатъ поступательнаго перемѣщенія частицы, а ω, χ, ϱ — вращательнаго; далѣе предположимъ, что средина находится или въ равновѣсіи, или въ состояніи установившагося движенія, т. е. средина находится въ стаціонарномъ состояніи, тогда, если X, Y, Z будутъ составляющія внѣшнихъ, дѣйствующихъ на точку M, силъ, поддерживающихъ средину въ стаціонарномъ состояніи, имѣемъ извѣстныя уравненія упругости:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta_2 u=\delta X;\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta_2 v=\delta Y;\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta_2 w=\delta Z;\end{aligned}\right\}\qquad(A)$$

здѣсь λ и μ суть коэффиціенты упругости, θ — коэффиціентъ сжатія среды въ точкѣ M, именно:

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$, $\Delta_2 w$ суть дифференціальные параметры 2-го порядка въ прямоугольныхъ координатахъ трехъ функцій u, v, w; δ плотность среды въ точкѣ M; кромѣ того въ этихъ уравненіяхъ X, Y, Z имѣютъ нѣкоторую напередъ данную форму. Такъ-какъ по предположенію частица M вращается около нѣкоторой оси, то кромѣ уравненій (A) должны имѣть мѣсто еще соотношенія между ω, χ, ϱ и u, v, w. Эти соотношенія суть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}2\omega&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\text{*};\\2\chi&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x};\\2\varrho&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y};\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

* *Kirchhoff's*, Vorlesungen über Mathematische Physik. S. 108.

причемъ, какъ слѣдствіе этихъ равенствъ:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y}+\frac{\partial \varrho}{\partial z}=0.$$

Для удобствъ изслѣдованія мы замѣнимъ уравненія (A) другими. Прибавимъ и вычтемъ изъ каждаго уравненія системы (A) по порядку количества

$$\mu\frac{\partial \theta}{\partial x},\ \mu\frac{\partial \theta}{\partial y},\ \mu\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

и введемъ ω, χ, ϱ изъ уравненій (B), тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x}+2\mu\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)&=\delta X\\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y}+2\mu\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}-\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)&=\delta Y\\
(\lambda+2\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z}+2\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)&=\delta Z
\end{aligned}\right\}\quad \text{(A bis)}$$

Замѣтимъ здѣсь соотношеніе для силъ X, Y, Z.

Продифференцировавъ послѣднія уравненія по x, y, z, по сложеніи результатовъ найдемъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\lambda+2\mu}{\delta}\Delta_2\theta. \qquad \text{(C)}$$

Предположимъ теперь, что средина не сжимаема, т. е. что

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad \text{(D)}$$

тогда уравненія (A), (A bis) и (C) обратятся въ новыя болѣе простыя, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\mu\Delta_2 u&=\delta X\\ \mu\Delta_2 v&=\delta Y\\ \mu\Delta_2 w&=\delta Z\end{aligned}\right\}\qquad\text{(E)}$$

потомъ

$$\left.\begin{aligned}2\mu\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)&=\delta X\\ 2\mu\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)&=\delta Y\\ 2\mu\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)&=\delta Z\end{aligned}\right\}\qquad\text{(F)}$$

и

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.\qquad\text{(C bis)}$$

Такъ какъ силы X, Y, Z вмѣстѣ съ внутренними силами упругости поддерживаютъ средину въ стаціонарномъ состояніи, то мы можемъ напередъ предположить, что X, Y, Z суть функціи u, v, w, т. е. суть нѣкоторыя функціи точки; допустимъ, что X, Y, Z имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{\mu}X&=\frac{\partial\Delta_2 W}{\partial y}-\frac{\partial\Delta_2 V}{\partial z}\\ \frac{\delta}{\mu}Y&=\frac{\partial\Delta_2 U}{\partial z}-\frac{\partial\Delta_2 W}{\partial x}\\ \frac{\delta}{\mu}Z&=\frac{\partial\Delta_2 V}{\partial x}-\frac{\partial\Delta_2 U}{\partial y}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(K)}$$

эти значенія X, Y, Z удовлетворяютъ тождественно соотношенію (C bis); количества U, V, W суть нѣкоторыя функціи точки, подлежащія опредѣленію.

2.

Приступимъ теперь къ рѣшенію предложенной задачи.

Введемъ вмѣсто u, v, w нѣкоторыя другія функціи координатъ R, U, V, W, связанныя съ u, v, w соотношеніями:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

Эти функціи введены, кажется, Лямэ[1].

Эти выраженія для u, v, w, какъ убѣдимся непосредственно, совмѣстны съ предположеніями (K).

И такъ, надо опредѣлить эти четыре функціи, для чего сначала выразимъ при помощи ихъ ω, χ и ϱ.

Положимъ:

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \qquad (H)$$

и внесемъ значенія u, v, w изъ (F) въ (B); тогда, при помощи (H), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta_2 U \\ 2\chi &= \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \Delta_2 V \\ 2\varrho &= \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Delta_2 W \end{aligned}\right\} \qquad (J)$$

[1] Leçons sur l'élasticité. 2-me éd., p. 149.

а если внесемъ эти значенія ω, χ, ϱ въ уравненія (F), то получимъ соотношенія (K), чѣмъ и оправдается возможность введенія функцій R, U, V, W.

Предъидущее соображеніе показываетъ, что знаніе функцій R, U, V и W рѣшаетъ предложенный вопросъ. Опредѣлимъ эти функціи. Продифференцировавъ (G) по x, y, z соотвѣтственно и внеся результаты въ (D), находимъ:

$$\Delta_2 R = 0. \tag{I}$$

Отсюда опредѣлимъ R.

Для опредѣленія U, V, W изъ уравненій (J) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 U &= \frac{\partial\Theta}{\partial x} - 2\omega \\ \Delta_2 V &= \frac{\partial\Theta}{\partial y} - 2\chi \\ \Delta_2 W &= \frac{\partial\Theta}{\partial z} - 2\varrho \end{aligned}\right\} \tag{L}$$

Положимъ здѣсь

$$\left.\begin{aligned} U &= U' + \frac{\partial P}{\partial x} \\ V &= V' + \frac{\partial P}{\partial y} \\ W &= W' + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{M}$$

причемъ P, U', V', W', суть нѣкоторыя новыя функціи точки, подлежащія опредѣленію.

Для опредѣленія этихъ функцій предположимъ, что

$$\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{dW'}{dz} = 0, \tag{N}$$

тогда для опредѣленія P имѣемъ равенство:

$$\Delta_2 P = \Theta, \tag{P}$$

находимое при помощи (M), (N) и (H).

Внося значенія U, V и W изъ (M) въ (L), найдемъ при помощи (P) слѣдующія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 U' &= -2\omega \\ \Delta_2 V' &= -2\chi \\ \Delta_2 W' &= -2\varrho \end{aligned}\right\} \tag{Q}$$

Такъ-какъ намъ ω, χ, ϱ извѣстны внутри нѣкотораго объема Ω данной средины, то, называя ω_1, χ_1, ϱ_1 ихъ значенія внутри этого объема и распредѣляя эти вращательныя перемѣщенія въ точкахъ объема Ω, какъ плотности или массы, принадлежащія этимъ точкамъ, можемъ удовлетворить уравненіямъ (Q); положивъ[1]:

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\omega_1\, d\tau_1}{r} \\ V' &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\chi_1\, d\tau_1}{r} \\ W' &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varrho_1\, d\tau_1}{r} \end{aligned}\right| \tag{R}$$

гдѣ ω_1, χ_1, ϱ_1 суть значенія ω, χ, ϱ въ точкѣ M_1 (x_1, y_1, z_1) пространства Ω; $d\tau_1 = dx_1\ dy_1\ dz_1$ есть элементъ объема въ точкѣ M_1 и r есть разстояніе этой точки M_1 отъ данной M, лежащей внѣ объема Ω, т. е.

---

[1] См. *Helmholtz*'s, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen etc. Journal von Crelle, 1858, S. 38, или его-же Wissenschaftliche Abhandlungen, 1 Band. S. 115.

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2};$$

интегрированіе же должно быть распространено на весь объемъ точекъ M_1, т. е. на весь объемъ Ω.

Теперь можемъ вычислить u, v, w.

Сначала положимъ по уравненію (P):

$$P = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta_1 d\tau_1}{r} \tag{П}$$

причемъ Θ_1 будетъ значеніе Θ въ точкѣ M_1; затѣмъ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega_1 d\tau_1}{r} + \frac{\partial P}{\partial x} \\ V &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\chi_1 d\tau_1}{r} + \frac{\partial P}{\partial y} \\ W &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho_1 d\tau_1}{r} + \frac{dP}{dz} \end{aligned}\right| \tag{III}$$

Прежде чѣмъ идти дальше, замѣтимъ полнѣйшую аналогію нашихъ уравненій (G), (H), (J), (M), (R), (П) и (B) съ уравненіями Максуэлля, данными имъ въ § 616 его извѣстнаго трактата по электричеству и магнетизму (Treatise on el. and magn. Vol. II. pp. 234 — 235). Эта аналогія наводитъ на мысль, что электрическія и магнитныя явленія должны быть приписаны особому состоянію нѣкоторой упругой среды, внутри которой происходятъ вращательныя перемѣщенія частицъ. Указанная аналогія можетъ послужить основаніемъ для новой теоріи электрическихъ и магнитныхъ явленій*, теоріи, которая была уже высказываема

---

* Для легчайшаго сравненія формулъ Максуэлля съ данными здѣсь можно привести сравнительную таблицу обозначеній Максуэлля и настоящей статьи:

Максуэлль:	У меня:
F', G', H'	U', V', W'
χ, J	P, Θ
F, G, H	U, V, W
$2\pi\mu u, 2\pi\mu v, 2\pi\mu w$	ω, χ, ρ
$\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$	$u, v, w.$

въ той или другой формѣ многими учеными, въ томъ числѣ и Максуэллемъ. Не останавливаясь, однако, на этомъ пунктѣ (мы предполагаемъ развить его въ особой статьѣ), перейдемъ къ дальнѣйшему изученію нашего вопроса.

3.

Назовемъ a, b, c косинусы направленія вращательнаго перемѣщенія, величину котораго въ точкѣ M_1 обозначимъ $2\pi k_1$; тогда

$$\omega_1 = 2\pi k_1 a,\ \chi_1 = 2\pi k_1 b,\ \varrho_1 = 2\pi k_1 c.$$

Затѣмъ положимъ:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \int\frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(b\frac{\partial r}{\partial z} - c\frac{\partial r}{\partial y}\right); & u' &= \int\frac{d\tau_1}{r}\left(\frac{\partial(k_1 c)}{\partial y} - \frac{\partial(k_1 b)}{\partial z}\right);\\
v_1 &= \int\frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(c\frac{\partial r}{\partial x} - a\frac{\partial r}{\partial z}\right); & v' &= \int\frac{d\tau_1}{r}\left(\frac{\partial(k_1 a)}{\partial z} - \frac{\partial(k_1 c)}{\partial x}\right);\\
w_1 &= \int\frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(a\frac{\partial r}{\partial y} - b\frac{\partial r}{\partial x}\right); & w' &= \int\frac{d\tau_1}{r}\left(\frac{\partial(k_1 b)}{\partial x} - \frac{\partial(k_1 a)}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

при такихъ положеніяхъ u, v, w будутъ вычисляться по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{\partial R}{\partial x} + u_1 + u'\\
v &= \frac{\partial R}{\partial y} + v_1 + v'\\
w &= \frac{\partial R}{\partial z} + w_1 + w'.
\end{aligned}\right| \quad \text{(V)}$$

Разсматривая эти выраженія, видимъ, что u, v, w составлены изъ трехъ частей. Первыя части зависятъ отъ нѣкоторой функціи координатъ — функціи, которая вообще отъ вращательныхъ перемѣщеній не зависитъ; вторыя части зависятъ отъ вращательныхъ перемѣщеній въ точкѣ M_1 и наконецъ третьи зависятъ отъ измѣненій ихъ по координатамъ точки M.

Выраженіе для u_1, v_1, w_1 можно преобразовать, сведя интегрированіе по объему на интегрированіе по поверхности этого объема.

Дѣйствительно, замѣчая, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z_1},$$

получимъ, интегрируя u_1, v_1, w_1 по частямъ

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{(b\gamma - c\beta)k_1 d\sigma_1}{r} + u_1', \\ v_1 &= \int \frac{(c\alpha - a\gamma)k_1 d\sigma_1}{r} + v_1', \\ w_1 &= \int \frac{(a\beta - b\alpha)k_1 d\sigma_1}{r} + w_1'. \end{aligned}\right| \quad \text{(VI)}$$

Здѣсь, во-первыхъ, α, β, γ суть косинусы направленія нормала къ элементу $d\sigma_1$ поверхности, ограничивающей объемъ Ω точекъ M_1 и, во-вторыхъ, u_1', v_1', w_1' суть u', v', w', въ которыхъ дифференцированіе по x, y, z замѣнено соотвѣтственно дифференцированіемъ по x_1, y_1, z_1. Замѣтимъ, что множители въ скобкахъ имѣютъ простое геометрическое значеніе. Это, ясно, суть количества, пропорціональныя косинусамъ направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ: оси вращенія и нормала къ элементу поверхности $d\sigma_1$; называя уголъ между этими прямыми буквой φ, а косинусы направленія перпендикуляра къ ихъ плоскости λ, μ, ν, имѣемъ:

$$\lambda \sin \varphi = b\gamma - c\beta$$

$$\mu \sin \varphi = c\alpha - a\gamma$$

$$\nu \sin \varphi = a\beta - \alpha b$$

и

$$\cos \varphi = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

4.

Разсмотримъ элементарныя перемѣщенія въ точкѣ M, производимыя элементомъ объема въ M_1.

Элементарныя значенія для u_1, v_1, w_1 будутъ

$$u_1 = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(b\frac{\partial r}{\partial x} - c\frac{\partial r}{\partial y}\right);$$

$$v_1 = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(c\frac{\partial r}{\partial y} - a\frac{\partial r}{\partial z}\right);$$

$$w_1 = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(a\frac{\partial r}{\partial y} - b\frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

предполагая при этомъ, что вращенія въ M_1 не зависятъ отъ координатъ точки M.

Что касается R, то, такъ какъ эта функція должна удовлетворять уравненію Лапласа

$$\Delta_2 R = 0,$$

мы можемъ положить:

$$R = \int \frac{\varepsilon d\tau_1}{r};$$

гдѣ ε количество аналогичное плотности; элементарное же значеніе R будетъ:

$$R = \frac{\varepsilon d\tau_1}{r}.$$

Такимъ образомъ получимъ для u, v, w слѣдующія выраженія:

$$u = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(b\frac{dr}{dz} - c\frac{dr}{dy}\right)$$

$$v = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dy} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(c\frac{dr}{dx} - a\frac{dr}{dz}\right)$$

$$w = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dz} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(a\frac{dr}{dy} - b\frac{dr}{dx}\right).$$

Называя l, m, n косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости k_1 и r, а уголъ между ними знакомъ

$$(rk_1),$$

имѣемъ:

$$b\frac{dr}{dz} - c\frac{dr}{dy} = l\sin(rk_1)$$

$$c\frac{dr}{dx} - a\frac{dr}{dz} = m\sin(rk_1)$$

$$a\frac{dr}{dy} - b\frac{dr}{dx} = n\sin(rk_1)$$

и

$$a\frac{dr}{dx} + b\frac{dr}{dy} + c\frac{dr}{dz} = \cos(rk_1).$$

Тогда:

$$u = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\, l\sin(rk_1)$$

$$v = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dy} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\, m\sin(rk_1)$$

$$w = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dz} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\, n\sin(rk_1).$$

Положимъ для краткости письма:

$$s = -\frac{\varepsilon\, d\tau_1}{r^2}, \quad q = \frac{k_1\, d\tau_1}{r^2} \sin(rk_1),$$

тогда для перемѣщеній получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} u &= s\frac{\partial r}{\partial x} + ql \\ v &= s\frac{\partial r}{\partial y} + qm \\ w &= s\frac{\partial r}{\partial z} + qn. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Умножая эти равенства по порядку сначала на $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$, а потомъ на l, m, n и складывая, находимъ:

$$s = u\frac{\partial r}{\partial x} + v\frac{\partial r}{\partial y} + w\frac{\partial r}{\partial z} \qquad \text{(b)}$$

$$q = ul + vm + wn. \qquad \text{(c)}$$

Помножая тѣ-же равенства на a, b, c и складывая, найдемъ

$$ua + vb + wc = -\frac{\varepsilon\, d\tau_1}{r^2}\cos(rk_1). \qquad \text{(d)}$$

Такимъ образомъ заключаемъ слѣдующее: точка M претерпѣваетъ три рода перемѣщеній: 1-ое вдоль радіуса r, это перемѣщеніе измѣняется обратно-пропорціонально квадрату разстоянія отъ точки M_1 (которую мы будемъ называть центромъ перемѣщеній); 2-ое вдоль k_1— это перемѣщеніе измѣняется пропорціонально косинусу угла между r и k_1, и 3-ье вдоль перпендикуляра къ плоскости r и k_1 и измѣняется пропорціонально синусу того-же угла; кромѣ того оба послѣднія перемѣщенія измѣняются вмѣстѣ съ тѣмъ обратно-пропорціонально квадрату разстоянія.

Называя перемѣщеніе вдоль какого-нибудь направленія x символомъ u_x, имѣемъ, слѣдовательно:

$$u_r = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2};\; u_{k1} = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\cos(rk_1);\; u_q = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\,. \quad (1)$$

Здѣсь q есть направленіе перпендикуляра къ плоскости r и k_1.

Найдемъ еще перемѣщеніе вдоль перпендикуляра къ r и q; пусть косинусы направленія этого перпендикуляра будутъ ξ, η, ζ, тогда

$$\xi = m\,\frac{\partial r}{\partial z} - n\,\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\eta = n\,\frac{\partial r}{\partial x} - l\,\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\zeta = l\,\frac{\partial r}{\partial y} - m\,\frac{\partial r}{\partial x}$$

или, подставя сюда значенія l, m, n, по приведеніи получимъ:

$$\xi \sin(rk_1) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(rk_1) - a$$

$$\eta \sin(rk_1) = \frac{\partial r}{\partial y}\cos(rk_1) - b$$

$$\zeta \sin(rk_1) = \frac{\partial r}{\partial z}\cos(rk_1) - c.$$

Называя перемѣщеніе вдоль направленія (ξ, η, ζ) знакомъ u_p, имѣемъ:

$$u_p = u\xi + v\eta + w\zeta = 0, \text{ если уголъ } rk_1 \text{ не нуль.}$$

Итакъ, перемѣщеніе вдоль перпендикуляра къ плоскости $r\ q$ равно нулю.

5.

Разсмотримъ элементарныя перемѣщенія M, производимыя элементомъ поверхности, ограничивающей объемъ Ω.

Формулы (VI) § 3 даютъ:

$$u = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\alpha + \frac{\sin(n_1 k_1) k_1\, d\sigma_1}{r}\lambda$$

$$v = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\beta + \frac{\sin(n_1 k_1) k_1\, d\sigma_1}{r}\mu$$

$$w = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\gamma + \frac{\sin(n_1 k_1) k_1\, d\sigma_1}{r}\nu,$$

гдѣ n_1 есть направленіе нормала къ элементу поверхности $d\sigma_1$; значенія λ, μ, ν даны въ концѣ § 3.

Отсюда находимъ:

$$u_r = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\cos(n_1 r) + \frac{k_1\, d\sigma_1 \sin(n_1 k_1)}{r}\cos(r q_1)$$

или, зная, что

$$\sin(n_1 k_1)\cos(q_1 r) = -\sin(r k_1)\cos(n_1 q),$$

найдемъ

$$u_r = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\cos(n_1 r) - \frac{k_1\, d\sigma_1 \sin(r k_1)}{r}\cos(q n_1),$$

гдѣ q_1 направленіе перпендикуляра къ плоскости n_1 и k_1.

Далѣе найдемъ:

$$u_{n_1} = -\frac{\varepsilon d\sigma_1}{r}, \; u_{q_1} = \frac{k_1 d\sigma_1}{r} \sin(n_1 k_1).$$

Изъ этихъ формулъ заключаемъ, что

$$u_r = u_{n_1} \cos(n_1 r) + u_{q_1} \cos(q_1 r).$$

6.

Опредѣлимъ теперь упругія силы, развивающіяся въ точкѣ M вслѣдствіе ея перемѣщеній. Для ихъ вычисленія замѣтимъ предварительно слѣдующія соотношенія между производными r по координатамъ.

Имѣемъ сначала:

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = x - x_1,$$

затѣмъ $r\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 = 1$, оттуда $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2$.

Точно также найдемъ;

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y\, \partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Подобныя же формулы найдемъ для производныхъ по другимъ координатамъ.

Для вычисленія упругихъ силъ, происходящихъ отъ объемныхъ перемѣщеній (§ 4), составимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x},\; \frac{\partial u}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2\varepsilon\,d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{\varepsilon\,d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-\frac{2k_1\,d\tau_1}{r^3}\,l\,\frac{\partial r}{\partial x}\sin(rk_1)+$$

$$+\frac{k_1\,d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\,\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{k_1\,d\tau_1}{r^2}\,l\,\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial x}\qquad\text{(a)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\varepsilon\,d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\varepsilon\,d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}-\frac{2k_1\,d\tau_1}{r^3}\,l\,\frac{\partial r}{\partial y}\sin(rk_1)+$$

$$+\frac{k_1\,d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\,\frac{\partial l}{\partial y}+\frac{k_1\,d\tau_1}{r^2}\,l\,\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial y}\qquad\text{(b)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2\varepsilon\,d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\varepsilon\,d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}-\frac{2k_1\,d\tau_1}{r^3}\,m\,\frac{\partial r}{\partial x}\sin(rk_1)+$$

$$+\frac{k_1\,d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\,\frac{\partial m}{\partial x}+\frac{k_1\,d\tau_1}{r^2}\,m\,\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial x}.\qquad\text{(c)}$$

Складывая послѣднія двѣ формулы, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{2\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}-\frac{2k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)$$

$$\left(l\frac{\partial r}{\partial y}+m\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\left(\frac{\partial l}{\partial y}+\frac{\partial m}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(l\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial y}+m\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial x}\right).$$

Но по формуламъ § 4 для l, m, n находимъ:

$$l\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial y}+\sin(rk_1)\,\frac{\partial l}{\partial y}=-\frac{b}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{c}{r}+\frac{c}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2,$$

$$m\,\frac{\partial\sin(rk_1)}{\partial x}+\sin(rk_1)\,\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{c}{r}-\frac{c}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{a}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Складывая эти послѣднія формулы и подставляя ихъ сумму въ послѣдніе два члена въ скобкахъ въ выраженіи для величины $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$, найдемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{6\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\left(l\frac{\partial r}{\partial y}+m\frac{\partial r}{\partial x}\right) \tag{1}$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{6\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\left(l\frac{\partial r}{\partial z}+n\frac{\partial r}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{6\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\left(m\frac{\partial r}{\partial z}+n\frac{\partial r}{\partial y}\right)\;. \tag{3}$$

Далѣе (a) даетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^3}+\frac{3\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\,l\frac{\partial r}{\partial x} \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^3}+\frac{3\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\,m\frac{\partial r}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^3}+\frac{3\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\,n\frac{\partial r}{\partial z} \tag{6}$$

или, введя перемѣщенія s и q вдоль r и q, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{s}{r}-\frac{3s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{3q}{r}\,l\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{s}{r}-\frac{3s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2-\frac{3q}{r}\,m\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{s}{r}-\frac{3s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2-\frac{3q}{r}\,n\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Теперь для упругихъ силъ имѣемъ выраженія:

$$p_{xx}=\frac{2\mu s}{r}\quad\frac{6\mu s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{6\mu q}{r}\,l\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$p_{yy}=\frac{2\mu s}{r}-\frac{6\mu s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2-\frac{6\mu q}{r}\,m\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$p_{zz}=\frac{2\mu s}{r}-\frac{6\mu s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2-\frac{6\mu q}{r}\,n\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$p_{xy} = -\frac{6\mu s}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dy} - \frac{3\mu q}{r}\left(l\frac{dr}{dy} + m\frac{dr}{dx}\right)$$

$$p_{xz} = -\frac{6\mu s}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu q}{r}\left(l\frac{dr}{dz} + n\frac{dr}{dx}\right)$$

$$p_{yz} = -\frac{6\mu s}{r}\frac{dr}{dy}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu q}{r}\left(m\frac{dr}{dz} + n\frac{dr}{dy}\right).$$

Если введемъ сюда значенія u, v, w изъ § 4, формула (a), то выраженія для упругихъ силъ упростятся и примутъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= \frac{2\mu s}{r} - \frac{6\mu u}{r}\frac{dr}{dx}, & p_{xy} &= -\frac{3\mu u}{r}\frac{dr}{dy} - \frac{3\mu v}{r}\frac{dr}{dx} \\
p_{yy} &= \frac{2\mu s}{r} - \frac{6\mu v}{r}\frac{dr}{dy}, & p_{xz} &= -\frac{3\mu u}{r}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu w}{r}\frac{dr}{dx} \\
p_{zz} &= \frac{2\mu s}{r} - \frac{6\mu w}{r}\frac{dr}{dz}, & p_{yz} &= -\frac{3\mu v}{r}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu w}{r}\frac{dr}{dy}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

7.

Чтобы удобнѣе было изслѣдовать распредѣленіе натяженій въ нашей средѣ, опредѣлимъ упругія силы вдоль новыхъ ортогональныхъ направленій r, q и p. Для этого по извѣстнымъ формуламъ теоріи упругости составимъ сначала p_{rx}, p_{ry}, ... p_{qx}, ... и затѣмъ уже p_{rr}, p_{rq} и т. п.

Имѣемъ:

$$p_{rx} = p_{xx}\frac{dr}{dx} + p_{xy}\frac{dr}{dy} + p_{xz}\frac{dr}{dz};$$

подставляя сюда значенія p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} изъ предыдущаго параграфа, найдемъ по приведеніи:

$$p_{rx} = -\frac{3\mu u}{r} - \frac{\mu s}{r}\frac{dr}{dx}.$$

Точно также найдемъ:

$$p_{ry} = -\frac{3\mu v}{r} - \frac{\mu s}{r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$p_{rz} = -\frac{3\mu w}{r} - \frac{\mu s}{r}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Отсюда найдемъ

$$p_{rr} = p_{rx}\frac{\partial r}{\partial x} + p_{ry}\frac{\partial r}{\partial y} + p_{rz}\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{4\mu s}{r}.$$

И такъ, упругая сила вдоль r будетъ:

$$p_{rr} = -\frac{4\mu s}{r}. \tag{1}$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$p_{qx} = \frac{2\mu s}{r}\,l - \frac{3\mu q}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$p_{qy} = \frac{2\mu s}{r}\,m - \frac{3\mu q}{r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$p_{qz} = \frac{2\mu s}{r}\,n - \frac{3\mu q}{r}\frac{\partial r}{\partial z};$$

а отсюда

$$p_{qq} = \frac{2\mu s}{r}. \tag{2}$$

Далѣе:

$$p_{px} = \frac{2\mu s}{r}\,\xi\,,\ p_{py} = \frac{2\mu s}{r}\,\eta\,,\ p_{pz} = \frac{2\mu s}{r}\,\zeta;$$

слѣдовательно:

$$p_{pp} = \frac{2\mu s}{r}. \tag{3}$$

Затѣмъ:

$$p_{rq} = -\frac{3\mu q}{r} \quad (4)$$

$$p_{rp} = p_{pq} = 0. \quad (5)$$

Изъ формулъ (1)—(5) заключаемъ, что въ срединѣ около точки M существуютъ слѣдующія силы: 1) сила давленій (т. е. сила нормальная къ плоскому элементу въ M), одинаковыхъ по всѣмъ направленіямъ и равная

$$\frac{2\mu s}{r};$$

2) сила боковыхъ натяженій вдоль q перпендикулярно къ r; эта сила равна:

$$-\frac{3\mu q}{r}$$

и 3) сила давленій спеціальнаго характера; направленная вдоль r и равная

$$-\frac{6\mu s}{r}.$$

Подобные-же результаты найдены Максуэллемъ (§ 642, 2-го тома его трактата по электричеству и магнетизму) при помощи другихъ соображеній.

8.

Прежде чѣмъ примѣнить предыдущія формулы къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, разсмотримъ условія на поверхности. Называя P давленіе на единицу поверхности нормальное къ ней, по извѣстнымъ формуламъ теоріи упругости находимъ, при помощи формулы I, § 6.

$$P\cos(Px) = -\frac{3\mu u}{r}\cos(nr) - \frac{3\mu u_n}{r}\ \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2\mu s}{r}\cos(nx)$$

$$P\cos(Py) = -\frac{2\mu v}{r}\cos(nr) - \frac{3\mu u_n}{r}\ \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{2\mu s}{r}\cos(ny)$$

$$P\cos(Px) = -\frac{3\mu w}{r}\cos(nr) - \frac{3\mu u_n}{r}\ \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{2\mu s}{r}\cos(nz)$$

гдѣ $$u_n = u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)$$

есть проэкція перемѣщенія вдоль нормала къ поверхности, ограничивающей объемъ точекъ M.

9.

Займемся теперь нѣкоторыми выводами изъ предыдущихъ формулъ—выводами, представляющими извѣстный интересъ. Найдемъ работу силы P вдоль нѣкотораго направленія s; для этого умножимъ уравненія послѣдняго параграфа на $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ и результаты сложимъ, тогда:

$$Pds\cos(Pds) = \frac{6\,\mu\varepsilon\,d\tau_1}{r^3}\cos(nr)\cos(rs)\,ds -$$

$$-\frac{3\,\mu k_1\sin(nk_1)\,d\tau_1}{r^3}\cos(rp)\cos(rs)\,ds - \frac{2\,\mu\varepsilon\,d\tau_1}{r^3}\cos(ns)\,ds -$$

$$-\frac{3\,\mu k_1\,d\tau_1}{r^3}\cos(nr)\sin(rs)\cos(kp)\,;$$

здѣсь p есть перпендикуляръ къ плоскости k_1 и n.

Полагая въ послѣдней формулѣ $s=r$, интегрируя вдоль r отъ $r=\infty$ до $r=r$ и полагая

$$R = \int_\infty^r Pdr\cos(Pdr)\,,$$ имѣемъ:

$$R = \frac{2\mu d\tau_1}{r^2}\left(\frac{3}{2}k_1\cos(rp)\sin(nk_1) - \varepsilon\cos(nr)\right)$$

Положимъ здѣсь: $rp = \theta'$, $nk_1 = 90^\circ - \theta$, $nr = \delta$, тогда

$$R = -\frac{2\mu d\tau_1}{r^2}\left\{\varepsilon\cos\delta - \frac{3}{2}k_1\cos\theta\cos\theta'\right\}$$

и если въ частномъ случаѣ $\varepsilon = k_1$, то

$$R = -\frac{2\mu k_1 d\tau_1}{r^2}\left\{\cos\delta - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right\}.$$

Это выраженіе весьма любопытно по своему сходству съ извѣстною электродинамическою формулой Ампэра.

10.

Примѣнимъ формулы § 4 къ случаю крайне-тонкаго цилиндра съ какою-нибудь образующей. Разобьемъ его на нѣкоторыя прямолинейныя части $M_1\,M$, ограниченныя плоскостями (1) и (2). Пусть

точка M_1 лежитъ на основаніи (1), а — M на основаніи (2) и предположимъ, что ось вращенія k_1 совпадаетъ съ r; тогда

$$u = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dx},\ v = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dy},\ w = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dz}$$

Примемъ r за ось x и положимъ, что

$$d\tau_1 = d\sigma_1\, dr,$$

гдѣ $d\sigma_1$ есть элементъ основанія (1); тогда

$$u = -\frac{\varepsilon d\sigma_1 dr}{r^2},\ v = 0,\ w = 0$$

Предполагая, что объемъ Ω распространяется отъ (1) влѣво до безконечности, найдемъ, интегрируя u по r отъ ∞ до r, равнодѣйствующее перемѣщеніе въ M:

$$U' = \frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}$$

Предполагая цилиндръ крайне тонкимъ, найдемъ по интегрированіи по σ_1 (пренебрегая по этому измѣненіями въ направленіи r)

$$U = \frac{\varepsilon\,\sigma}{r},$$

гдѣ σ будетъ площадь всего сѣченія цилиндра въ M_1. Положимъ:

$$\frac{r}{\sigma} = \gamma,$$

тогда

$$U = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

Послѣднія двѣ формулы показываютъ, что перемѣщеніе въ M 1) пропорціонально нѣкоторому количеству ε, характеризующему точку M_1, и 2) обратно пропорціонально другому количеству γ, которое само измѣняется прямо пропорціонально длинѣ r и обратно — площади сѣченія σ. Замѣчаемъ, слѣдовательно, что U измѣняется подобно силѣ электрическаго тока въ M, причемъ ε будетъ соотвѣтствовать такъ называемой электровозбудительной силѣ, а γ — сопротивленію.

11.

Сдѣлаемъ третье и послѣднее примѣненіе нашихъ формулъ.

Въ § 7 найдено, что во всякой точкѣ M среды существуетъ, сверхъ давленія равнаго по всѣмъ направленіямъ, еще боковое натяженіе и давленіе вдоль r. Предположимъ, что k_1 совпадаетъ по направленію съ r, тогда $q=0$, т. е. боковое натяженіе исчезнетъ и остаются только давленіе одинаковое по всѣмъ направленіямъ и еще особое вдоль r. Это послѣднее равно

$$-\frac{6\mu s}{r}$$

или, подставляя сюда значеніе s изъ § 4,

$$-\frac{6\mu\varepsilon d\tau_1}{r^3}.$$

Положимъ здѣсь $d\tau_1 = d\sigma_1\, dr$, гдѣ $d\sigma_1$ элементъ площади, тогда наше давленіе будетъ

$$3\mu\varepsilon d\sigma_1 d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Интегрируя это выраженіе вдоль r отъ $r=\infty$ до $r=r$, найдемъ

$$\frac{3\mu\varepsilon d\sigma_1}{r^2}.$$

И такъ, дѣйствіе (давленія) безконечно длиннаго цилиндра на точку M, лежащую на разстояніи r отъ его конца вдоль r (она же и ось цилиндра), измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія r. Такимъ образомъ эта сила измѣняется подобно силѣ всемірнаго тяготѣнія.

ковое натяженіе и давленіе вдоль r. Предположимъ, что r_1 совпадаетъ по направленію съ r, тогда $\varphi = 0$, т. е. боковое натяженіе исчезнетъ и остается только давленіе одинаковое по всѣмъ направленіямъ и еще особое вдоль r. Это послѣднее равно

$$\frac{6\mu s}{r}$$

или, подставляя сюда значеніе изъ § 4,

$$\frac{6\mu e d\tau_1}{r^4}.$$

Положимъ здѣсь $d\tau_1 = d\sigma_1\, dr$, гдѣ $d\sigma_1$ элементъ площади, тогда наше давленіе будетъ

$$3\mu e d\sigma_1\, d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Интегрируя это выраженіе вдоль r отъ $r = \infty$ до $r = r_1$, найдемъ

$$\frac{3\mu e d\sigma_1}{r_1^2}.$$

Итакъ, дѣйствіе (давленіе) безконечно длиннаго цилиндра на точку M, лежащую на разстояніи r отъ его конца вдоль r (она же и ось цилиндра), измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія r. Такимъ образомъ эта сила измѣняется подобно силѣ всемірнаго тяготѣнія.

О МНОГОУГОЛЬНИКАХЪ ПОНСЕЛЕ.

(Статья вторая).

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ предыдущей статьѣ мы ограничили наши разсужденія случаемъ лишь треугольниковъ и сверхъ того устранили изъ разсмотрѣнія тотъ случай, когда два данныя коническія сѣченія, относительно которыхъ многоугольники суть вписанные и описанные, имѣютъ двойное соприкосновеніе. Послѣдній случай доступенъ болѣе простому, такъ сказать, непосредственному изслѣдованію, и потому мы разсмотримъ его особо въ заключеніе настоящей статьи, цѣль которой есть распространеніе изложеннаго въ предыдущей на многоугольники съ какимъ угодно числомъ сторонъ.

Пусть, какъ и прежде, S и T будутъ два данныя коническія сѣченія и g точка, взятая какъ нибудь на первомъ изъ нихъ, которую, однако, будемъ предполагать на первое время лежащею внѣ коническаго сѣченія T (фиг. 5-я). Проведя изъ g двѣ касательныя къ T и соединивъ прямою точки a_1 и a_2 ихъ вторичнаго пересѣченія съ S, получимъ треугольникъ $a_1 g a_2$, вписанный въ S и имѣющій стороны, за исключеніемъ одной $a_1 a_2$, касательными къ T. Эту сторону $a_1 a_2$ мы назвали вообще *прямою противолежащею точкѣ* g относительно коническаго сѣченія T.

Изъ точекъ a_1 и a_2 можно провести вторыя касательныя къ T. Построивъ эти касательныя и назвавъ чрезъ α точку ихъ пересѣченія, получимъ четыреугольникъ $\alpha a_1 g a_2$ описанный около T и имѣющій всѣ вершины, исключая одной α, противоположной вершинѣ g, на коническомъ сѣченіи S. Вершину α такого четыреугольника, противоположную вершинѣ g, мы будемъ называть вообще *точкою противолежащею точкѣ* g относительно T.

Если назовемъ буквами b_1 и b_2 точки, въ которыхъ прямыя $a_1\alpha$ и $a_2\alpha$ пересѣкаютъ вторично коническое сѣченіе S, и соединимъ эти двѣ точки прямою, то получимъ пятиугольникъ $b_1 a_1 g a_2 b_2$, вписанный въ S и имѣющій всѣ стороны, за исключеніемъ одной $b_1 b_2$, противоположной вершинѣ g, касательными къ T. Эту сторону $b_1 b_2$ такого пятиугольника мы будемъ вообще называть *второю противолежащею прямою данной точки* g, разумѣя, слѣдовательно, подъ первою противолежащею прямой прямую $a_1 a_2$.

Проведя чрезъ b_1 и b_2 вторыя касательныя къ T и обозначивъ чрезъ β точку ихъ пересѣченія, получимъ шестиугольникъ, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, исключая одной β, противоположной вершинѣ g, на коническомъ сѣченіи S. Вершину β этого шестиугольника будемъ вообще называть *второю противолежащею точкою данной точки* g.

Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ для точки g безпредѣльный рядъ послѣдовательныхъ противолежащихъ прямыхъ и противолежащихъ точекъ. Въ этомъ рядѣ прямыя и точки чередуются между собою, такъ что для каждой противолежащей точки существуютъ двѣ *смежныя* противолежащія прямыя, изъ которыхъ одна ей непосредственно предшествуетъ, а другая за ней непосредственно слѣдуетъ. Точно также и для каждой противолежащей прямой имѣются двѣ *смежныя* противолежащія точки.

Для первой противолежащей прямой одна изъ двухъ смежныхъ противолежащихъ точекъ (предшествующая) есть сама данная точка g, которую по этому можно называть своею нулевою противолежащею точкой.

Если случится, что n-ая противолежащая точка будетъ лежать на коническомъ сѣченіи S, то слѣдующая ($n+1$-я) противолежащая прямая будетъ касательною къ S въ этой точкѣ. Всѣ же дальнѣйшія противолежащія точки и прямыя будутъ совпадать съ предыдущими, но только въ обратной послѣдовательности, такъ что $2n+1$-я противолежащая точка будетъ совпадать съ данною точкой g.

Точно также, если n-ая противолежащая прямая есть касательная къ T, то слѣдующая (n-ая) противолежащая точка будетъ точкою прикосновенія этой касательной. Всѣ же дальнѣйшія противолежащія прямыя и точки будутъ совпадать съ предыдущими, но только въ обратномъ порядкѣ, такъ что $2n$-ая противолежащая точка совпадетъ съ g.

§ 2.

Предыдущее построеніе послѣдовательныхъ противолежащихъ прямыхъ и точекъ не выполнимо въ томъ случаѣ, когда данная точка g находится внутри коническаго сѣченія T и когда, слѣдовательно, касательныя изъ g къ этому коническому сѣченію не существуютъ. Мы уже знаемъ, однако, что первая противолежащая прямая существуетъ при всякомъ положеніи g на коническомъ сѣченіи S. Постараемся убѣдиться въ томъ же и для всѣхъ слѣдующихъ противолежащихъ прямыхъ и точекъ.

Положимъ, что μ есть какая-нибудь противолежащая точка (фиг. 6-я), а $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ двѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя. По свойству четыреугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, заключаемъ, что поляра точки μ относительно S проходитъ чрезъ точку p пересѣченія противолежащихъ прямыхъ $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ и есть въ то-же время поляра той-же точки относительно совокупности этихъ прямыхъ, разсматриваемой какъ одно коническое сѣченіе. Построивъ эту поляру pq и соединивъ прямою линіей точки μ и p, будемъ имѣть по этому, что четыре прямыя $p\mu$, pm_1, pq, pn_1 составляютъ гармоническую группу лучей. Отсюда слѣдуетъ, что, зная положеніе противолежащей точки μ и одной изъ смежныхъ съ нею противолежащихъ прямыхъ, мы можемъ построить другую изъ этихъ прямыхъ какъ четвертый гармоническій лучъ къ тремъ лучамъ пучка уже извѣстнымъ.

Построеніе это выполнимо при всякомъ положеніи точки μ, независимо отъ существованія касательныхъ къ T изъ этой точки. Оно убѣждаетъ насъ въ существованіи какой бы ни было противолежащей прямой при условіи, что существуютъ всѣ противолежащія прямыя и точки ей предшествующія, и можетъ быть принято за общее геометрическое опредѣленіе противолежащихъ прямыхъ.

Положимъ теперь, что $n_1 n_2$ есть какая-нибудь противолежащая прямая (та-же фиг.), а μ и ν двѣ смежныя съ нею противолежащія точки. По свойству четыреугольника, описаннаго около коническаго сѣченія, полюсъ прямой $n_1 n_2$ относительно T долженъ лежать на прямой $\mu\nu$ и быть въ то-же время полюсомъ этой прямой относительно совокупности точекъ μ и ν, разсматриваемой какъ одно коническое сѣченіе. Обозначая чрезъ ρ этотъ полюсъ, а чрезъ φ точку пересѣченія прямыхъ $n_1 n_2$ и $\mu\nu$, будемъ имѣть поэтому, что четыре точки μ, φ, ν, ρ составляютъ гармоническую группу. Отсюда слѣдуетъ, что, имѣя противолежащую прямую $n_1 n_2$ и одну изъ смежныхъ съ нею противолежащихъ точекъ, мы можемъ найдти другую построеніемъ четвертой гармонической къ тремъ извѣстнымъ уже точкамъ ряда.

Построеніе это, какъ выполнимое при всякомъ положеніи данныхъ противолежащихъ, убѣждаетъ насъ въ существованіи какой бы ни было противолежащей точки при условіи, что всѣ предыдущія противолежащія прямыя и точки существуютъ. Оно можетъ быть разсматриваемо какъ общее геометрическое опредѣленіе противолежащихъ точекъ.

Такъ-какъ существованіе первой противолежащей прямой уже доказано въ предыдущей статьѣ и такъ-какъ сама данная точка g есть предшествующая этой прямой противолежащая точка (нулевая), то сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ достаточно, чтобы убѣдиться, что всѣ противолежащія прямыя и точки существуютъ при всякомъ положеніи точки g на коническомъ сѣченіи S.

Въ виду указанной выше цѣли настоящей статьи намъ предстоитъ рѣшить вопросъ: какимъ образомъ перемѣщается каждая изъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ, когда данная точка g перемѣщается по коническому сѣченію S?

§ 3.

Обратимся опять къ разсмотрѣнію какой-нибудь противолежащей точки μ и двухъ смежныхъ съ нею противолежащихъ прямыхъ $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ (фиг. 6-я).

Коническое сѣченіе S и совокупность двухъ прямыхъ $m_1 m_2$ и $n_1 n_2$ имѣютъ общій полярный треугольникъ $p\mu q$, который будетъ таковымъ же и для совокупности двухъ прямыхъ μn_1 и μn_2 (случайныхъ), какъ для коническаго сѣченія, принадлежащаго тому-же пучку. Но послѣднія двѣ прямыя должны быть касательными къ T, а потому прямыя μp и μq, дѣлящія ихъ гармонически, должны быть сопряженными относительно T.

Отсюда слѣдуетъ, что, построивъ поляру точки μ относительно T и назвавъ буквами r и s точки ея пересѣченія съ прямыми μq и μp, будемъ имѣть, что r есть полюсъ прямой μp

относительно T. Такъ-какъ въ то-же время μr есть поляра точки p относительно S, то заключаемъ, что точки p и r суть сопряженныя между собою относительно каждаго изъ коническихъ сѣченій S и T, а слѣдовательно и относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). Прямая rs будетъ поэтому полярою точки p относительно нѣкотораго коническаго сѣченія V, принадлежащаго пучку (ST).

Назовемъ буквами e и f точки пересѣченія прямой rs съ прямыми m_1p и n_1p и пусть ε будетъ точка, въ которой поляра точки e относительно T встрѣчаетъ прямую m_1p. Такъ какъ поляра точки e относительно совокупности прямыхъ μn_1 и μn_2 есть та-же, что и относительно T, а поляра той-же точки относительно совокупности прямыхъ m_1p и n_1p есть прямая m_1p, то точка ε пересѣченія этихъ поляръ есть сопряженная съ e относительно каждой изъ этихъ двухъ совокупностей, а съ тѣмъ вмѣстѣ и относительно коническаго сѣченія S, принадлежащаго съ ними къ одному и тому-же пучку. Слѣдовательно, точки e и ε, будучи сопряженными между собою относительно T и S, должны быть таковыми же относительно всѣхъ прочихъ кривыхъ пучка (ST), а въ томъ числѣ и коническаго сѣченія V.

Точка ε, очевидно, не можетъ совпадать съ p, потому что въ противномъ случаѣ точки e и r имѣли бы по отношенію къ T одну и ту-же поляру μp, что возможно только тогда, когда T есть совокупность двухъ прямыхъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что коническое сѣченіе V, принадлежащее пучку (ST) и имѣющее прямую rs полярою точки p, проходитъ чрезъ e и касается въ этой точкѣ прямой m_1p. Въ самомъ дѣлѣ, поляра точки e относительно V должна проходить чрезъ точки p и ε, различныя между собою и сопряженныя съ e относительно этой кривой; слѣдовательно, эта поляра есть прямая m_1p и, такъ-какъ она проходитъ чрезъ свой полюсъ e, то должна касаться V въ этой точкѣ.

Точно также легко убѣдиться, что прямая n_1p касается коническаго сѣченія V въ точкѣ f. Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію.

Поляра всякой противолежащей точки относительно коническаго сѣченія T встрѣчаетъ двѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя въ точкахъ, въ которыхъ обѣ эти прямыя касаются одного и того-же коническаго сѣченія пучка (ST).

Если мы будемъ разсматривать какую нибудь противолежащую прямую и двѣ смежныя съ нею противолежащія точки, и приложимъ къ нимъ разсужденія аналогичныя съ предыдущими и составляющія, собственно говоря, преобразованіе вышеизложеннаго по принципу двойственности или методу взаимныхъ поляръ, то получимъ въ результатѣ слѣдующій, подобный предыдущему, выводъ.

Прямыя, соединяющія полюсъ какой нибудь противолежащей прямой относительно S съ двумя смежными съ нею противолежащими точками, касаются въ этихъ точкахъ одного и того-же коническаго сѣченія системы $[ST]$ [1].

§ 4.

Точка f, находящаяся при пересѣченіи прямыхъ rs и n_1p, имѣетъ полярою относительно T прямую $\mu\rho$, соединяющую полюсы μ и ρ этихъ прямыхъ (фиг. 6-я). Такъ какъ на этой же прямой $\mu\rho$ должна лежать, какъ мы видѣли, и точка ν, другая противолежащая точка смежная съ противолежащей прямой n_1p, то поляра точки ν относительно T должна также проходить черезъ f. Противолежащая прямая n_1p пересѣкается, слѣдователь-

[1] Системою $[ST]$ мы будемъ называть, какъ и въ предыдущей статьѣ, систему взаимную съ пучкомъ, т. е. состоящую изъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ съ S и T общія касательныя.

но, полярами обѣихъ смежныхъ съ нею противолежащихъ точекъ μ и ν относительно T въ одной и той же точкѣ f. Изъ этого заключаемъ, на основаніи перваго изъ предложеній предыдущаго параграфа, что, какъ обѣ противолежащія прямыя смежныя съ точкою μ, такъ и обѣ противолежащія прямыя смежныя съ слѣдующею противолежащею точкой ν касаются одного и того же коническаго сѣченія V пучка (ST).

Имѣя въ виду, что сказанное относится къ какимъ бы то ни было послѣдовательнымъ противолежащимъ прямымъ, мы убѣждаемся, что *всѣ противолежащія прямыя какой либо точки g коническаго сѣченія S относительно коническаго сѣченія T суть касательныя къ одному и тому же коническому сѣченію V пучка (ST).*

Это коническое сѣченіе V опредѣляется, какъ мы видѣли въ предыдущей статьѣ, принадлежащею ему точкою h, сопряженною съ g относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST).

Разсужденія взаимныя съ предыдущими и опирающіяся на второе предложеніе предыдущаго параграфа, должны, очевидно, привести къ подобному же заключенію относительно противолежащихъ точекъ; именно:

Всѣ противолежащія точки какой либо точки g коническаго сѣченія S относительно T лежатъ на одномъ и томъ же коническомъ сѣченіи системы $[ST]$.

Это коническое сѣченіе, которое будемъ обозначать черезъ W, проходитъ, очевидно, черезъ g (какъ одну изъ противолежащихъ точекъ) и опредѣляется вполнѣ касающеюся его прямою, сопряженною относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$ съ касательною къ S въ точкѣ g.

Назовемъ чрезъ W' взаимную поляру коническаго сѣченія W относительно T. Поляры послѣдовательныхъ противолежащихъ точекъ относительно T, будучи касательными къ W', пересѣкаются, какъ показано выше, въ точкахъ прикосновенія коническаго сѣченія V съ противолежащими прямыми. Слѣдовательно, эти поляры составляютъ ломаную линію, вписанную въ коническое сѣченіе V и описанную около W'. Касательныя къ V въ вершинахъ угловъ этой ломаной суть противолежащія прямыя, а полюсы сторонъ ея относительно T — противолежащія точки. Такимъ образомъ получается другой способъ построенія противолежащихъ точекъ и прямыхъ для данной точки g коническаго сѣченія S.

Если назовемъ черезъ V' взаимную поляру коническаго сѣченія V относительно S, то, замѣчая, что полюсы двухъ послѣдовательныхъ противолежащихъ прямыхъ относительно S лежатъ на прямой, проходящей чрезъ промежуточную противолежащую точку и касающейся въ ней къ W, убѣждаемся, что всѣ эти полюсы суть вершины угловъ другой ломаной линіи, вписанной въ V' и описанной около W. Этою ломаною можно также пользоваться для построенія противолежащихъ, такъ какъ точки прикосновенія ея сторонъ съ коническимъ сѣченіемъ W суть противолежащія точки, а поляры ея вершинъ относительно S—противолежащія прямыя.

§ 5.

Задача. *Даны два коническія сѣченія S и T; предполагая, что извѣстна нѣкоторая противолежащая точка μ, найдти обѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя.*

На основаніи сказаннаго выше (§ 3), для рѣшенія этой задачи нужно только найдти точку p пересѣченія искомыхъ противолежащихъ прямыхъ (фиг. 6-я), ибо когда эта точка найдена, то вопросъ сводится на построеніе проходящихъ чрезъ нее касательныхъ къ вполнѣ опредѣленному коническому сѣченію V, относительно котораго поляра точки p есть та же прямая ef, какъ и поляра данной точки μ относительно T.

Точка p находится при пересѣченіи поляры pq данной точки μ относительно S съ прямою μp, которая есть одна изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно S и T, а слѣдовательно и относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$. Другая изъ этихъ прямыхъ есть μq, на которой лежатъ полюсы q и r первой относительно S и T.

Отсюда слѣдуетъ, что предложенная задача имѣетъ два рѣшенія, которыя получаются слѣдующимъ построеніемъ.

Сперва чрезъ данную точку μ проводимъ двѣ прямыя сопряженныя между собою относительно обоихъ коническихъ сѣченій S и T и находимъ точки p и q пересѣченія этихъ прямыхъ съ полярою данной точки μ относительно S. Построивъ затѣмъ поляру ef точки μ относительно T, мы опредѣлимъ два коническія сѣченія пучка (ST), изъ которыхъ одно имѣетъ полюсомъ этой прямой точку p, а другое — точку q. Касательныя изъ p къ первому изъ этихъ коническихъ сѣченій будутъ представлять одно рѣшеніе задачи, а касательныя изъ q ко второму — другое.

Такимъ образомъ мы видимъ, что произвольно взятой противолежащей точкѣ μ соотвѣтствуютъ по отношенію къ кривымъ S и T двѣ пары смежныхъ противолежащихъ прямыхъ, которыя при томъ же суть случайныя, т. е. могущія при нѣкоторыхъ положеніяхъ данной точки μ вовсе не существовать. Если же, однако, одна изъ двухъ смежныхъ съ μ противолежащихъ прямыхъ извѣстна напередъ и требуется найдти другую, то во первыхъ эта послѣдняя непремѣнно существуетъ, а во вторыхъ другое рѣшеніе разсматриваемой задачи совершенно устраняется, какъ не относящееся непосредственно къ вопросу.

Задача. *Даны два коническія сѣченія* S и T; *предполагая, что извѣстна нѣкоторая противолежащая прямая, найдти обѣ смежныя съ нею противолежащія точки.*

Будучи взаимною съ предыдущей, задача эта имѣетъ также два рѣшенія, которыя на такихъ же основаніяхъ, какъ указанныя выше, получаются слѣдующимъ построеніемъ (та же фиг.).

Сперва находимъ на данной прямой $\pi_1\rho$ двѣ точки φ и f, сопряженныя между собою относительно обоихъ коническихъ сѣченій S и T, и соединяемъ ихъ прямыми съ полюсомъ ρ данной прямой относительно T. Найдя затѣмъ полюсъ той же прямой относительно S, мы опредѣлимъ два коническія сѣченія системы $[ST]$, изъ которыхъ одно будетъ имѣть эту точку полюсомъ прямой $\varphi\rho$, а другое — полюсомъ прямой $f\rho$. Точки μ и ν пересѣченія перваго изъ этихъ коническихъ сѣченій съ прямою $\varphi\rho$ представятъ одно рѣшеніе предложенной задачи; точки же пересѣченія втораго съ прямою $f\rho$ — другое.

Замѣчаніе, сдѣланное выше о рѣшеніяхъ предыдущей задачи, примѣняется, очевидно, соотвѣтственнымъ образомъ и къ настоящей.

§ 6.

Приступаемъ теперь къ вопросу, поставленному въ концѣ 2-го параграфа. Отвѣтъ на этотъ вопросъ, данный нами въ предыдущей статьѣ лишь для первой противолежащей прямой, во всей своей общности выражается слѣдующимъ предложеніемъ.

При перемѣщеніи точки g по коническому сѣченію S каждая ея противолежащая прямая относительно коническаго сѣченія T огибаетъ коническое сѣченіе, принадлежащее пучку (ST), а каждая противолежащая точка перемѣщается по коническому сѣченію, принадлежащему системѣ $[ST]$.

Для того, чтобы убѣдиться въ полной справедливости этого предложенія нужно только доказать его для какой нибудь противолежащей прямой въ предположеніи, что оно справедливо для предыдущихъ противолежащихъ точки и прямой, а также для какой нибудь противолежащей точки въ предположеніи, что оно имѣетъ мѣсто для предыдущихъ противолежащихъ прямой и точки. Въ самомъ дѣлѣ, справедливость предложенія для первой противолежащей прямой нами уже доказана, а для предшествующей ей противолежащей точки, которая есть сама точка g, она очевидна сама собою. Слѣдовательно, такое доказательство, какъ указанное, позволяетъ намъ прежде всего заключить, что предложеніе справедливо для первой противолежащей точки, затѣмъ для второй противолежащей прямой, затѣмъ для второй противолежащей точки, и т. д.

Кромѣ того, изъ двухъ частей указаннаго сейчасъ плана доказательства, очевидно, достаточно привести только одну, относящуюся, напримѣръ, къ перемѣщенію противолежащей прямой. Обѣ эти части, будучи взаимными, представляютъ въ сущности два ряда равнозначущихъ доводовъ, вслѣдствіе чего при полной убѣдительности одной изъ нихъ не можетъ быть сомнѣнія въ справедливости доказываемаго другою.

И такъ, положимъ, что намъ извѣстно, что какая нибудь противолежащая точка μ, при перемѣщеніи точки g по S, перемѣщается по нѣкоторому коническому сѣченію системы $[ST]$ и что въ то же время предшествующая ей противолежащая прямая перемѣщается, огибая коническое сѣченіе пучка (ST). Постараемся убѣдиться, что и слѣдующая, т. е. другая смежная съ точкою μ, противолежащая прямая огибаетъ коническое сѣченіе пучка (ST).

Пусть C будетъ коническое сѣченіе, описываемое точкой μ, и D его взаимная поляра относительно T. Коническія сѣченія S, T, C, D, какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 5 предыдущей статьи, имѣютъ общій полярный треугольникъ, а потому, какъ показано въ § 6 той же статьи, въ пучкѣ (ST) можно найдти два такія коническія сѣченія X и Y, что взаимныя поляры E и F кривой D относительно этихъ коническихъ сѣченій будутъ принадлежать также пучку (ST). Вообще говоря, коническія сѣченія E и F суть случайныя, могущія не существовать, но мы увидимъ вскорѣ, что сдѣланное выше предположеніе требуетъ существованія одного изъ нихъ и тѣмъ обусловливаетъ существованіе другаго.

Между точками кривыхъ C, E и F имѣетъ мѣсто проективное соотвѣтствіе, такъ какъ онѣ суть полюсы относительно T, X и Y касательныхъ къ одному и тому же коническому сѣченію D.

Вообразимъ точку μ въ какомъ нибудь опредѣленномъ положеніи на коническомъ сѣченіи C (фиг. 7-я) и пусть ε и φ будутъ соотвѣтственныя ей точки кривыхъ E и F, а r точка прикосновенія къ D ихъ общей поляры ef относительно X и Y. Назовемъ далѣе черезъ p точку пересѣченія касательныхъ въ ε и φ къ коническимъ сѣченіямъ E и F и постараемся доказать, что эти двѣ касательныя суть двѣ противолежащія прямыя смежныя съ противолежащей точкой μ.

Для этого, основываясь на сказанномъ въ параграфахъ 5-мъ и 3-мъ, нужно во первыхъ показать, что точка p находится при пересѣченіи поляры точки μ относительно S съ одною изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$. Во вторыхъ же нужно убѣдиться, что касательныя къ E и F въ точкахъ ε и φ суть въ то-же время касательныя изъ точки p къ коническому сѣченію, принадлежащему пучку (ST) и имѣющему полярою точки p прямую ef, т. е. поляру точки μ относительно T. Слѣдующія разсужденія выяснятъ оба эти пункта въ отдѣльности.

§ 7.

1) Касательныя въ точкахъ μ, ε и φ къ коническимъ сѣченіямъ C, E и F суть поляры одной и той же точки r относительно трехъ коническихъ сѣченій T, X и Y, принадлежа-

щихъ пучку (ST); вслѣдствіе этого онѣ должны проходить чрезъ одну и ту же точку p, сопряженную съ r относительно всѣхъ кривыхъ этого пучка. Такъ какъ μ и r суть полюсы прямой μp относительно двухъ коническихъ сѣченій C и T системы $[ST]$, то на прямой μr находятся полюсы прямой μp относительно всѣхъ коническихъ сѣченій этой системы. Другими словами, прямыя μp и μr суть сопряженныя между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$.

Полюсъ прямой μp относительно S есть нѣкоторая точка q, лежащая на прямой μr и не совпадающая съ r, полюсомъ той же прямой относительно T. Отсюда заключаемъ, что поляра точки p относительно S, должна проходить черезъ точку q сопряженную съ нею относительно S и чрезъ точку r сопряженную съ нею относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). Слѣдовательно, эта поляра есть прямая qr, проходящая чрезъ μ; а это показываетъ, что и поляра точки μ относительно S проходитъ чрезъ p.

И такъ, дѣйствительно, точка p находится при пересѣченіи поляры точки μ относительно S съ одною изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$.

2) Поляра точки μ относительно T, будучи касательною въ точкѣ r къ коническому сѣченію D, имѣетъ своими полюсами относительно X и Y точки ε и φ. Вслѣдствіе этого, назвавъ чрезъ e и f точки пересѣченія этой поляры съ касательными въ ε и φ къ кривымъ E и F, будемъ имѣть, что точки e и ε суть сопряженныя между собою относительно коническихъ сѣченій X и E, а точки f и φ — относительно коническихъ сѣченій Y и F. Слѣдовательно, это суть двѣ пары точекъ сопряженныхъ относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST).

Такъ какъ мы уже видѣли, что r и p суть также двѣ точки сопряженныя относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST), то въ этомъ пучкѣ должно существовать такое коническое сѣченіе V, для котораго ef есть поляра точки p. Поляра точки e относительно V должна проходить чрезъ p, какъ сопряженную съ нею относительно этого коническаго сѣченія, и чрезъ ε, какъ сопряженную съ нею относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST). Слѣдовательно, эта поляра есть касательная къ V въ точкѣ e. Точно также убѣждаемся, что прямая fp касается V въ точкѣ f.

И такъ, дѣйствительно, прямыя $p\varepsilon$ и $p\varphi$ суть двѣ касательныя изъ точки p къ коническому сѣченію, принадлежащему пучку (ST) и имѣющему полярою точки p поляру точки μ относительно T.

Все сказанное относилось къ совершенно произвольному положенію точки μ на коническомъ сѣченіи C, и такъ какъ два коническія сѣченія E и F вполнѣ опредѣляются кривыми S, T и C и не зависятъ отъ положенія точки μ на C, то убѣждаемся, что при перемѣщеніи μ въ какое нибудь другое положеніе на коническомъ сѣченіи C обѣ смежныя съ нею противолежащія прямыя должны оставаться касательными къ тѣмъ же самымъ коническимъ сѣченіямъ E и F.

Предположеніе, что противолежащая прямая, предшествующая точкѣ μ, огибаетъ коническое сѣченіе пучка (ST), позволяетъ намъ заключить, что одно изъ двухъ коническихъ сѣченій E и F, именно, огибаемое предшествующей точкѣ μ противолежащей прямой, непремѣнно существуетъ. Слѣдовательно, и послѣдующая за точкой μ противолежащая прямая огибаетъ также непремѣнно существующее коническое сѣченіе пучка (ST). Въ этомъ именно намъ и нужно было убѣдиться.

§ 8.

Когда точка g находится внѣ коническаго сѣченія T, то ея n-ая противолежащая прямая есть сторона $(2n+1)$-угольника, вписаннаго въ S и имѣющаго всѣ стороны, кромѣ одной, касательными къ T, а n-ая противолежащая точка есть вершина $(2n+2)$-угольника, описаннаго около T и имѣющаго всѣ вершины, кромѣ одной, на коническомъ сѣченіи S.

Слѣдовательно, доказанное нами предложеніе, включая въ себѣ заразъ оба взаимныя предложенія о многоугольникахъ Понселе, приведенныя нами во 2-мъ параграфѣ предыдущей статьи, имѣетъ въ то же время тотъ недостатокъ, что представляетъ обобщеніе перваго изъ нихъ лишь для случая многоугольника съ нечетнымъ, а втораго — лишь для случая многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ. Этотъ недостатокъ не трудно, однако, восполнить, пользуясь слѣдующими соображеніями.

Мы говорили до сихъ поръ о прямыхъ и точкахъ противолежащихъ нѣкоторой точкѣ g, находящейся на коническомъ сѣченіи S, которая и была, такъ сказать, началомъ или исходнымъ пунктомъ всѣхъ построеній, къ которымъ относились наши разсужденія. Возьмемъ теперь для той же цѣли какую нибудь прямую G, касающуюся коническаго сѣченія T (фиг. 8-ая).

Допустимъ, что эта прямая пересѣкаетъ S въ двухъ точкахъ α_1 и α_2. Проведя чрезъ эти двѣ точки вторыя касательныя къ T и назвавъ ихъ точку пересѣченія буквою a, получимъ треугольникъ $\alpha_1 a \alpha_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, кромѣ одной, на коническомъ сѣчаніи S. Точка a есть, слѣдовательно, вершина этого треугольника, противолежащая сторонѣ G. Ее можно, по примѣру предыдущаго, назвать *точкою, противолежащею касательной G коническаго сѣченія T относительно коническаго сѣченія S.*

Прямая $\alpha_1 a$ и $\alpha_2 a$ встрѣчаютъ коническое сѣченіе S вторично въ нѣкоторыхъ точкахъ β_1 и β_2. Соединивъ эти точки прямою, получимъ четыреугольникъ $\alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2$, вписанный въ S и имѣющій всѣ стороны, кромѣ одной $\beta_1\beta_2$, противолежащей сторонѣ G, касательными къ T. Будемъ называть эту сторону $\beta_1\beta_2$ *прямою, противолежащею касательной G относительно S.*

Проведя чрезъ точки β_1 и β_2 вторыя касательныя къ T и назвавъ ихъ точку пересѣченія буквою b, будемъ имѣть пятиугольникъ $\alpha_1\beta_1 b\beta_2\alpha_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, кромѣ одной b, на коническомъ сѣченіи S. Вершину b, противолежащую сторонѣ G, будемъ называть *второю противолежащею точкой касательной* G.

Затѣмъ получимъ *вторую противолежащую прямую* касательной G и т. д.

Вообще мы будемъ имѣть для прямой G, также какъ въ 1-мъ параграфѣ для точки g, безпредѣльный рядъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ, чередующихся между собою.

Фигура, состоящая изъ двухъ коническихъ сѣченій S и T, касательной G ко второму и всѣхъ ея противолежащихъ точекъ и прямыхъ относительно перваго, очевидно, есть взаимныя съ фигурой, состоящей изъ тѣхъ же коническихъ сѣченій S и T, точки g, принадлежащей первому, и всѣхъ ея противолежащихъ прямыхъ и точекъ относительно втораго.

Такъ какъ все сказанное выше, какъ въ предыдущей, такъ и въ настоящей статьяхъ, относясь ко второй изъ этихъ фигуръ, основывалось лишь на извѣстныхъ *дескриптивныхъ* свойствахъ, то наши предыдущія разсужденія примѣнимы и къ первой фигурѣ съ извѣстными, конечно, видоизмѣненіями (замѣною точекъ прямыми и обратно). Въ виду этого не можетъ быть сомнѣнія, во первыхъ, относительно существованія всѣхъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ данной касательной G, независимо отъ существованія точекъ ея пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ S, а во вторыхъ, относительно справедливости слѣдующаго предложенія, представляющагося также взаимнымъ съ предложеніемъ, доказаннымъ выше.

При перемѣщеніи касательной G къ коническому сѣченію T каждая ея противолежащая точка относительно коническаго сѣченія S перемѣщается по коническому сѣче-

нію, принадлежащему системѣ $[ST]$, *а каждая противолежащая прямая огибаетъ коническое сѣченіе, принадлежащее пучку* (ST).

Это предложеніе и восполняетъ упомянутый выше недостатокъ предыдущаго, такъ-какъ оно включаетъ въ себѣ первое изъ предложеній о многоугольникахъ Понселе для случая многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ и второе для случая многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ.

Такимъ образомъ предложенія о многоугольникахъ Понселе доказаны нами вполнѣ и притомъ въ обобщеніи, смыслъ и характеръ котораго былъ нами указанъ въ концѣ 3-го параграфа предыдущей статьи.

§ 9.

Намъ остается доказать тѣ-же предложенія для случая, когда коническія сѣченія S и T соприкасаются между собою въ двухъ точкахъ.

Въ этомъ случаѣ для коническихъ сѣченій S и T существуетъ безчисленное множество общихъ полярныхъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ одною изъ сторонъ хорду соприкосновенія (дѣйствительную или идеальную) и одною изъ вершинъ полюсъ этой хорды[1]. Кромѣ того нужно замѣтить, что въ этомъ случаѣ исчезаетъ различіе между пучкомъ (ST) и системой $[ST]$.

Мы будемъ основывать наше доказательство на разсмотрѣніи гомологическихъ фигуръ, т. е. фигуръ, находящихся въ такомъ проективномъ или коллинеарномъ между собою соотвѣтствіи, въ которомъ каждыя двѣ соотвѣтственныя (гомологическія) точки лежатъ на одной прямой съ нѣкоторою постоянною точкой, называемой центромъ гомологіи, и каждыя двѣ соотвѣтственныя

---

[1] Это обстоятельство и есть та причина, по которой къ настоящему частному случаю не примѣнимо изложенное въ предыдущемъ общее доказательство (см. §§ 5 и 6 предыд. статьи).

(гомологическія) прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ съ нѣкоторою постоянною прямою, называемой осью гомологіи. Такое соотвѣтствіе устанавливается, какъ извѣстно, вполнѣ, когда даны центръ и ось гомологіи и одна какая нибудь пара соотвѣтственныхъ точекъ или соотвѣтственныхъ прямыхъ.

Назовемъ чрезъ L хорду прикосновенія коническихъ сѣченій S и T, а чрезъ l полюсъ этой прямой относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST) (фиг. 9-я). Пусть g_1 и g_2 будутъ два различныя положенія точки g на коническомъ сѣченіи S. Точка p пересѣченія прямыхъ g_1g_2 и L будетъ имѣть общею полярою относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST) нѣкоторую прямую P, проходящую чрезъ l.

Примемъ точку p и прямую P за центръ и ось гомологіи и пусть g_1 и g_2 будутъ соотвѣтственныя точки. Этими условіями соотвѣтствіе устанавливается вполнѣ и всякой произвольной точкѣ a_1 будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка a_2, находящаяся при пересѣченіи прямой pa_1 съ прямою, соединяющею точку g_2 съ точкою встрѣчи прямыхъ g_1a_1 и P.

Такъ-какъ точки g_1 и g_2 раздѣляются гармонически центромъ p и осью P гомологіи, то то-же самое должно быть и для точекъ a_1 и a_2. Это показываетъ, что каждыя двѣ соотвѣтственныя точки находятся на одномъ и томъ-же коническомъ сѣченіи пучка (ST), откуда слѣдуетъ, что и каждыя двѣ соотвѣтственныя прямыя суть касательныя къ одному и тому-же коническому сѣченію пучка (ST). Вообще всѣмъ точкамъ и касательнымъ какого нибудь коническаго сѣченія пучка (ST) должны соотвѣтствовать точки и касательныя того-же коническаго сѣченія.

Положимъ теперь, что M_1 и M_2 суть n-ыя противолежащія прямыя точекъ g_1 и g_2. Построеніе, которымъ онѣ находятся по этимъ точкамъ, нами уже показано выше, и въ разсматриваемомъ теперь частномъ расположеніи коническихъ сѣченій S и T есть то-же самое какъ и въ общемъ.

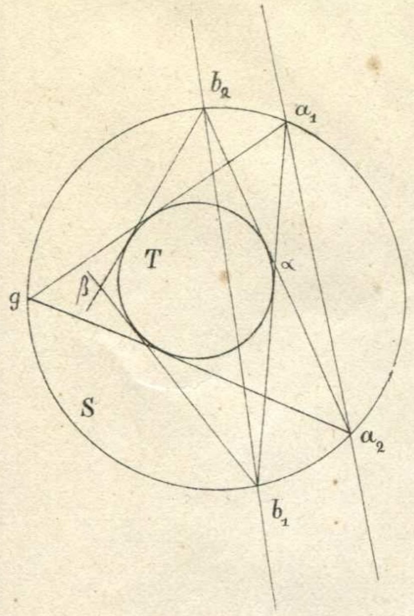
Такъ-какъ точка g_1 и оба коническія сѣченія S и T составляютъ фигуру, для которой гомологическая состоитъ изъ точки g_2 и тѣхъ-же самыхъ коническихъ сѣченій, то и всѣ составныя части построенія по точкѣ g_1 прямой M_1 съ одной стороны и по точкѣ g_2 прямой M_2 съ другой должны представлять также двѣ гомологическія фигуры. Отсюда слѣдуетъ, что и результаты этихъ обоихъ построеній, т. е. прямыя M_1 и M_2, должны быть также гомологическими, а это значитъ, на основаніи вышесказаннаго, что онѣ должны касаться одного и того-же коническаго сѣченія пучка (ST).

Тѣ-же самые доводы убѣждаютъ насъ, что двѣ n-ыя противолежащія точки μ_1 и μ_2 точекъ g_1 и g_2 должны быть точками гомологическими и, вслѣдствіе этого, лежатъ на одномъ и томъ-же коническомъ сѣченіи пучка (ST).

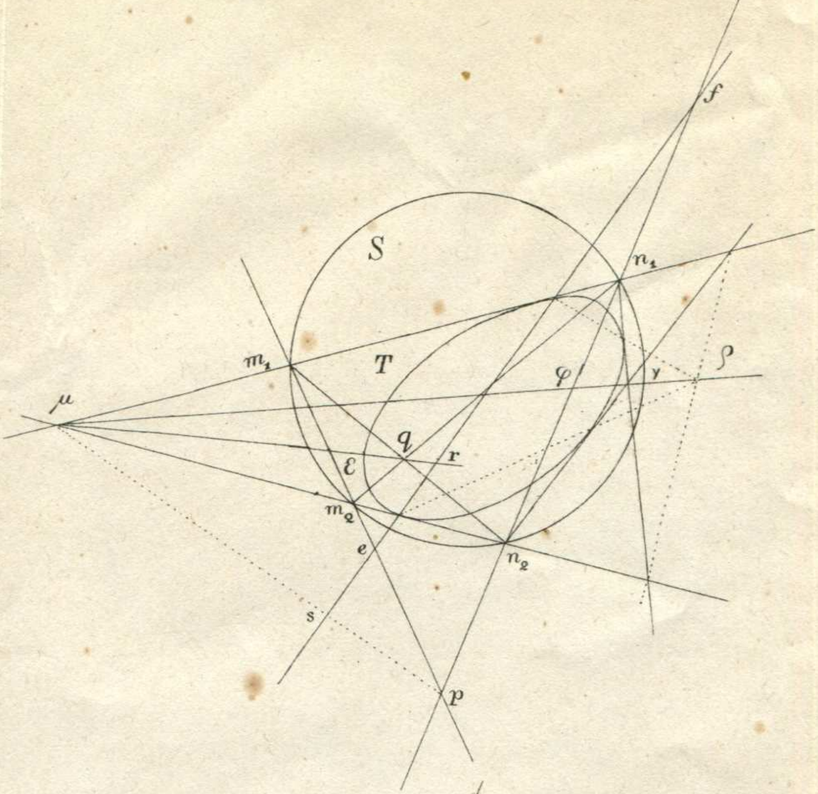
Принимая во вниманіе, что точки g_1 и g_2 были взяты на S совершенно произвольно и что точкою μ_1 опредѣляется вполнѣ единственное проходящее чрезъ эту точку коническое сѣченіе пучка (ST), а прямою M_1 также единственное коническое сѣченіе, касающееся ея и принадлежащее тому-же пучку, мы можемъ видѣть въ сказанномъ полное доказательство справедливости предложенія параграфа 6-го.

Взаимное съ нимъ предложеніе параграфа 8-го должно быть справедливо въ силу закона двойственности и можетъ быть доказано такими-же какъ и предыдущія разсужденія, а именно при помощи гомологическаго соотвѣтствія, которое устанавливаемъ, принимая двѣ данныя касательныя G_1 и G_2 къ коническому сѣченію T за прямыя соотвѣтственныя, прямую, соединяющую точку пересѣченія этихъ касательныхъ съ точкою l, за ось гомологіи, а полюсъ этой послѣдней прямой относительно S и T за центръ гомологіи.

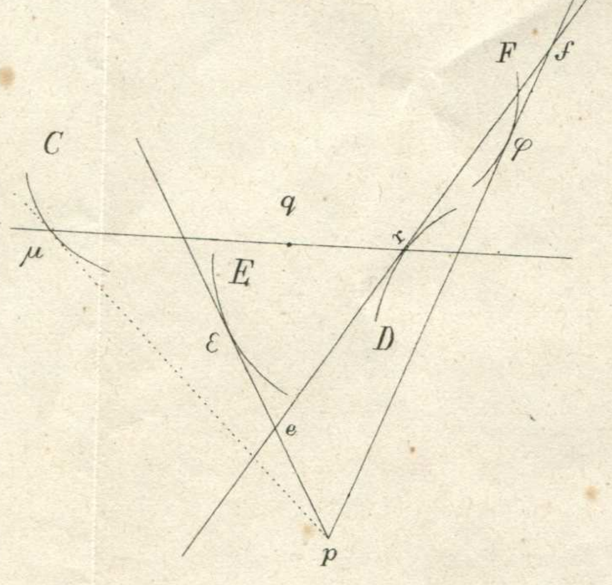
Фиг. 5.



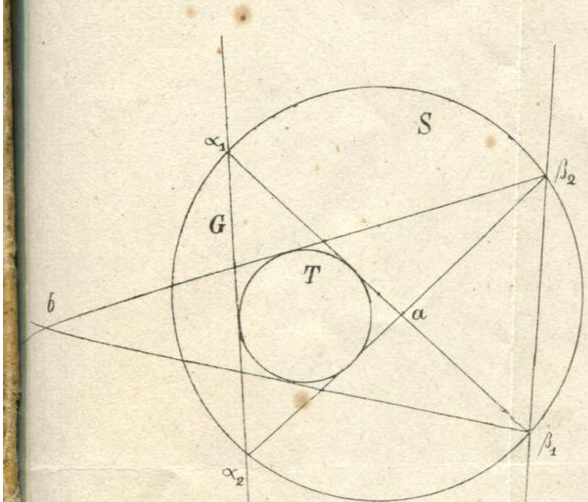
Фиг. 6.



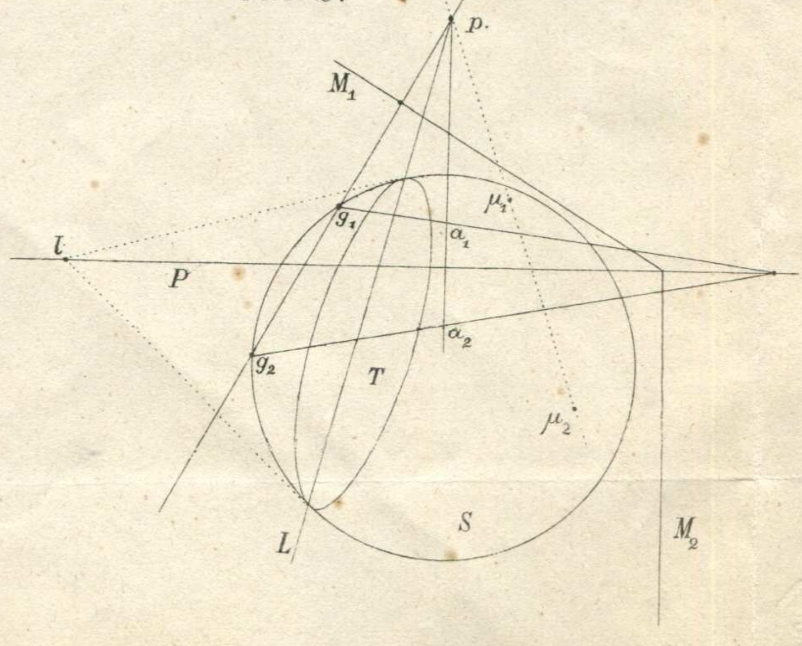
Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.



КЪ ИНТЕГРИРОВАНІЮ

ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. С. Флорова.

§ 1. Уравненіе, интегрированіемъ котораго мы намѣрены заниматься въ предлагаемой статьѣ, таково:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} u^{n-i} = x^{m+k} . u. \qquad (1)$$

Здѣсь u^{n-i} означаетъ $(n-i)$-ю производную u по x; α_i и m — постоянныя величины; k и n цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія условію $k<n$. Способъ, помощью котораго могутъ быть обнаружены случаи интегрируемости предыдущаго уравненія, есть слегка видоизмѣненный способъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій академика Импенецкаго [1]. Онъ состоитъ, слѣдовательно, въ преобразованіи даннаго уравненія въ уравненія того же вида, но съ иными коэффиціентами подъ знакомъ сигмы.

§ 2. Если назовемъ каждую часть уравненія (1) черезъ u_1^{n-k}, то оно распадется на два такихъ:

[1] «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера для изслѣдованія всѣхъ случаевъ интегрируемости одного частнаго вида линейныхъ уравненій втораго порядка». Спб. 1882.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{n-i} u^{n-i} = u_1^{\;n-k}$$

$$x^{m+k} . u = u_1^{\;n-k}. \qquad (2)$$

Разовьемъ слѣдствія, вытекающія изъ этихъ равенствъ.

Проинтегрировавъ первое изъ нихъ $n-k$ разъ[1] и опустивъ постоянныя произвольныя, вводимыя этимъ интегрированіемъ, получимъ

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i (x^{k-i} u^{n-i})^{k-n} = u_1. \qquad (3)$$

Но легко видѣть, что

$$(x^{k-i} u^{n-i})^{k-n} = \sum_{r=0}^{k} A_r^{\;i} x^r u^r$$

гдѣ для краткости положено

$$A_r^{\;i} = \frac{(k-i)!\,[k-n]^{k-i-r}}{r!\,(k-i-r)!}.$$

Значеніе символа, употребленнаго нами въ послѣдней формулѣ, опредѣляется, какъ извѣстно, слѣдующимъ равенствомъ:

$$[c]^r = c(c-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(c-r+1).$$

На основаніи сказаннаго уравненіе для u_1 принимаетъ такой видъ:

---

[1] Слѣдуя дословно способу В. Г. Имшенецкаго, нужно было бы каждую часть уравненія (1) назвать черезъ u_1' и произвести однократное интегрированіе перваго изъ тѣхъ уравненій, на которыя распадается исходное.

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\sum_{r=0}^{k-i}A_r{}^i x^r u^r = u_1.$$

Измѣнимъ здѣсь порядокъ суммованій. Съ этою цѣлью допустимъ, что r получило частное значеніе; тогда коэффиціентомъ при $x^r u^r$, который мы назовемъ черезъ B_r, будетъ:

$$B_r = \sum_{i=0}^{k-r}A_r{}^i\alpha_i.$$

Верхнимъ предѣломъ этой суммы мы сдѣлали $k-r$ вмѣсто k потому, что $A_r{}^i$ при $i > k-r$ обращается въ нуль.

Замѣтивъ наконецъ, что крайнія значенія r суть 0 и k, находимъ:

$$\sum_{r=0}^{k}B_r x^r u^r = u_1.$$

Обратимся теперь къ равенству (2). Если разрѣшимъ его относительно u и, продифференцировавъ r разъ, умножимъ на x^r, то получимъ:

$$x^r u^r = x^{-m-k}\sum_{\rho=0}^{r}\frac{r![-m-k]^{r-\rho}}{\rho!(r-\rho)!}x^\rho u_1{}^{n+\rho-k}.$$

Измѣнивъ здѣсь параметръ ρ въ $k-\rho$, найдемъ:

$$x^r u^r = x^{-m-k}\sum_{\rho=k}^{k-r}C_\rho{}^r x^{k-\rho}u_1{}^{n-\rho}$$

гдѣ для краткости положено:

$$C_\rho^{\ r} = \frac{r!\,[-m-k]^{r+\rho-k}}{(k-\rho)!\,(r+\rho-k)!}.$$

Если отсюда и изъ раньше найденнаго для u_1 равенства исключимъ $x^r u^r$, то будемъ имѣть

$$\sum_{r=0}^{k} B_r \sum_{\rho=k}^{k-r} C_\rho^{\ r} x^{k-\rho} u_1^{\ n-\rho} = x^{m+k} u_1.$$

Измѣнивъ здѣсь порядокъ суммованій, какъ это показано выше, и положивъ

$$\alpha_\rho' = \sum_{r=k}^{k-\rho} B_r C_\rho^{\ r}$$

получимъ:

$$\sum_{\rho=0}^{k} \alpha_\rho' x^{k-\rho} u_1^{\ n-\rho} = x^{m+k} u_1.$$

Такимъ образомъ цѣль, намѣченная принятымъ способомъ интегрированія уравненія (1), достигнута. Остается выразить α' черезъ α. Съ этою цѣлью въ равенство для α_ρ' поставимъ на мѣсто B_r его значеніе. Тогда оно приметъ такой видъ:

$$\alpha_\rho' = \sum_{r=k}^{k-\rho} C_\rho^{\ r} \sum_{i=0}^{k-r} A_r^{\ i} \alpha_i$$

а по измѣненіи порядка суммованій — такой:

$$\alpha_\rho' = \sum_{i=0}^{\rho} D_i \alpha_i$$

гдѣ положено:

$$D_i=\sum_{r=k-\rho}^{k-i} A_r{}^i C_\rho{}^r=\sum_{r=0}^{\rho-i} A^i{}_{k-\rho+r}\,C_\rho{}^{k-\rho+r}.$$

Замѣнивъ здѣсь A и C ихъ значеніями, получимъ:

$$D_i=\frac{(k-i)!}{(k-\rho)!}\sum_{r=0}^{\rho-i}\frac{[-m-k]^r[k-n]^{\rho-i-r}}{r!(\rho-i-r)!}.$$

Отсюда вслѣдствіе того, что биномъ Ньютона имѣетъ мѣсто и для факторіальныхъ степеней, имѣемъ:

$$D_i=\frac{(k-i)![-m-n]^{\rho-i}}{(k-\rho)!(\rho-i]!}.$$

Изъ сказаннаго видимъ, что между коэффиціентами исходнаго и преобразованнаго уравненій существуетъ слѣдующая зависимость:

$$\alpha'_\rho=\sum_{i=0}^{\rho}\frac{(k-i)![-m-n]^{\rho-i}}{(k-\rho)!(\rho-i)!}\alpha_i.$$

§ 3. Если надъ уравненіемъ (1) совершимъ δ преобразованій подобныхъ указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, то получимъ уравненіе

$$\sum_{\rho=0}^{k}\alpha_\rho^\delta x^{k-\rho}u_\delta{}^{n-\rho}=x^{m+k}.u_\delta \qquad (4)$$

коэффиціентъ котораго опредѣлится слѣдующимъ равенствомъ:

$$\alpha_\rho^\delta=\sum_{i=0}^{\rho}\frac{(k-i)![-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(k-\rho)!(\rho-i)!}\alpha_i \qquad (5)$$

Для доказательства этой мысли подвергнемъ упомянутому преобразованію уравненіе (4); пусть это преобразованіе дало намъ уравненіе съ коэффиціентомъ $\alpha_r^{\delta+1}$. Уже извѣстно, что

$$\alpha_r^{\delta+1} = \sum_{\rho=0}^{r} \frac{(k-\rho)!\,[-m-n]^{r-\rho}}{(k-r)!\,(r-\rho)!}\,\alpha_\rho^{\delta}.$$

Если поставимъ сюда на мѣсто α_ρ^δ предполагаемое для него значеніе и сдѣлаемъ положенія

$$A_i^\rho = \frac{(k-i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(k-\rho)!\,(\rho-i)!}$$

$$B_\rho = \frac{(k-\rho)!\,[-m-n]^{r-\rho}}{(k-r)!\,(r-\rho)!},$$

то при условіи

$$C_i = \sum_{\rho=i}^{r} A_i^\rho B_\rho = \sum_{\rho=0}^{r-i} A_i^{\rho+i} B_{\rho+i}$$

получимъ:

$$\alpha_r^{\delta+1} = \sum_{\rho=0}^{r} B_\rho \sum_{i=0}^{\rho} A_i^\rho \alpha_i = \sum_{i=0}^{r} C_i \alpha_i.$$

Разовьемъ теперь условіе опредѣляющее C_i. Замѣнивъ въ немъ A и B ихъ выраженіями, будемъ имѣть:

$$C_i = \frac{(k-i)!}{(k-r)!} \sum_{\rho=0}^{r-i} \frac{[-\delta(m+n)]^{\rho}\,[-m-n]^{r-i-\rho}}{\rho!\,(r-i-\rho)!}.$$

Отсюда по свойству факторіальныхъ степеней найдемъ:

$$C_i = \frac{(k-i)!\,[-(\delta+1)(m+n)]^{r-i}}{(k-r)!\,(r-i)!}\,.$$

На основаніи сказаннаго, уравненіе для $\alpha_r^{\delta+1}$ по замѣнѣ r черезъ ρ приметъ такой видъ:

$$\alpha_\rho^{\delta+1} = \sum_{i=0}^{\rho} \frac{(k-i)!\,[-(\delta+1)(m+n)]^{\rho-i}}{(k-\rho)!\,(\rho-i)!}\,\alpha_i\,.$$

Сравнивъ это равенство съ равенствомъ (5), приходимъ къ заключенію, что послѣднее имѣетъ мѣсто для всякаго цѣлаго и положительнаго δ, такъ какъ оно имѣетъ его для $\delta=1$.

§ 4. Вторая часть равенства (5) по замѣнѣ въ ней δ черезъ $-\delta$ опредѣляетъ коэффиціентъ того уравненія, которое выводится изъ (1) помощью δ преобразованій, обратныхъ указаннымъ во второмъ параграфѣ. Эту мысль можно подтвердить двояко: или непосредственно, или разрѣшивъ равенство (5) относительно α_i. Мы пойдемъ по второму пути: будучи болѣе простымъ онъ столь-же строгъ, какъ и первый, ибо исходное уравненіе къ уравненію (4) стоитъ въ томъ отношеніи, какое требуется высказаннымъ предложеніемъ, т. е. получается изъ него помощью δ обратныхъ преобразованій.

Равенство (5) при условіи

$$A_i^\rho = \frac{(k-i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(k-\rho)!\,(\rho-i)!}$$

можно разсматривать подъ видомъ:

$$\alpha_\rho^\delta = \sum_{i=0}^{\rho} A_i^\rho \alpha_i$$

а его рѣшеніе относительно α_i — подъ видомъ:

$$\alpha_i = \sum_{r=0}^{i} B_r{}^i \, \alpha_r{}^\delta.$$

Такимъ образомъ задача сводится къ опредѣленію B. Но если исключимъ изъ предыдущихъ равенствъ α_i и въ результатѣ измѣнимъ порядокъ суммованій, то найдемъ:

$$\alpha_\rho^\delta = \sum_{r=0}^{\rho} \left(\sum_{i=r}^{\rho} A_i{}^\rho \, B_r{}^i \right) \alpha_r{}^\delta.$$

Полученный результатъ имѣетъ мѣсто тождественно; слѣдовательно, существуютъ такія отношенія:

$$A_\rho^\rho \, B_\rho^\rho = 1$$

$$\sum_{i=r}^{\rho} A_i{}^\rho \, B_r{}^i = \sum_{i=0}^{\rho-r} A^\rho{}_{r+i} \, B_r{}^{r+i} = 0.$$

Поставивъ сюда на мѣсто A его значеніе, получимъ:

$$B_\rho^\rho = 1$$

$$\sum_{i=0}^{\rho-r} \frac{(k-r+i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-r-i}}{(\rho-r-i)!} B_r{}^{r+i} = 0\,.$$

Требованіе, выражаемое послѣднимъ изъ этихъ равенствъ, удовлетворяется лишь въ томъ случаѣ, когда

$$B_r{}^{r+i} = \frac{[\delta(m+n)]^i}{i!\,(k-r-i)!} \,.\, C\,,$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная, отъ i независящая. Положивъ для опредѣленія этой постоянной $i=0$, найдемъ:

$$C=(k-r)!B_r^r=(k-r)!.$$

Имѣя это легко уже получить:

$$B_r^i=\frac{(k-r)![\delta(m+n)]^{i-r}}{(k-i)!(i-r)!}.$$

На основаніи сказаннаго равенство для α_i принимаетъ такой видъ:

$$\alpha_i=\sum_{r=0}^{i}\frac{(k-r)![\delta(m+n)]^{i-r}}{(k-i)!(i-r)!}\alpha_r{}^\delta. \qquad (6)$$

И такъ, предложеніе, поставленное въ началѣ этого параграфа, вполнѣ доказано. Изъ него вытекаетъ, что равенство (5), а съ нимъ и равенство (6), имѣетъ мѣсто и для отрицательнаго δ. По этому впослѣдствіи въ этихъ равенствахъ мы будемъ разумѣть подъ δ какъ положительныя, такъ и отрицательныя цѣлыя числа.

§ 5. Сказаннаго вполнѣ достаточно для выдѣленія тѣхъ случаевъ, въ которыхъ интегрированіе уравненія (1) можно свести на интегрированіе простѣйшаго уравненія, разсматриваемаго нами типа. Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что $\alpha_o^\delta=1$ и что $\alpha_r^\delta=0$ при $r>0$, то въ силу отношенія

$$\alpha_i=\frac{k![\delta(m+n)]^i}{(k-i)!i!},$$

вытекающаго изъ равенства (6), уравненія (1) и (4) примутъ такой видъ:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{k![\delta(m+n)]^i}{i!(k-i)!} x^{k-i} u^{n-i} = x^{m+k} u \qquad (7)$$

$$u_\delta^{\ n} = x^m u_\delta . \qquad (8)$$

Уравненіе (7) представляетъ одинъ изъ случаевъ, въ которыхъ уравненіе (1) приводится къ (8). На разсмотрѣніи другихъ подобныхъ случаевъ[1], хотя опредѣленіе нѣкоторыхъ изъ нихъ не представляетъ никакихъ затрудненій, мы не будемъ останавливаться. По нашему мнѣнію, даже въ теоретическомъ отношеніи случаи эти представляютъ сравнительно слабый интересъ и далеко не такъ характерны, какъ упомянутый выше.

Изъ предыдущаго видно, что рѣшеніе вопроса объ интегрированіи уравненія (7) зависитъ отъ рѣшенія того-же вопроса по отношенію къ уравненію (8). Поэтому мы должны заняться теперь послѣднимъ изъ упомянутыхъ уравненій. Хотя интегрированіе этого уравненія никѣмъ еще не было показано[2], однако мы удержимъ за нимъ то названіе, подъ которымъ оно извѣстно для случая $n=2$, т. е. будемъ называть его уравненіемъ Рикатти. И такъ, приступимъ къ разысканію случаевъ интегрируемости уравненія Рикатти.

§ 6. Извѣстно, что если v означаетъ какую-нибудь функцію ξ и если

$$\xi = ax^c,$$

гдѣ a и c нѣкоторыя постоянныя, то непремѣнно:

---

[1] Число этихъ случаевъ возрастаетъ вмѣстѣ съ возрастаніемъ n.

[2] Отсюда нужно исключить случаи $n=2$, $n=3$. Первый общеизвѣстенъ; второй разсмотрѣнъ В. П. Алексѣевскимъ и мною. «Сообщенія», 1883 г. Выпускъ II. Стр. 115, 129.

$$(c\xi)^k \frac{d^k v}{d\xi^k} = \sum_{i=1}^{k} \omega_i{}^k x^i \frac{d^i v}{dx^i}. \qquad (9)$$

Чтобы не отсылать читателя за справками о свойствахъ постояннаго коэффиціента ω, которыя намъ сейчасъ понадобятся, продифференцируемъ предыдущее равенство по ξ. Результату этого дифференцированія, на основаніи того, что $\omega_i{}^k$ при $i > k$ и при $i < 1$ есть тождественный нуль, можно сообщить такую форму:

$$(c\xi)^{k+1} \frac{d^{k+1} v}{d\xi^{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} \{\omega^k{}_{i-1} + (i - ck)\,\omega_i{}^k\} x^i \frac{d^i v}{dx^i}.$$

Съ другой стороны, имѣемъ:

$$(c\xi)^{k+1} \frac{d^{k+1} v}{d\xi^{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i{}^{k+1} x^i \frac{d^i v}{dx^i}.$$

Сопоставленіе послѣднихъ равенствъ и открываетъ намъ искомое свойство коэффиціента ω:

$$\omega_i{}^{k+1} = \omega^k{}_{i-1} + (i - ck)\,\omega_i{}^k. \qquad (10)$$

Для нашихъ дальнѣйшихъ цѣлей необходимо замѣтить еще, что $\omega_k{}^k = 1$. Этотъ результатъ легко получить изъ уравненія (10) положивъ въ немъ $i = k+1$ и замѣтивъ, что $\omega_1{}' = 1$.

§ 7. Обратимся теперь къ продолженію нашего изслѣдованія. Анализъ предыдущихъ параграфовъ имѣетъ мѣсто для всякаго α. Отнесемъ его къ тому частному случаю, когда $\alpha_i = \omega^k{}_{k-i}$; именно, займемся вычисленіемъ коэффиціента α_ρ^δ при сдѣланномъ допущеніи. Такъ-какъ въ предстоящемъ анализѣ мы натолкнемся на необходимость принять во вниманіе зависимость коэффиціента α_ρ^δ отъ числа k, то вмѣсто α_ρ^δ будемъ писать θ_ρ^k. Наконецъ допустимъ, что уравненіе (1), прежде чѣмъ мы перешли отъ него къ уравненію съ коэффиціентомъ α_ρ^δ, было умножено на x^p, гдѣ p означаетъ цѣлое число большее — 2, значеніе котораго опредѣлимъ впослѣдствіи.

При высказанныхъ условіяхъ уравненіе, отъ котораго мы выходимъ, и уравненіе, къ которому приходимъ, принимаютъ такой видъ:

$$\sum_{i=0}^{k} \omega^k_{k-i} x^{k-i} v^{n-i} = x^{m+k} v \qquad (11)$$

$$\sum_{i=0}^{k+p} \theta_i^{k+p} x^{k+p-i} v_1^{n-i} = x^{m+k+p} v_1 \qquad (12)$$

а равенство (5) такой:

$$\theta_\rho^{k+p} = \sum_{i=0} \frac{(k+p-i)!\,[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(k+p-\rho)!\,(\rho-i)!}\,\omega^k_{k-i}\,.$$

Займемся изслѣдованіемъ свойствъ θ. Замѣтивъ, что

$$\frac{(k+p-i)!}{(k+p-\rho)!} = [k+p-i]^{\rho-i}$$

и измѣнивъ въ предыдущемъ равенствѣ ρ въ $\rho+1$ получимъ:

$$\theta_{\rho+1}^{k+p} = \sum_{i=0}^{\rho+1} \frac{[k+p-i]^{\rho-i+1}[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}}{(\rho-i+1)!}\cdot\omega^k_{k-i}\,.$$

Взявъ отсюда дифференцію по k и принявъ во вниманіе отношеніе:

$$\omega^{k+1}_{k-i+1} - \omega^{k}_{k-i} = (k-i-ck+1)\,\omega^{k}_{k-i+1},$$

которое легко выводится изъ уравненія (10), находимъ:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1} - \theta^{k+p}_{\rho+1} = \sum_{i=o}^{\rho} \frac{[k+p-i]^{\rho-i}[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}}{(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\rho+1} \frac{[k+p-i+1]^{\rho-i+1}[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1}}{(\rho-i+1)!}\cdot(k-i-ck+1)\,\omega^{k}_{k-i+1}.$$

Измѣнивъ во второй изъ предыдущихъ сигмъ параметръ i въ $i+1$ на основаніи тождества

$$[-\delta(m+n)]^{\rho-i+1} = \{-\delta(m+n)-\varsigma+i\}[-\delta(m+n)]^{\rho-i},$$

будемъ имѣть:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1} - \theta^{k+p}_{\rho+1} =$$

$$= \{k-\varsigma-ck-\delta(m+n)\}\sum_{i=o}^{\rho} \frac{[k+p-i]^{\rho-i}[-\delta(m+n)]^{\rho-i}}{(\rho-i)!}\cdot\omega^{k}_{k-i}.$$

Отсюда уже легко видѣть, что θ должна удовлетворять слѣдующему уравненію:

$$\theta^{k+p+1}_{\rho+1} = \theta^{k+p}_{\rho+1} + \{k-\varsigma-ck-\delta(m+n)\}\,\theta^{k+p}_{\rho}.$$

Разсмотримъ тотъ случай, когда

$$-\delta(m+n)=r(1-c),$$

гдѣ r означаетъ какое-нибудь цѣлое число. Для этого случая предыдущее уравненіе даетъ:

$$\theta_{\rho+1}^{k+p+1}=\theta_{\rho+1}^{k+p}+\{k+r-\varrho-c(k+r)\}\theta_{\rho}^{k+p}.$$

Сопоставляя это уравненіе съ уравненіемъ

$$\omega_{k+r-\rho}^{k+r+1}=\omega_{k+r-\rho-1}^{k+r}+\{k+r-\varrho-c(k+r)\}\omega_{k+r-\rho}^{k+r}, \quad (13)$$

получаемъ:

$$\theta_{\rho}^{k+p}=q\omega_{k+r-\rho}^{k+r}$$

$$q\omega_{k+r-\rho}^{k+r}=\sum_{i=0}^{\rho}\frac{[k+p-i]^{\rho-i}[r(1-c)]^{\rho-i}}{(\rho-i)!}\cdot\omega_{k-i}^{k}.$$

Послѣднее изъ этихъ отношеній (въ предположеніи, что r не варіируетъ и, слѣдовательно, имѣетъ одно или нѣсколько вполнѣ опредѣленныхъ, но пока неизвѣстныхъ намъ, значеній) выражаетъ полный интегралъ уравненія (13); количества же p и q, фигурирующія въ немъ, означаютъ періодическія постоянныя. Одну изъ этихъ постоянныхъ, именно q, можно опредѣлить по условію $\omega_{k+r}^{k+r}=1$, которое даетъ $q=1$. Чтобы опредѣлить другую постоянную и вмѣстѣ съ нею количество r, положимъ $k=1$ и $c=-1$; тогда предыдущее равенство, въ-силу отношенія

$$\omega_{r-\rho+1}^{r+1}=\frac{[r]^{\rho}[r+1]^{\rho}}{\rho!},$$

обратится въ такое:

$$[r]^\rho [r+1]^\rho = [p+1]^\rho [2r]^\rho .$$

Удовлетворить этому требованію независимо отъ ρ можно лишь въ трехъ случаяхъ: во-первыхъ, когда

$$2r = r+1 \ , \ p+1 = r \ ,$$

во-вторыхъ, когда

$$r = -1 \ , \ p = -1 \ ,$$

и наконецъ, когда $r=0$. На послѣднемъ изъ этихъ случаевъ, по понятной причинѣ, намъ нѣтъ нужды останавливаться; первые же два случая даютъ:

$$\omega^{k+1}_{k-\rho+1} = \sum_{i=o}^{\rho} \frac{(k-i)!\,[1-c]^{\rho-i}}{(k-\rho)!\,(\rho-i)!} \cdot \omega^{k}_{k-i} \ , \qquad (14)$$

$$\omega^{k-1}_{k-\rho-1} = \sum_{i=o}^{\rho} \frac{(k-i-1)!\,[c-1]^{\rho-i}}{(k-\rho-1)!\,(\rho-i)!} \cdot \omega^{k}_{k-i} \ . \qquad (15)$$

Такимъ образомъ обнаружилось, что при условіяхъ

$$p=0 \ , \ c = 1+\delta(m+n) \ , \qquad (16)$$

имѣетъ мѣсто такое отношеніе:

$$\theta^{k}_{\rho} = \omega^{k+1}_{k-\rho+1} \ ,$$

при условіяхъ же

$$p=-1 \, , \, c = 1-\delta(m+n) \qquad (17)$$

такое:

$$\theta_\varrho^{k-1} = \omega_{k-\varrho-1}^{k-1}.$$

§ 8. Изложенное доказательство отношеній (14) и (15) мы поставили главнымъ образомъ для того, чтобы сдѣлать впослѣдствіи очевидною единственность случаевъ интегрируемости уравненія Рикатти съ точки зрѣнія, изысканныхъ для интегрированія этого уравненія, средствъ[1]. Далѣе обнаружится, что единственность эта подлежала бы сомнѣнію, еслибы r могло имѣть иныя значенія помимо указанныхъ.

Въ нашемъ распоряженіи есть и другое болѣе простое доказательство тѣхъ же отношеній. Оно состоитъ въ слѣдующемъ. На основаніи тождества (9) можемъ написать:

$$(c\xi)^{k-1}\frac{d^kv}{d\xi^k} = \sum_{i=0}^{k-1}\omega_i^{k-1}x^i\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Но легко видѣть, что

$$x^i\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{dv}{d\xi}\right) = \frac{1}{c\xi}\sum_{r=0}^{i}A_r^{\,i}x^{r+1}\frac{d^{r+1}v}{dx^{r+1}},$$

гдѣ для краткости положено:

$$A_r^{\,i} = \frac{i![1-c]^{i-r}}{r!(i-1)!}.$$

Послѣ этого дѣлается понятнымъ такое отношеніе

$$(c\xi)^k\frac{d^kv}{d\xi^k} = \sum_{i=0}^{k-1}\omega_i^{k-1}\sum_{r=0}^{i}A_r^{\,i}x^{r+1}\frac{d^{r+1}v}{dx^{r+1}}.$$

---

[1] Ниже, съ расширеніемъ средствъ, мы получимъ возможность констатировать существованіе особыхъ случаевъ.

Измѣнивъ здѣсь порядокъ суммованій и написавъ въ результатѣ r вмѣсто $r+1$, получимъ:

$$(c\xi)^k \frac{d^k v}{d\xi^k} = \sum_{r=1}^{k} \Big(\sum_{i=r-1}^{k-1} A^i_{r-1} \omega_i^{k-1} \Big) x^r \frac{d^r v}{dx^r}.$$

Отсюда уже легко видѣть, что

$$\omega_r^{\,k} = \sum_{i=r-1}^{k-1} A^i_{r-1} \omega_i^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-r} A^{k+i-1}_{r-1} \; \omega^{k-1}_{k-i-1}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто A его значеніе, найдемъ:

$$\omega_r^{\,k} = \sum_{i=0}^{k-r} \frac{(k-i-1)!\,[1-c]^{k-r-i}}{(r-1)!\,(k-r-1)!} \cdot \omega^{k-1}_{k-i-1}.$$

Такимъ образомъ отношеніе (14) вновь доказано: оно получается изъ предыдущаго замѣной $k-r$ черезъ ϱ и $k-1$ черезъ k. Что же касается отношенія (15), то его можно вывести изъ (14), разрѣшивъ послѣднее относительно ω^k, какъ показано въ нумерѣ 4-мъ, и написавъ въ результатѣ k вмѣсто $k+1$.

§ 9. Займемся теперь уравненіями (11) и (12). Если измѣнимъ въ первомъ изъ нихъ параметръ i въ $k-i$, а во второмъ въ $k-i+1$, то при существованіи условій (16) найдемъ:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i^{\,k} x^i \frac{d^i}{dx^i} (v^{n-k}) = x^{m+k} \cdot v$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i^{\,k+1} x^i \frac{d^i}{dx^i} (v_1^{\;n-k-1}) = x^{m+k+1} \cdot v_1.$$

Отсюда на основаніи тождества (9) получимъ:

$$(c\xi)^k \frac{d^k}{d\xi^k}(v^{n-k}) = x^{m+k} \, . \, v \tag{18}$$

$$(c\xi)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}}(v_1{}^{n-k-1}) = x^{m+k+1} \, . \, v_1 \, .$$

Теперь понятно, что отъ уравненія (18) всегда можно перейдти къ такому уравненію:

$$(c\xi)^{k+r} \frac{d^{k+r}}{d\xi^{k+r}}(v_r{}^{n-k-r}) = x^{m+k+r} \, . \, v_r . \tag{19}$$

Хотя черезъ r обозначено здѣсь цѣлое положительное число, однако легко убѣдиться, что подъ r можно разумѣть и отрицательныя цѣлыя числа. Дѣйствительно, допустивъ существованіе условій (17) и повторивъ для этого случая анализъ настоящаго параграфа, мы придемъ къ уравненію, отличающемуся отъ (19) лишь знакомъ у r.

§ 10. На основаніи добытыхъ результатовъ легко уже опредѣлить случаи интегрируемости уравненія Рикатти.

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$k = 1, \; r = n - 1, \; c^{nc} a^{m+n} = 1 \; ,$$

то уравненія (18) и (19) дадутъ:

$$\frac{d^n v}{dx^n} = x^m v$$

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(v_{n-1}) = \xi^{-n+\frac{m+n}{c}} \, . \, v_{n-1} \, .$$

Измѣнивъ во второмъ изъ этихъ уравненій перемѣнное независимое по формулѣ $z\xi = 1$ въ силу извѣстнаго отношенія

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(v_{n-1}) = (-1)^n z^{n+1} \frac{d^n}{dz^n}(z^{n-1} v_{n-1})$$

найдемъ:

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{n-1} v_{n-1}) = (-1)^n z^{-1-\frac{m+n}{c}} . v_{n-1}.$$

Отсюда положивъ $z^{n-1} v_{n-1} = w$, получимъ

$$\frac{d^n w}{dz^n} = (-1)^n z^{-n-\frac{m+n}{c}} . w.$$

Такимъ образомъ отъ уравненія Рикатти съ модулемъ m можно перейдти къ тому же уравненію съ модулемъ μ опредѣляемымъ слѣдующимъ равенствомъ:

$$\mu = -n \pm \frac{m+n}{1+\delta(m+n)}.$$

Здѣсь, какъ уже замѣчено выше, δ означаетъ положительное или отрицательное цѣлое число. Если въ предыдущемъ равенствѣ положимъ $m = 0$, то найдемъ:

$$\mu = -n \pm \frac{n}{1+\delta n}.$$

Этою формулой и выражаются искомые случаи интегрируемости уравненія Рикатти, включая сюда и ассимптотическій случай $\mu = -n$, въ которомъ упомянутое уравненіе интегрируется степенью независимаго перемѣннаго.

Ту же формулу мы получили бы, сдѣлавъ относительно чиселъ k и r такія допущенія: $k = n$, $-r = n - 1$.

Если, удержавъ предположеніе $k = 1$, допустимъ $r = n - 2$, то изъ уравненія (19) получимъ:

$$\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}\left(\xi^{\frac{c-1}{c}}\frac{dv_{n-2}}{d\xi}\right)=\xi^{-(n-1)\pm\frac{m+n-1}{c}}\cdot v_{n-2}.$$

Отсюда, положивъ

$$\frac{dv_{n-2}}{d\xi}=\xi^{\frac{1-c}{c}}.w\,,\quad m=-n-\frac{n}{n\delta-1}\,,$$

легко перейдемъ къ такому уравненію:

$$\frac{d^n w}{d\xi^n}-\frac{n\delta}{\xi}\frac{d^{n-1}w}{d\xi^{n-1}}=w.$$

Это уравненіе составляетъ частный случай ($k=1$, $m=0$) уравненія (7). Изъ предыдущаго видно, что съ уравненіемъ Рикатти оно имѣетъ такую же тѣсную связь, какая наблюдается для случая $n=2$.

Подробное изслѣдованіе предыдущаго уравненія дано В. П. Алексѣевскимъ[1].

§ 11. Опредѣливъ случаи интегрируемости уравненія Рикатти, мы тѣмъ самымъ разрѣшили вопросъ объ интегрированіи уравненія (7). Поэтому, возвращаясь снова къ этому уравненію, мы укажемъ лишь на ту простѣйшую форму, какую оно можетъ принять. Теорема Лейбница мгновенно разрѣшаетъ этотъ вопросъ. Именно при условіяхъ

$$\delta(m+n)=p\;,\quad m+p=q\,,$$

она доставляетъ упомянутому уравненію слѣдующій видъ:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^p\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right)=x^q u\,. \tag{20}$$

[1] «Сообщенія» 1884 г. Выпускъ I. Стр. 41.

Понятно, что, обозначая черезъ i какое-нибудь цѣлое число, мы найдемъ для условій интегрируемости этого уравненія такія формулы:

$$p = \pm \frac{n\delta}{ni-1}\ ,\quad q = -n \pm \frac{n(\delta-1)}{ni-1}\ .$$

Если сдѣлаемъ въ предыдущемъ уравненіи подстановку

$$x^p u^{n-k} = y\ ,$$

то безъ труда получимъ:

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(x^{-q}\frac{d^k y}{dx^k}\right) = x^{-p} y\ .$$

Отсюда видно, что отъ уравненія (7), лѣвая часть котораго содержитъ k членовъ, всегда можно перейдти къ уравненію того же вида, но съ $n-k$ членами въ лѣвой части. Этимъ замѣчаніемъ можно пользоваться при интегрированіи уравненія (7) въ томъ случаѣ, когда $k > n-k$.

Чтобы покончить съ интегрируемыми формами линейныхъ уравненій разсматриваемаго нами типа, остановимся еще на такомъ уравненіи

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\frac{d^{n-k} v}{dx^{n-k}}\right) = \xi^m v = x^{mc}\,.\,v\ . \tag{21}$$

Изъ сказаннаго въ § 9 сразу видно, что при существованіи отношенія

$$c = \frac{1+\delta(n-k)}{1-\delta(m+k)}\,,$$

въ которомъ δ означаетъ какое-нибудь цѣлое число, предыдущее уравненіе всегда можно свести на уравненіе Рикатти съ модулемъ:

$$\frac{m+n\delta(m+k)}{1-\delta(m+k)}.$$

Слѣдовательно условія интегрируемости уравненія (21) таковы:

$$c=1\pm\frac{n\delta}{ni-1}, \quad m=-n\pm\frac{n+n\delta(n-k)}{n(i\pm\delta)-1},$$

гдѣ i какое угодно цѣлое число.

§ 12. Переходя теперь къ вычисленію интеграловъ тѣхъ уравненій, интегрируемость которыхъ констатирована нами въ предыдущихъ параграфахъ, замѣтимъ, что интегралы эти легко найдутся, если предварительно будутъ подготовлены формулы удобныя для вычисленія u по данному u_δ и на-оборотъ. Пусть сначала требуется выразить u черезъ u_δ. На основаніи равенства (2) можемъ написать:

$$u_\rho=x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(u_{\rho+1}).$$

Сообщивъ здѣсь параметру ρ всѣ значенія отъ 0 до $\delta-1$, получимъ рядъ равенствъ, приводящихъ къ такому отношенію:

$$u=\left(x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\right)^\delta u_\delta. \qquad (22)$$

Указателемъ δ обозначено здѣсь, что операція

$$x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}},$$

повторяется δ разъ надъ субъектомъ u_δ. Предыдущимъ отношеніемъ и разрѣшается вопросъ о вычисленіи u по данному u_δ.

Для рѣшенія обратнаго вопроса замѣтимъ, что равенство (3) можно разсматривать подъ видомъ

$$x^{k-n}u_1 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} (x^{k-n}u) ,$$

и слѣдовательно можно написать

$$x^{k-n}u_{\rho+1} = \sum_{i=0}^{k} \alpha^{\rho}_{k-i} x^i \frac{d^i}{dx^i} (x^{k-n}u_\rho) .$$

Поставивъ сюда на мѣсто α^ρ его выраженіе черезъ α^p, опредѣляемое формулой

$$\alpha^{\rho}_{k-i} = \sum_{r=0}^{k-i} \frac{(k-r)!\,[(p-\rho)(m+n)]^{k-i-r}}{(k-i-r)!\,i!} \cdot \alpha^{p}_{r} ,$$

въ которой p означаетъ какое-нибудь цѣлое число, и измѣнивъ въ результатѣ порядокъ суммованій на основаніи теоремы Лейбница, найдемъ:

$$x^{(p-\rho-1)(m+n)+k-n} \cdot u_{\rho+1} =$$

$$= x^{-m-n} \sum_{i=0}^{k} \alpha^{p}_{k-i} x^i \frac{d^i}{dx^i} (x^{(p-\rho)(m+n)+k-n} \cdot u_\rho) .$$

Сообщивъ здѣсь параметру ρ всѣ значенія отъ 0 до $\delta - 1$, получимъ рядъ равенствъ, приводящихъ къ такому отношенію:

$$x^{(p-\delta)(m+n)+k-n} \cdot u_\delta =$$

$$= \left(x^{-m-n} \sum_{i=0}^{k} \alpha^{p}_{k-i} x^i \frac{d^i}{dx^i} \right)^{\delta} x^{p(m+n)+k-n} \cdot u .$$

Хотя этимъ отношеніемъ и разрѣшается вопросъ о вычисленіи u_δ по данному u, однако для насъ интереснѣе имѣть формулу, дающую возможность вычислить u черезъ $u_{-\delta}$, разумѣя подъ $u_{-\delta}$ интегралъ того уравненія, которое получается изъ (1) помощью δ обратныхъ преобразованій. Но легко видѣть, что формулу эту можно вывести изъ предыдущей поставивъ въ нее u на мѣсто u_δ, $u_{-\delta}$ на мѣсто u и α на мѣсто α^δ. Дѣйствительно, замѣтивъ, что

$$\left|\alpha^p_{k-i}\right|_{\alpha^\delta=\alpha}=$$

$$=\sum_{r=o}^{k-i}\frac{(k-r)!\,[(\delta-p)(m+n)]^{k-i-r}}{(k-i-r)!\,i!}\alpha_i=\alpha^{p-\delta}_{k-i},$$

и выполнивъ упомянутыя замѣны, получимъ:

$$x^{(p-\delta)(m+n)+k-n}\,.\,u=$$

$$=\left(x^{-m-n}\sum_{i=o}^{k}\alpha^{p-\delta}_{k-i}\,x^i\frac{d^i}{dx^i}\right)^\delta x^{p(m+n)+k-n}\,.\,u_{-\delta}\,. \qquad (23)$$

Справедливость этого отношенія можно доказать иначе. Именно, замѣтивъ, что

$$\sum_{i=o}^{k}\alpha_{k-i}\,x^i\frac{d^i}{dx^i}\left(u^{n-k}\right)=u_1^{\,n-k},$$

$$u^{n-k}=x^{m+k}\,.\,u_{-1}\,,\quad u_1^{\,n-k}=x^{m+k}u\,,$$

находимъ вообще

$$x^{m+k}u_{-\rho}=\sum_{i=o}^{k}\left(\alpha^{-\rho}_{k-i}\,x^i\frac{d^i}{dx^i}\left(x^{m+k}u_{-\rho-1}\right)\right)=$$

Замѣнивъ здѣсь $\alpha^{-\rho}$ его выраженіемъ черезъ α^{p}, получимъ:

$$x^{(p+\rho)(m+n)+m+k} \cdot u_{-\rho} =$$

$$= \sum_{i=o}^{k} \alpha^{p}{}_{k-i} x^{i} \frac{d^{i}}{ux^{i}} \left(x^{(p+\rho)(m+n)+m+k} \cdot u_{-\rho-1} \right).$$

Отсюда искомое равенство вытекаетъ само собою.

Формулы (22) и (23) выражаютъ зависимость между интегралами исходнаго и преобразованныхъ уравненій для всякаго α_i. Слѣдовательно, этими формулами можно воспользоваться для вычисленія интеграловъ уравненій (7) и (18).

§ 13. Займемся сначала уравненіемъ (18). Здѣсь представляются два случая. Для одного изъ нихъ, именно для положительнаго δ, формула (22) даетъ:

$$v = \left(x^{-m-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \right)^{\delta} v_{1}.$$

Введя сюда знакоположеніе

$$\left(x^{-m-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \right)^{\delta} = D_{k}$$

получимъ вообще такое равенство:

$$v_{\rho} = D_{k+\rho} \, v_{\rho+1}$$

и какъ слѣдствіе его такое

$$v = D_{k} D_{k+1} \ldots D_{n-1} v_{n-k}.$$

Допустимъ теперь, что m удовлетворяетъ условію:

$$m = -n + \frac{n}{1 - \delta n}.$$

Такъ какъ при этомъ условіи существуетъ отношеніе

$$v_{n-k}=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i \xi}, \ \xi = ax^{\frac{1}{1-\delta n}},$$

въ которомъ C_i означаетъ постоянную произвольную, а r_i корень уравненія $r^n=1$, то предыдущая формула даетъ

$$v=D_k D_{k+1} \ldots D_{n-1} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i \xi}. \qquad (24)$$

Этимъ отношеніемъ, въ правую часть котораго нужно поставить на мѣсто m предположенное для него значеніе, и выражается полный интегралъ уравненія (18) для этого значеніе m. Если бы мы допустили

$$m=-n-\frac{n}{1+\delta n}$$

то, въ силу отношенія

$$v_{n-k}=\xi^{n-1}\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\frac{r_i}{\xi}}, \ \xi = ax^{\frac{1}{1+\delta n}},$$

для полнаго интеграла уравненія (18) при сказанномъ m получили-бы:

$$v=D_k D_{k+1} \ldots D_{n-1} \sum_{i=1}^{n} C_i \xi^{n-1} e^{-\frac{r_i}{\xi}}. \qquad (25)$$

Переходя теперь къ тому случаю, когда въ уравненіи (18) δ означаетъ отрицательное цѣлое число, мы прежде всего замѣнимъ въ этомъ уравненіи δ черезъ $-\delta$ съ тѣмъ, чтобы подъ

δ снова разумѣть положительныя числа. Въ силу этой замѣны связь между x и ξ выразится такимъ отношеніемъ:

$$\xi = ax^{1-\delta(m+n)}.$$

Связь же между v и v_1 на основаніи формулы (23), въ которой нужно предварительно положить $p=\delta, \alpha_{k-i}=\omega_i{}^k$, будетъ:

$$x^{k-n}v = \left(x^{-m-n}(c\xi)^k \frac{d^k}{d\xi^k}\right)^\delta x^{\delta(m+n)+k-n} v_1.$$

Введя сюда знакоположеніе

$$\left(x^{-m-n}(c\xi)^k \frac{d^k}{d\xi^k}\right)^\delta = \Delta_k,$$

получимъ вообще такое равенство

$$x^{k-n+\rho}.v_\rho = a\Delta_{k+\rho}\frac{1}{\xi}x^{k-n+\rho+1}v_{\rho+1}$$

и какъ слѣдствіе его такое

$$v = (ax)^{n-k}\Delta_k\frac{1}{\xi}\Delta_{k+1}\frac{1}{\xi}\ldots\Delta_{n-1}\frac{1}{\xi}v_{n-k}.$$

Имѣя это, легко уже заключить, что полный интегралъ уравненія (18) для случая

$$m = -n + \frac{n}{1+\delta n}$$

выражается такимъ отношеніемъ

$$v = x^{n-k}\Delta_k\frac{1}{\xi}\Delta_{k+1}\frac{1}{\xi}\ldots\Delta_{n-1}\frac{1}{\xi}\sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i\xi}. \quad (26)$$

для случая-же

$$m = -n - \frac{n}{1 - \delta n}$$

такимъ

$$v = x^{n-k} \Delta_k \frac{1}{\xi} \Delta_{k+1} \frac{1}{\xi} \ldots \Delta_{n-1} \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n} C_i \xi^{n-1} e^{-\frac{r_i}{\xi}} \quad (27)$$

гдѣ постоянный множитель a^{n-k} отнесенъ къ произвольнымъ.

Мы уже видѣли, что если въ уравненіи (18) положить $k = 1$, то оно обратится въ уравненіе Рикатти съ модулемъ m. Отсюда слѣдуетъ, что интегралъ уравненія Рикатти для случаевъ

$$m = -n \pm \frac{n}{1 \pm \delta n}$$

найдется по предыдущимъ формуламъ, если сдѣлать въ нихъ $k = 1$. Такъ, на-примѣръ, для интеграла уравненія

$$\frac{d^2v}{dx^2} = x^{\frac{-4k}{2k-1}} . v$$

по формулѣ (24), положивъ въ ней $n = 2$, $k = 1$, находимъ:

$$v = \left(x^{\frac{2k+1}{2k-1}} \frac{d}{dx} \right)^k (c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\xi}) .$$

Этому отношенію при условіи

$$x^{\frac{2k+1}{2k-1}} = 2(1-2k) \frac{dx}{dz}, \; \xi = z^{1/2} = (1-2k)\, x^{\frac{1}{1-2k}}$$

можно дать такую форму

$$v = c_1 \frac{d^k}{dz^k} e^{z^{1/2}} + c_2 \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^{1/2}} .$$

Въ той же формѣ интегралъ предыдущаго уравненія можно получить изъ равенства (25). Разсмотримъ еще примѣръ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = x^{\frac{-4k}{2k+1}} \cdot v$$

Сдѣлавъ въ формулѣ (26) $n=2$, $k=1$, найдемъ

$$v = x\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^k \frac{1}{\xi}\left(c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\xi}\right)$$

или

$$v = x\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^{k+1}\left(c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\xi}\right).$$

Отсюда, положивъ

$$\xi = z^{1/2} = (2k+1)\, x^{\frac{1}{2k+1}},$$

получимъ

$$v = c_1 x \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} e^{z^{1/2}} + c_2 x \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} e^{-z^{1/2}}.$$

Въ той же формѣ интегралъ предыдущаго уравненія можно найдти изъ равенства (27).

Обращаясь теперь къ уравненію (7), замѣтимъ, что для вычисленія его интеграла достаточно показать, какъ онъ выражается черезъ v, интегралъ уравненія Рикатти. Вопросъ этотъ для положительнаго δ непосредственно разрѣшается формулой (22), которая даетъ:

$$u = \left(x^{-m-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\right)^{\delta} v.$$

Что касается того случая, когда въ уравненіи (7) δ означаетъ отрицательное число, то, замѣнивъ въ немъ δ черезъ $-\delta$, на основаніи формулы (23), въ которой нужно предварительно положить $p=0$, получимъ:

$$u = x^{\delta(m+n)+k-n}\left(x^{-m-n+k}\frac{d^k}{dx^k}\right)^{\delta} x^{k-n} v.$$

§ 14. Перейдемъ теперь къ констатированію новыхъ случаевъ интегрируемости уравненія Рикатти. Съ этою цѣлью обратимся къ формулѣ (23) и сдѣлаемъ въ ней положенія

$$p = \delta = r - 1,\quad \alpha_i = \frac{1}{(-i)!},\quad u_{-\delta} = \frac{d^k v}{dx^k};$$

тогда формула эта дастъ

$$x^{k-n} . u = \left(x^{-m-n+k}\frac{d^k}{dx^k}\right)^{r-1} x^{(r-1)(m+n)+k-n} . \frac{d^k v}{dx^k}.$$

Этимъ отношеніемъ выражается связь между интегралами слѣдующихъ уравненій

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{(r-1)(m+n)}\frac{d^n v}{dx^n}\right) = x^{m+(r-1)(m+n)}\frac{d^k v}{dx^k}.$$

Но легко видѣть, что второе изъ нихъ при условіи

$$m + (r-1)(m+n) = 0$$

дѣлается тождественнымъ съ первымъ. Отсюда слѣдуетъ, что функція, интегрирующая уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{r}} . u\,, \tag{28}$$

интегрируетъ въ то же время и такое уравненіе:

$$\left(x^{k-\frac{n}{r}}\frac{d^k}{dx^k}\right)^r u = x^{k-n}\,.\,u.$$

Свойство интеграла уравненія Рикатти, выражаемое предыдущимъ отношеніемъ, имѣетъ мѣсто для всякаго k (при $k=0, n, \frac{n}{r}$ оно легко повѣряется). Особенную важность имѣетъ это свойство для случая $k=1$, приводящаго къ уравненію

$$\left(x^{1-\frac{n}{r}}\frac{d}{dx}\right)^r u = x^{1-n}u,$$

которому при условіи

$$x^{1-\frac{n}{r}} = a\frac{dx}{dz},$$

вызывающемъ существованіе отношенія

$$z = \frac{ar}{n}x^{\frac{n}{r}}$$

можно дать такой видъ:

$$\frac{d^r u}{dz^r} = z^{-r+\frac{r}{n}}u, \tag{29}$$

гдѣ относительно a предположено:

$$a^r = \left(\frac{n}{r}\right)^{r(1-n)}$$

Понятно, что въ какомъ бы отношеніи другъ къ другу ни стояли величины чиселъ n и r, разъ намъ извѣстенъ интегралъ одного изъ предыдущихъ уравненій, полный интегралъ другаго найдется изъ него посредствомъ замѣны x черезъ z или, наоборотъ, по формулѣ

$$(r^r x)^n = (n^n z)^r.$$

Дѣйствительно, формула эта даетъ nr различныхъ значенiй какъ для $x^{\frac{1}{r}}$ такъ и для $z^{\frac{1}{n}}$. Отсюда слѣдуетъ, что всякiй (неразлагаемый) частный интегралъ одного изъ упомянутыхъ уравненiй способенъ дать полный интегралъ другаго. Такъ, напримѣръ, мы видѣли, что частный интегралъ уравненiя

$$\frac{d^2v}{dx^2} = x^{-2+\frac{2}{2k+1}} \,.\, v$$

выражается отношенiемъ

$$v = x\frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} e^{\alpha_i \xi^{1/2}}, \quad \xi = (2k+1)^2 x^{\frac{2}{2k+1}},$$

въ которомъ α_i означаетъ корень уравненiя $\alpha^2 = 1$.

Кромѣ того легко подмѣтить

$$\alpha_i \xi^{1/2} = 2\beta_i z^{1/2}, \quad \beta^{2k+1} = 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что полный интегралъ уравненiя

$$\frac{d^{2k+1}v}{dx^{2k+1}} = z^{-\frac{2k+1}{2}} \,.\, v$$

будетъ:

$$v = z^{\frac{2k+1}{2}} \,.\, \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \sum_{i=1}^{2k+1} C_i e^{2\beta_i z^{1/2}}$$

гдѣ C_i произвольное постоянное. Этому отношенію, если угодно, можно сообщить иную форму. Именно, представивъ данное уравненіе въ видѣ

$$v = z^{\frac{2k+1}{2}} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left(\frac{d^k v}{dz^k} \right),$$

заключаемъ

$$\frac{d^k v}{dz^k} = \sum_{i=1}^{2k+1} C_i\, e^{2\beta_i z^{1/2}},$$

отсюда получаемъ

$$v = \sum_{i=1}^{2k+1} C_i \int e^{2\beta_i z^{1/2}} . dz^k$$

Извѣстно, что уравненіе (29) интегрируется при $n = ri \pm 1$, гдѣ i цѣлое положительное число; отсюда заключаемъ, что уравненіе (28) интегрируется въ томъ случаѣ, когда r есть какой-нибудь дѣлитель того или другаго изъ чиселъ $n-1$, $n+1$. Испытавъ этимъ новымъ признакомъ способность уравненія Рикатти, модуль котораго m, а порядокъ n, интегрироваться конечною формой, получимъ:

$$m = -n \pm \frac{n}{r - \delta n}$$

Хотя случаи интегрируемости уравненія Рикатти, указанные нами выше, суть частные по отношенію къ сейчасъ найденнымъ (они получаются изъ послѣднихъ при допущеніи $r=1$, $n-1$, $n+1$ возможномъ при всякомъ n), однако предыдущая формула не обнимаетъ собою всѣхъ подобныхъ случаевъ и не есть, слѣдовательно, самая общая. По поводу этой послѣдней мы замѣтимъ лишь, что она будетъ имѣть видъ предыдущей формулы, но что r получитъ въ ней болѣе общее (не уловленное нами) значенiе.

§ 15. До сего времени мы предполагали, что числа k и n, фигурирующiя въ уравненiи (1), удовлетворяютъ условiю $k<n$. Это предположенiе не необходимостью, однако, было вызвано, а просто желанiемъ не вводить въ вычисленiе производныхъ съ отрицательными указателями; поэтому полученные выше результаты имѣютъ мѣсто и для того случая, когда $k>n$. Не останавливаясь на томъ, какую форму при этомъ условiи принимаетъ уравненiе (1), займемся уравненiями (20) и (21). Если сдѣлаемъ въ нихъ подстановки

$$u=\frac{d^{k-n}}{dx^{k-n}}y,\quad v=\frac{d^{k-n}}{dx^{k-n}}w$$

и въ результатѣ напишемъ n вмѣсто $k-n$, то получимъ:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^p y\right)=x^q\frac{d^n y}{dx^n} \tag{30}$$

$$\frac{d^k w}{d\xi^k}=\xi^m\frac{d^n w}{dx^n}=x^{mc}\frac{d^n w}{dx^n} \tag{31}$$

Замѣтивъ далѣе, что условiя интегрируемости уравненiй (20) и (21) на основанiи предыдущаго параграфа выражаются формулами

$$p=\pm\frac{n\delta}{ni-r},\quad q=-n\pm\frac{n(\delta+1)}{ni-r}$$

$$c=1\pm\frac{n\delta}{ni-r},\quad m=-n\pm\frac{n+n\delta(n-k)}{n(i\pm\delta)-r},$$

гдѣ δ и i цѣлыя числа, а r одинъ изъ дѣлителей $n\pm1$, заключаемъ, что уравненiя (30) и (31) интегрируются во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$p = \pm \frac{(k-n)\delta}{(k-n)i-r}\,,\quad q = n-k \pm \frac{(k-n)(\delta+1)}{(k-n)i-r}$$

$$c = 1 \pm \frac{(k-n)\delta}{(k-n)i-r}\,,\quad m = n-k \pm \frac{(k-n)(1-n\delta)}{(k-n)(i\pm\delta)-r}\,,$$

гдѣ r означаетъ какого-либо дѣлителя того или другаго изъ чиселъ $k-n+1$, $k-n-1$. Хотя въ уравненіяхъ (30) и (31) подъ n нужно разумѣть число меньшее k, однако легко подмѣтить, что условія интегрируемости этихъ уравненій будутъ выражаться предыдущими формулами и въ томъ случаѣ, когда $n > k$. Дѣйствительно, распространяя полученные въ предыдущихъ параграфахъ результаты на отрицательныя значенія n (что всегда возможно, какъ это легко видѣть изъ разсмотрѣнія нумера втораго) и замѣняя въ уравненіяхъ (20) и (21) n черезъ $-n$, мы послѣ нѣкоторыхъ очевидныхъ преобразованій перейдемъ отъ этихъ уравненій къ такимъ, которыя и по виду и по условіямъ интегрируемости будутъ тождественны съ уравненіями (30) и (31), но въ которыхъ n будетъ больше k.

Въ заключеніе нашей статьи замѣтимъ, что случаи интегрируемости уравненій (30) и (31), а также полные интегралы ихъ для этихъ случаевъ, могутъ быть найдены изъ разсмотрѣнія уравненія

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^i u^i = x^m u^n\,,$$

изслѣдованіе котораго по способу академика Имшенецкаго, прилично видоизмѣненному, не представляетъ никакихъ затрудненій.