

О МНОГОУГОЛЬНИКАХЪ ПОНСЕЛЕ.

(СТАТЬЯ ВТОРАЯ).

К. А. Андреева.

§ 1.

Въ предыдущей статьѣ мы ограничили наши разсужденія случаемъ лишь треугольниковъ и сверхъ того устранили изъ разсмотрѣнія тотъ случай, когда два данныя коническія сѣченія, относительно которыхъ многоугольники суть вписанные и описанные, имѣютъ двойное соприкосновеніе. Послѣдній случай доступенъ болѣе простому, такъ сказать, непосредственному изслѣдованію, и потому мы разсмотримъ его особо въ заключеніе настоящей статьи, цѣль которой есть распространеніе изложеннаго въ предыдущей на многоугольники съ какимъ угодно числомъ сторонъ.

Пусть, какъ и прежде, S и T будутъ два данныя коническія сѣченія и g точка, взятая какъ нибудъ на первомъ изъ нихъ, которую, однако, будемъ предполагать на первое время лежащею внѣ коническаго сѣченія T (фиг. 5-я). Проведя изъ g двѣ касательныя къ T и соединивъ прямою точки a_1 и a_2 ихъ вторичнаго пересѣченія съ S , получимъ треугольникъ $a_1 g a_2$, вписанный въ S и имѣющій стороны, за исключеніемъ одной $a_1 a_2$, касательными къ T . Эту сторону $a_1 a_2$ мы назвали вообще *прямою противоположащею точкѣ g относительно коническаго сѣченія T* .

Изъ точекъ a_1 и a_2 можно провести вторыя касательныя къ T . Построивъ эти касательныя и назвавъ чрезъ α точку ихъ пересѣченія, получимъ четырехугольникъ $\alpha a_1 g a_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, исключая одной α , противоположной вершинѣ g , на коническомъ сѣченіи S . Вершину α такого четырехугольника, противоположную вершинѣ g , мы будемъ называть вообще *точкою противоположащею точкѣ g относительно T* .

Если назовемъ буквами b_1 и b_2 точки, въ которыхъ прямыя $a_1\alpha$ и $a_2\alpha$ пересѣкаютъ вторично коническое сѣченіе S , и соединимъ эти двѣ точки прямою, то получимъ пятиугольникъ $b_1 a_1 g a_2 b_2$, вписанный въ S и имѣющій всѣ стороны, за исключеніемъ одной $b_1 b_2$, противоположной вершинѣ g , касательными къ T . Эту сторону $b_1 b_2$ такого пятиугольника мы будемъ вообще называть *второю противоположащею прямою данной точки g* , разумѣя, слѣдовательно, подъ первую противоположащею прямою прямою $a_1 a_2$.

Проведя чрезъ b_1 и b_2 вторыя касательныя къ T и обозначивъ чрезъ β точку ихъ пересѣченія, получимъ шестиугольникъ, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, исключая одной β , противоположной вершинѣ g , на коническомъ сѣченіи S . Вершину β этого шестиугольника будемъ вообще называть *второю противоположащею точкою данной точки g* .

Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ для точки g безпредѣльный рядъ послѣдовательныхъ противоположащихъ прямыхъ и противоположащихъ точекъ. Въ этомъ рядѣ прямыя и точки чередуются между собою, такъ что для каждой противоположащей точки существуютъ двѣ смежныя противоположащія прямыя, изъ которыхъ одна ей непосредственно предшествуетъ, а другая за ней непосредственно слѣдуетъ. Точно также и для каждой противоположащей прямой имѣются двѣ смежныя противоположащія точки.

Для первой противоположащей прямой одна изъ двухъ смежныхъ противоположащихъ точекъ (предшествующая) есть сама данная точка g , которую по этому можно называть своею нулевою противоположащею точкой.

Если случится, что n -ая противоположащая точка будетъ лежать на коническомъ сѣченіи S , то слѣдующая ($n + 1$ -я) противоположащая прямая будетъ касательною къ S въ этой точкѣ. Всѣ же дальнѣйшія противоположащія точки и прямая будутъ совпадать съ предыдущими, но только въ обратной послѣдовательности, такъ что $2n + 1$ -я противоположащая точка будетъ совпадать съ данною точкой g .

Точно также, если n -ая противоположащая прямая есть касательная къ T , то слѣдующая (n -ая) противоположащая точка будетъ точкою прикосновенія этой касательной. Всѣ же дальнѣйшія противоположащія прямая и точки будутъ совпадать съ предыдущими, но только въ обратномъ порядкѣ, такъ что $2n$ -ая противоположащая точка совпадетъ съ g .

§ 2.

Предыдущее построение послѣдовательныхъ противоположащихъ прямыхъ и точекъ не выполнимо въ томъ случаѣ, когда данная точка g находится внутри коническаго сѣченія T и когда, слѣдовательно, касательныя изъ g къ этому коническому сѣченію не существуютъ. Мы уже знаемъ, однако, что первая противоположащая прямая существуетъ при всякомъ положеніи g на коническомъ сѣченіи S . Постараемся убѣдиться въ томъ же и для всѣхъ слѣдующихъ противоположащихъ прямыхъ и точекъ.

Положимъ, что μ есть какая-нибудь противоположащая точка (фиг. 6-я), а m_1, m_2 и n_1, n_2 двѣ смежныя съ нею противоположащія прямая. По свойству четырехугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, заключаемъ, что поляръ точки μ относи-

тельно S проходить чрезъ точку p пересѣченія противоположащихъ прямыхъ m_1, m_2 и n_1, n_2 и есть въ то-же время полярной-же точки относительно совокупности этихъ прямыхъ, рассматриваемой какъ одно коническое сѣченіе. Построивъ эту полярю pq и соединивъ прямою линіей точки μ и p , будемъ имѣть по этому, что четыре прямыя $p\mu$, pm_1 , pq , pn_1 составляютъ гармоническую группу лучей. Отсюда слѣдуетъ, что, зная положеніе противоположащей точки μ и одной изъ смежныхъ съ нею противоположащихъ прямыхъ, мы можемъ построить другую изъ этихъ прямыхъ какъ четвертый гармоническій лучъ къ тремъ лучамъ пучка уже извѣстнымъ.

Построеніе это выполнимо при всякомъ положеніи точки μ , независимо отъ существованія касательныхъ къ T изъ этой точки. Оно убѣждаетъ насъ въ существованіи какой бы ни было противоположащей прямой при условіи, что существуютъ всѣ противоположащія прямыя и точки ей предшествующія, и можетъ быть принято за общее геометрическое опредѣленіе противоположащихъ прямыхъ.

Положимъ теперь, что n_1, n_2 есть какая-нибудь противоположащая прямая (та-же фиг.), а μ и ν двѣ смежныя съ нею противоположащія точки. По свойству четырехугольника, описаннаго около коническаго сѣченія, полюсъ прямой n_1, n_2 относительно T долженъ лежать на прямой $\mu\nu$ и быть въ то-же время полюсомъ этой прямой относительно совокупности точекъ μ и ν , рассматриваемой какъ одно коническое сѣченіе. Обозначая чрезъ p этотъ полюсъ, а чрезъ φ точку пересѣченія прямыхъ n_1, n_2 и $\mu\nu$, будемъ имѣть поэтому, что четыре точки μ , φ , ν , p составляютъ гармоническую группу. Отсюда слѣдуетъ, что, имѣя противоположащую прямую n_1, n_2 и одну изъ смежныхъ съ нею противоположащихъ точекъ, мы можемъ найти другую построениемъ четвертой гармонической къ тремъ извѣстнымъ уже точкамъ ряда.

Построение это, какъ выполняемое при всякомъ положеніи данныхъ противоположащихъ, убѣждаетъ насъ въ существованіи какой бы ни было противоположащей точки при условіи, что все предыдущія противоположащія прямыя и точки существуютъ. Оно можетъ быть разсматриваемо какъ общее геометрическое опредѣленіе противоположащихъ точекъ.

Такъ-какъ существованіе первой противоположащей прямой уже доказано въ предыдущей статьѣ и такъ-какъ сама данная точка g есть предшествующая этой прямой противоположащая точка (нулевая), то сказаннаго въ настоящемъ параграфѣ достаточно, чтобы убѣдиться, что все противоположащія прямыя и точки существуютъ при всякомъ положеніи точки g на коническомъ сѣченіи S .

Въ виду указанной выше цѣли настоящей статьи намъ предстоитъ рѣшить вопросъ: какимъ образомъ перемѣщается каждая изъ противоположащихъ точекъ и прямыхъ, когда данная точка g перемѣщается по коническому сѣченію S ?

§ 3.

Обратимся опять къ разсмотрѣнію какой-нибудь противоположащей точки μ и двухъ смежныхъ съ нею противоположащихъ прямыхъ m_1, m_2 и n_1, n_2 (фиг. 6-я).

Коническое сѣченіе S и совокупность двухъ прямыхъ m_1, m_2 и n_1, n_2 имѣютъ общій полярный треугольникъ ppq , который будетъ таковымъ же и для совокупности двухъ прямыхъ μn_1 и μn_2 (случайныхъ), какъ для конического сѣченія, принадлежащаго тому-же пучку. Но послѣднія двѣ прямыя должны быть касательными къ T , а потому прямыя μp и μq , дѣлящія ихъ гармонически, должны быть сопряженными относительно T .

Отсюда слѣдуетъ, что, построивъ полярную точку μ относительно T и назвавъ буквами r и s точки ея пересѣченія съ прямыми μq и μp , будемъ имѣть, что r есть полюсъ прямой μp

относительно T . Такъ-какъ въ то-же время μr есть полярна точки p относительно S , то заключаемъ, что точки p и r суть сопряженныя между собою относительно каждаго изъ коническихъ сѣченій S и T , а слѣдовательно и относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST) . Прямая rs будетъ поэтому полярною точки p относительно нѣкотораго коническаго сѣченія V , принадлежащаго пучку (ST) .

Назовемъ буквами e и f точки пересѣченія прямой rs съ прямыми $m_1 p$ и $n_1 p$ и пусть ϵ будетъ точка, въ которой полярна точки e относительно T встрѣчаетъ прямую $m_1 p$. Такъ какъ полярна точки e относительно совокупности прямыхъ μn_1 и μn_2 есть та-же, что и относительно T , а полярна той-же точки относительно совокупности прямыхъ $m_1 p$ и $n_1 p$ есть прямая $m_1 p$, то точка ϵ пересѣченія этихъ поляръ есть сопряженная съ e относительно каждой изъ этихъ двухъ совокупностей, а съ тѣмъ вмѣстѣ и относительно коническаго сѣченія S , принадлежащаго съ ними къ одному и тому-же пучку. слѣдовательно, точки e и ϵ , будучи сопряженными между собою относительно T и S , должны быть таковыми же относительно всѣхъ прочихъ кривыхъ пучка (ST) , а въ томъ числѣ и коническаго сѣченія V .

Точка ϵ , очевидно, не можетъ совпадать съ p , потому что въ противномъ случаѣ точки e и r имѣли бы по отношенію къ T одну и ту-же полярну μp , что возможно только тогда, когда T есть совокупность двухъ прямыхъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что коническое сѣченіе V , принадлежащее пучку (ST) и имѣющее прямую rs полярною точки p , проходитъ чрезъ e и касается въ этой точкѣ прямой $m_1 p$. Въ самомъ дѣлѣ, полярна точки e относительно V должна проходить чрезъ точки p и ϵ , различныя между собою и сопряженныя съ e относительно этой кривой; слѣдовательно, эта полярна есть прямая $m_1 p$ и, такъ-какъ она проходитъ чрезъ свой полюсъ e , то должна касаться V въ этой точкѣ.

Точно также легко убѣдиться, что прямая n_1p касается конического сѣченія V въ точкѣ f . Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію.

Поляра всякой противоположащей точки относительно конического сѣченія T встрѣчаетъ двѣ смежныя съ нею противоположащія прямая въ точкахъ, въ которыхъ обѣ эти прямая касаются одного и того-же конического сѣченія пучка (ST).

Если мы будемъ разсматривать какую нибудь противоположащую прямую и двѣ смежныя съ нею противоположащія точки, и приложимъ къ нимъ разсужденія аналогичныя съ предыдущими и составляющія, собственно говоря, преобразование вышеизложеннаго по принципу двойственности или методу взаимныхъ поляръ, то получимъ въ результатѣ слѣдующій, подобный предыдущему, выводъ.

Прямая, соединяющая полюсъ какой нибудь противоположащей прямой относительно S съ двумя смежными съ нею противоположащими точками, касаются въ этихъ точкахъ одного и того-же конического сѣченія системы [ST]¹.

§ 4.

Точка f , находящаяся при пересѣченіи прямыхъ rs и n_1p , имѣетъ полярю относительно T прямую $\mu\rho$, соединяющую полюсы μ и ρ этихъ прямыхъ (фиг. 6-я). Такъ какъ на этой же прямой $\mu\rho$ должна лежать, какъ мы видѣли, и точка ν , другая противоположащая точка смежная съ противоположащей прямой n_1p , то поляря точки ν относительно T должна также проходить черезъ f . Противоложащая прямая n_1p пересѣкается, слѣдователь-

¹ Системою [ST] мы будемъ называть, какъ и въ предыдущей статьѣ, систему взаимную съ пучкомъ, т. е. состоящую изъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ съ S и T общія касательныя.

но, полярными обѣихъ смежныхъ съ нею противоположащихъ точекъ μ и ν относительно T въ одной и той же точкѣ f . Изъ этого заключаемъ, на основаніи перваго изъ предложеній предыдущаго параграфа, что, какъ обѣ противоположащія прямыя смежныя съ точкою μ , такъ и обѣ противоположащія прямыя смежныя съ слѣдующею противоположащею точкой ν касаются одного и того же коническаго сѣченія V пучка (ST).

Имѣя въ виду, что сказанное относится къ какимъ бы то ни было послѣдовательнымъ противоположащимъ прямымъ, мы убѣждаемся, что *всѣ противоположащія прямыя какой либо точки g коническаго сѣченія S относительно коническаго сѣченія T суть касательныя къ одному и тому же коническому сѣченію V пучка (ST).*

Это коническое сѣченіе V опредѣляется, какъ мы видѣли въ предыдущей статьѣ, принадлежащею ему точкою h , сопряженною съ g относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST).

Разсужденія взаимныя съ предыдущими и опирающіяся на второе предложеніе предыдущаго параграфа, должны, очевидно, привести къ подобному же заключенію относительно противоположащихъ точекъ; именно:

Всѣ противоположащія точки какой либо точки g коническаго сѣченія S относительно T лежатъ на одномъ и томъ же коническомъ сѣченіи системы [ST].

Это коническое сѣченіе, которое будемъ обозначать черезъ W , проходитъ, очевидно, черезъ g (какъ одну изъ противоположащихъ точекъ) и опредѣляется вполне касающеюся его прямою, сопряженною относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы [ST] съ касательною къ S въ точкѣ g .

Назовемъ чрезъ W' взаимную полярную коническаго сѣченія W относительно T . Поляры послѣдовательныхъ противоположащихъ точекъ относительно T , будучи касательными къ W' , пересѣкаются, какъ показано выше, въ точкахъ прикосновенія коническаго сѣ-

ченія V съ противоположными прямыми. Следовательно, эти полюсы составляютъ ломаную линію, вписанную въ коническое сѣченіе V и описанную около W' . Касательныя къ V въ вершинахъ угловъ этой ломаной суть противоположція прямыя, а полюсы сторонъ ея относительно T — противоположція точки. Такимъ образомъ получается другой способъ построенія противоположащихъ точекъ и прямыхъ для данной точки g конического сѣченія S .

Если назовемъ черезъ V' взаимную полярю конического сѣченія V относительно S , то, замѣчая, что полюсы двухъ послѣдовательныхъ противоположащихъ прямыхъ относительно S лежатъ на прямой, проходящей чрезъ промежуточную противоположащую точку и касающейся въ ней къ W , убѣждаемся, что всѣ эти полюсы суть вершины угловъ другой ломаной линіи, вписанной въ V' и описанной около W . Эту ломаную можно также пользоваться для построенія противоположащихъ, такъ какъ точки прикосновенія ея сторонъ съ коническимъ сѣченіемъ W суть противоположція точки, а полюсы ея вершинъ относительно S — противоположція прямыя.

§ 5.

Задача. Даны два коническія сѣченія S и T ; предполагая, что известна некоторая противоположащая точка p , найти обѣ смежныя съ нею противоположащія прямыя.

На основаніи сказаннаго выше (§ 3), для рѣшенія этой задачи нужно только найти точку p пересѣченія искомымъ противоположащихъ прямыхъ (фиг. 6-я), ибо когда эта точка найдена, то вопросъ сводится на построеніе проходящихъ чрезъ нее касательныхъ къ вполне опредѣленному коническому сѣченію V , относительно котораго полярю точки p есть та же прямая ef , какъ и полярю данной точки p относительно T .

Точка p находится при пересѣченіи поляръ pq данной точки μ относительно S съ прямою μp , которая есть одна изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно S и T^1 , а слѣдовательно и относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$. Другая изъ этихъ прямыхъ есть μq , на которой лежатъ полюсы q и r первой относительно S и T .

Отсюда слѣдуетъ, что предложенная задача имѣетъ два рѣшенія, которыя получаются слѣдующимъ построениемъ.

Сперва чрезъ данную точку μ проводимъ двѣ прямыя сопряженныя между собою относительно обоихъ коническихъ сѣченій S и T и находимъ точки p и q пересѣченія этихъ прямыхъ съ полярю данной точки μ относительно S . Построивъ затѣмъ полярю ef точки μ относительно T , мы опредѣлимъ два коническія сѣченія пучка (ST) , изъ которыхъ одно имѣетъ полюсомъ этой прямой точку p , а другое — точку q . Касательныя изъ p къ первому изъ этихъ коническихъ сѣченій будутъ представлять одно рѣшеніе задачи, а касательныя изъ q ко второму — другое.

Такимъ образомъ мы видимъ, что произвольно взятой противолежащей точкѣ μ соотвѣтствуютъ по отношенію къ кривымъ S и T двѣ пары смежныхъ противолежащихъ прямыхъ, которыя при томъ же суть случайныя, т. е. могущія при нѣкоторыхъ положеніяхъ данной точки μ вовсе не существовать. Если же, однако, одна изъ двухъ смежныхъ съ μ противолежащихъ прямыхъ извѣстна напередъ и требуется найти другую, то во первыхъ эта послѣдняя непременно существуетъ, а во вторыхъ другое рѣшеніе разсматриваемой задачи совершенно устраняется, какъ не относящееся непосредственно къ вопросу.

Задача. Даны два коническія сѣченія S и T ; предполагая, что извѣстна нѣкоторая противолежащая прямая, найти обѣ смежныя съ нею противолежащія точки.

Будучи взаимною съ предыдущей, задача эта имѣть также два рѣшенія, которыя на такихъ же основаніяхъ, какъ указан- ныя выше, получаютъ слѣдующимъ построениемъ (та же фиг.).

Сперва находимъ на данной прямой n, p двѣ точки φ и f , сопряженныя между собою относительно обоихъ коническихъ сѣченій S и T , и соединяемъ ихъ прямыми съ полюсомъ p дан- ной прямой относительно T . Найдя затѣмъ полюсъ той же пря- мой относительно S , мы опредѣлимъ два коническія сѣченія си- стемы $[ST]$, изъ которыхъ одно будетъ имѣть эту точку полю- сомъ прямой φp , а другое — полюсомъ прямой $f p$. Точки μ и ν пересѣченія перваго изъ этихъ коническихъ сѣченій съ прямою φp представятъ одно рѣшеніе предложенной задачи; точки же пересѣченія втораго съ прямою $f p$ — другое.

Замѣчаніе, сдѣланное выше о рѣшеніяхъ предыдущей задачи, примѣняется, очевидно, соотвѣтственнымъ образомъ и къ настоя- щей.

§ 6.

Приступаемъ теперь къ вопросу, поставленному въ концѣ 2-го параграфа. Отвѣтъ на этотъ вопросъ, данный нами въ преды- дущей статьѣ лишь для первой противолежащей прямой, во всей своей общности выражается слѣдующимъ предложеніемъ.

При перемѣщеніи точки d по коническому сѣченію S каж- дая ея противолежащая прямая относительно коническаго сѣченія T огибаетъ коническое сѣченіе, принадлежащее пуч- ку (ST) , а каждая противолежащая точка перемѣщается по коническому сѣченію, принадлежащему системѣ $[ST]$.

Для того, чтобы убѣдиться въ полной справедливости этого предложенія нужно только доказать его для какой нибудь про- тиволежащей прямой въ предположеніи, что оно справедливо для предыдущихъ противолежащихъ точки и прямой, а также для какой нибудь противолежащей точки въ предположеніи, что оно

имѣть мѣсто для предыдущихъ противоположащихъ прямой и точки. Въ самомъ дѣлѣ, справедливость предложенія для первой противоположащей прямой нами уже доказана, а для предшествующей ей противоположащей точки, которая есть сама точка g , она очевидна сама собою. Слѣдовательно, такое доказательство, какъ указанное, позволяетъ намъ прежде всего заключить, что предложеніе справедливо для первой противоположащей точки, затѣмъ для второй противоположащей прямой, затѣмъ для второй противоположащей точки, и т. д.

Кромѣ того, изъ двухъ частей указаннаго сейчасъ плана доказательства, очевидно, достаточно привести только одну, относящуюся, на примѣръ, къ перемѣщенію противоположащей прямой. Обѣ эти части, будучи взаимными, представляютъ въ сущности два ряда равнозначущихъ доводовъ, вслѣдствіе чего при полной убѣдительности одной изъ нихъ не можетъ быть сомнѣнія въ справедливости доказываемаго другою.

И такъ, положимъ, что намъ извѣстно, что какая нибудь противоположащая точка μ , при перемѣщеніи точки g по S , перемѣщается по нѣкоторому коническому сѣченію системы $[ST]$ и что въ то же время предшествующая ей противоположащая прямая перемѣщается, огибая коническое сѣченіе пучка (ST) . Постараемся убѣдиться, что и слѣдующая, т. е. другая смежная съ точкою μ , противоположащая прямая огибаетъ коническое сѣченіе пучка (ST) .

Пусть C будетъ коническое сѣченіе, описываемое точкой μ , и D его взаимная полярна относительно T . Коническія сѣченія S, T, C, D , какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 5 предыдущей статьи, имѣютъ общій полярный треугольникъ, а потому, какъ показано въ § 6 той же статьи, въ пучкѣ (ST) можно найти два такіа коническія сѣченія X и Y , что взаимныя полярны E и F кривой D относительно этихъ коническихъ сѣченій будутъ принадлежать также пучку (ST) . Вообще говоря,

коническія сѣченія E и F суть случайныя, могущія не существовать, но мы увидимъ вскорѣ, что сдѣланное выше предположеніе требуетъ существованія одного изъ нихъ и тѣмъ обусловливаетъ существованіе другаго.

Между точками кривыхъ C , E и F имѣетъ мѣсто проективное соотвѣтствіе, такъ какъ онѣ суть полюсы относительно T , X и Y касательныхъ къ одному и тому же коническому сѣченію D .

Вообразимъ точку μ въ какомъ нибудь опредѣленномъ положеніи на коническомъ сѣченіи C (фиг. 7-я) и пусть ϵ и φ будутъ соотвѣтственныя ей точки кривыхъ E и F , а r точка прикосновенія къ D ихъ общей полярны ef относительно X и Y . Назовемъ далѣе черезъ p точку пересѣченія касательныхъ въ ϵ и φ къ коническимъ сѣченіямъ E и F и постараемся доказать, что эти двѣ касательныя суть двѣ противолежащія прямыя смежныя съ противолежащей точкой μ .

Для этого, основываясь на сказанномъ въ параграфахъ 5-мъ и 3-мъ, нужно во первыхъ показать, что точка p находится при пересѣченіи полярны точки μ относительно S съ одною изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$. Во вторыхъ же нужно убѣдиться, что касательныя къ E и F въ точкахъ ϵ и φ суть въ то-же время касательныя изъ точки p къ коническому сѣченію, принадлежащему пучку (ST) и имѣющему полярною точки p прямую ef , т. е. полярною точки μ относительно T . Слѣдующія разсужденія выяснятъ оба эти пункта въ отдѣльности.

§ 7.

(VI) Касательныя въ точкахъ μ , ϵ и φ къ коническимъ сѣченіямъ C , E и F суть полярны одной и той же точки r относительно трехъ коническихъ сѣченій T , X и Y , принадлежа-

щихъ пучку (ST); вслѣдствіе этого онѣ должны проходить чрезъ одну и ту же точку p , сопряженную съ r относительно всѣхъ кривыхъ этого пучка. Такъ какъ μ и r суть полюсы прямой μr относительно двухъ коническихъ сѣченій S и T системы $[ST]$, то на прямой μr находятся полюсы прямой μp относительно всѣхъ коническихъ сѣченій этой системы. Другими словами, прямая μp и μr суть сопряженные между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$.

Полюсъ прямой μp относительно S есть нѣкоторая точка q , лежащая на прямой μr и не совпадающая съ r , полюсомъ той же прямой относительно T . Отсюда заключаемъ, что полярна точка p относительно S , должна проходить чрезъ точку q сопряженную съ нею относительно S и чрезъ точку r сопряженную съ нею относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST). Слѣдовательно, эта полярна есть прямая qr , проходящая чрезъ μ ; а это показываетъ, что и полярна точки μ относительно S проходитъ чрезъ p .

И такъ, дѣйствительно, точка p находится при пересѣченіи полярны точки μ относительно S съ одною изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ μ и сопряженныхъ между собою относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы $[ST]$.

2) Полярна точки μ относительно T , будучи касательною въ точкѣ r къ коническому сѣченію D , имѣетъ своими полюсами относительно X и Y точки ε и φ . Вслѣдствіе этого, назвавъ чрезъ e и f точки пересѣченія этой полярны съ касательными въ ε и φ къ кривымъ E и F , будемъ имѣть, что точки e и ε суть сопряженные между собою относительно коническихъ сѣченій X и E , а точки f и φ — относительно коническихъ сѣченій Y и F . Слѣдовательно, это суть двѣ пары точекъ сопряженныхъ относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST).

Такъ какъ мы уже видѣли, что r и p суть также двѣ точки сопряженные относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST), то

въ этомъ пучкѣ должно существовать такое коническое сѣченіе V , для котораго ef есть полярна точки p . Полярна точки e относительно V должна проходить чрезъ p , какъ сопряженную съ нею относительно этого коническаго сѣченія, и чрезъ ε , какъ сопряженную съ нею относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST) . Слѣдовательно, эта полярна есть касательная къ V въ точкѣ e . Точно также убѣждаемся, что прямая fp касается V въ точкѣ f .

И такъ, дѣйствительно, прямая $p\varepsilon$ и $p\varphi$ суть двѣ касательныя изъ точки p къ коническому сѣченію, принадлежащему пучку (ST) и имѣющему полярною точки p полярною точки μ относительно T .

Все сказанное относилось къ совершенно произвольному положенію точки μ на коническомъ сѣченіи C , и такъ какъ два коническія сѣченія E и F вполне опредѣляются кривыми S , T и C и не зависятъ отъ положенія точки μ на C , то убѣждаемся, что при перемѣщеніи μ въ какое нибудь другое положеніе на коническомъ сѣченіи C обѣ смежныя съ нею противолежащія прямая должны оставаться касательными къ тѣмъ же самымъ коническимъ сѣченіямъ E и F .

Предположеніе, что противолежащая прямая, предшествующая точкѣ μ , огибаетъ коническое сѣченіе пучка (ST) , позволяетъ намъ заключить, что одно изъ двухъ коническихъ сѣченій E и F , именно, огибаемое предшествующей точкѣ μ противолежащей прямой, непременно существуетъ. Слѣдовательно, и послѣдующая за точкой μ противолежащая прямая огибаетъ также непременно существующее коническое сѣченіе пучка (ST) . Въ этомъ именно намъ и нужно было убѣдиться.

§ 8.

Когда точка g находится внѣ коническаго сѣченія T , то ея n -ая противолежащая прямая есть сторона $(2n + 1)$ -угольника, вписаннаго въ S и имѣющаго всѣ стороны, кромѣ одной,

касательными къ T , а n -ая противоположная точка есть вершина $(2n + 2)$ -угольника, описаннаго около T и имѣющаго всѣ вершины, кромѣ одной, на коническомъ сѣченіи S .

Слѣдовательно, доказанное нами предложеніе, включая въ себѣ заразъ оба взаимныя предложенія о многоугольникахъ Понселе, приведенныя нами во 2-мъ параграфѣ предыдущей статьи, имѣетъ въ то же время тотъ недостатокъ, что представляетъ обобщеніе перваго изъ нихъ лишь для случая многоугольника съ нечетнымъ, а втораго — лишь для случая многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ. Этотъ недостатокъ не трудно, однако, восполнить, пользуясь слѣдующими соображеніями.

Мы говорили до сихъ поръ о прямыхъ и точкахъ противоположащихъ нѣкоторой точкѣ g , находящейся на коническомъ сѣченіи S , которая и была, такъ сказать, началомъ или исходнымъ пунктомъ всѣхъ построеній, къ которымъ относились наши разсужденія. Возьмемъ теперь для той же цѣли какуюнибудь прямую G , касающуюся коническаго сѣченія T (фиг. 8-ая).

Допустимъ, что эта прямая пересѣкаетъ S въ двухъ точкахъ α_1 и α_2 . Проведя чрезъ эти двѣ точки вторыя касательныя къ T и назвавъ ихъ точку пересѣченія буквою a , получимъ треугольникъ $\alpha_1 a \alpha_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, кромѣ одной, на коническомъ сѣченіи S . Точка a есть, слѣдовательно, вершина этого треугольника, противоположащая сторонѣ G . Ее можно, по примѣру предыдущаго, назвать *точкою, противоположащею касательной G коническаго сѣченія T относительно коническаго сѣченія S* .

Прямая $\alpha_1 a$ и $\alpha_2 a$ встрѣчаютъ коническое сѣченіе S вторично въ нѣкоторыхъ точкахъ β_1 и β_2 . Соединивъ эти точки прямою, получимъ четырехугольникъ $\alpha_1 \beta_1 \beta_2 \alpha_2$, вписанный въ S и имѣющій всѣ стороны, кромѣ одной $\beta_1 \beta_2$, противоположащей сторонѣ G , касательными къ T . Будемъ называть эту сторону $\beta_1 \beta_2$ *прямою, противоположащею касательной G относительно S* .

Проведя чрезъ точки β_1 и β_2 вторыя касательныя къ T и назвавъ ихъ точку пересѣченія буквою b , будемъ имѣть пятиугольникъ $\alpha_1\beta_1b\beta_2\alpha_2$, описанный около T и имѣющій всѣ вершины, кромѣ одной b , на коническомъ сѣченіи S . Вершину b , противолежащую сторонѣ G , будемъ называть *второю противолежащею точкой касательной G* .

Затѣмъ получимъ *вторую противолежащую прямую касательной G* и т. д.

Вообще мы будемъ имѣть для прямой G , также какъ въ 1-мъ параграфѣ для точки g , безпредѣльный рядъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ, чередующихся между собою.

Фигура, состоящая изъ двухъ коническихъ сѣченій S и T , касательной G ко второму и всѣхъ ея противолежащихъ точекъ и прямыхъ относительно перваго, очевидно, есть взаимныя съ фигурой, состоящей изъ тѣхъ же коническихъ сѣченій S и T , точки g , принадлежащей первому, и всѣхъ ея противолежащихъ прямыхъ и точекъ относительно втораго.

Такъ какъ все сказанное выше, какъ въ предыдущей, такъ и въ настоящей статьяхъ, относясь ко второй изъ этихъ фигуръ, основывалось лишь на извѣстныхъ *дескриптивныхъ* свойствахъ, то наши предыдущія разсужденія примѣнимы и къ первой фигурѣ съ извѣстными, конечно, видоизмѣненіями (замѣною точекъ прямыми и обратно). Въ виду этого не можетъ быть сомнѣнія, во первыхъ, относительно существованія всѣхъ противолежащихъ точекъ и прямыхъ данной касательной G , независимо отъ существованія точекъ ея пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ S , а во вторыхъ, относительно справедливости слѣдующаго предложенія, представляющагося также взаимнымъ съ предложеніемъ, доказаннымъ выше.

При перемѣщеніи касательной G къ коническому сѣченію T каждая ея противолежащая точка относительно коническаго сѣченія S перемѣщается по коническому сѣченію

нiю, принадлежащему системъ [ST], а каждая противоположащая прямая огибаетъ коническое сѣчение, принадлежащее пучку (ST).

Это предложенiе и восполняетъ упомянутый выше недостатокъ предыдущаго, такъ-какъ оно включаетъ въ себѣ первое изъ предложенiй о многоугольникахъ Понселе для случая многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ и второе для случая многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ.

Такимъ образомъ предложенiя о многоугольникахъ Понселе доказаны нами вполне и притомъ въ обобщенiи, смыслъ и характеръ котораго былъ нами указанъ въ концѣ 3-го параграфа предыдущей статьи.

§ 9.

Намъ остается доказать тѣ-же предложенiя для случая, когда коническiя сѣченiя S и T соприкасаются между собою въ двухъ точкахъ.

Въ этомъ случаѣ для коническихъ сѣченiй S и T существуетъ безчисленное множество общихъ полярныхъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ одною изъ сторонъ хорду соприкосновенiя (дѣйствительную или идеальную) и одною изъ вершинъ полюсъ этой хорды¹. Кроме того нужно замѣтить, что въ этомъ случаѣ исчезаетъ различiе между пучкомъ (ST) и системой [ST].

Мы будемъ основывать наше доказательство на разсмотрѣнiи гомологическихъ фигуръ, т. е. фигуръ, находящихся въ такомъ проективномъ или коллинеарномъ между собою соотвѣтствiи, въ которомъ каждая двѣ соотвѣтственныя (гомологическiя) точки лежатъ на одной прямой съ нѣкоторою постоянною точкой, называемою центромъ гомологiи, и каждая двѣ соотвѣтственныя

¹ Это обстоятельство и есть та причина, по которой къ настоящему частному случаю не примѣнимо изложенное въ предыдущемъ общемъ доказательство (см. §§ 5 и 6 предыд. статьи).

(гомологическія) прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ съ нѣкоторою постоянною прямою, называемою осью гомологіи. Такое соотвѣтствіе устанавливается, какъ извѣстно, вполне, когда даны центръ и ось гомологіи и одна какая нибудь пара соотвѣтственныхъ точекъ или соотвѣтственныхъ прямыхъ.

Назовемъ чрезъ L хорду прикосновенія коническихъ сѣченій S и T , а чрезъ l полюсь этой прямой относительно всѣхъ коническихъ сѣченій пучка (ST) (фиг. 9-я). Пусть g_1 и g_2 будутъ два различныя положенія точки g на коническомъ сѣченіи S . Точка p пересѣченія прямыхъ g_1g_2 и L будетъ имѣть общую полярю относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST) нѣкоторую прямую P , проходящую чрезъ l .

Примемъ точку p и прямую P за центръ и ось гомологіи и пусть g_1 и g_2 будутъ соотвѣтственныя точки. Этими условіями соотвѣтствіе устанавливается вполне и всякой произвольной точкѣ a_1 будетъ соотвѣтствовать опредѣленная точка a_2 , находящаяся при пересѣченіи прямой pa_1 съ прямою, соединяющею точку g_2 съ точкою встрѣчи прямыхъ g_1a_1 и P .

Такъ-какъ точки g_1 и g_2 раздѣляются гармонически центромъ p и осью P гомологіи, то то-же самое должно быть и для точекъ a_1 и a_2 . Это показываетъ, что каждая двѣ соотвѣтственныя точки находятся на одномъ и томъ-же коническомъ сѣченіи пучка (ST) , откуда слѣдуетъ, что и каждая двѣ соотвѣтственныя прямыя суть касательныя къ одному и тому-же коническому сѣченію пучка (ST) . Вообще всѣмъ точкамъ и касательнымъ какого нибудь коническаго сѣченія пучка (ST) должны соотвѣтствовать точки и касательныя того-же коническаго сѣченія.

Положимъ теперь, что M_1 и M_2 суть n -ыя противоположащія прямыя точекъ g_1 и g_2 . Построеніе, которымъ онѣ находятся по этимъ точкамъ, нами уже показано выше, и въ разсматриваемомъ теперь частномъ расположеніи коническихъ сѣченій S и T есть то-же самое какъ и въ общемъ.

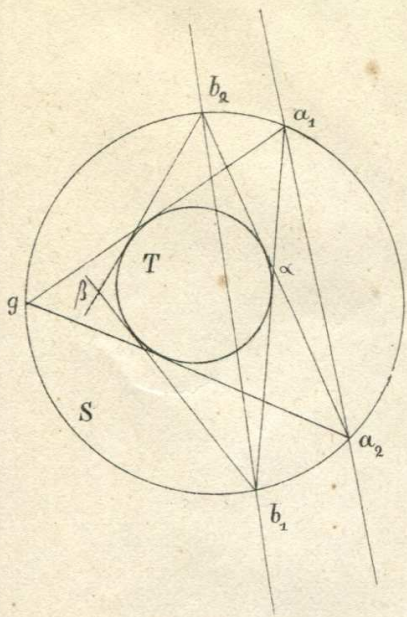
Такъ-какъ точка g_1 и оба коническія сѣченія S и T составляютъ фигуру, для которой гомологическая состоитъ изъ точки g_2 и тѣхъ-же самыхъ коническихъ сѣченій, то и все составныя части построения по точкѣ g_1 прямой M_1 съ одной стороны и по точкѣ g_2 прямой M_2 съ другой должны представлять также двѣ гомологическія фигуры. Отсюда слѣдуетъ, что и результаты этихъ обоихъ построений, т. е. прямыя M_1 и M_2 , должны быть также гомологическими, а это значитъ, на основаніи вышесказаннаго, что онѣ должны касаться одного и того-же коническаго сѣченія пучка (ST).

Тѣ-же самые доводы убѣждаютъ насъ, что двѣ n -ыя противоположащія точки μ_1 и μ_2 точекъ g_1 и g_2 должны быть точками гомологическими и, вслѣдствіе этого, лежать на одномъ и томъ-же коническомъ сѣченіи пучка (ST).

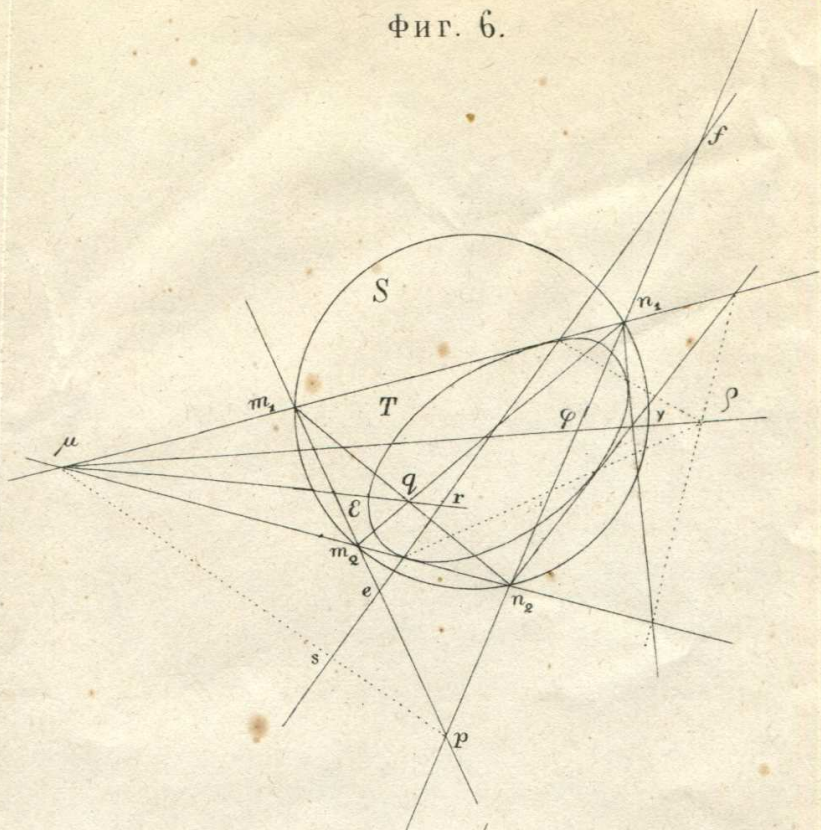
Принимая во вниманіе, что точки g_1 и g_2 были взяты на S совершенно произвольно и что точкою μ_1 опредѣляется вполнѣ единственное проходящее чрезъ эту точку коническое сѣченіе пучка (ST), а прямою M_1 также единственное коническое сѣченіе, касающееся ея и принадлежащее тому-же пучку, мы можемъ видѣть въ сказанномъ полное доказательство справедливости предложенія параграфа 6-го.

Взаимное съ нимъ предложеніе параграфа 8-го должно быть справедливо въ силу закона двойственности и можетъ быть доказано такими-же какъ и предыдущія разсужденія, а именно при помощи гомологическаго соотвѣтствія, которое устанавливаемъ, принимая двѣ данныя касательныя G_1 и G_2 къ коническому сѣченію T за прямыя соотвѣтственныя, прямую, соединяющую точку пересѣченія этихъ касательныхъ съ точкою l , за ось гомологій, а полюсъ этой послѣдней прямой относительно S и T за центръ гомологій.

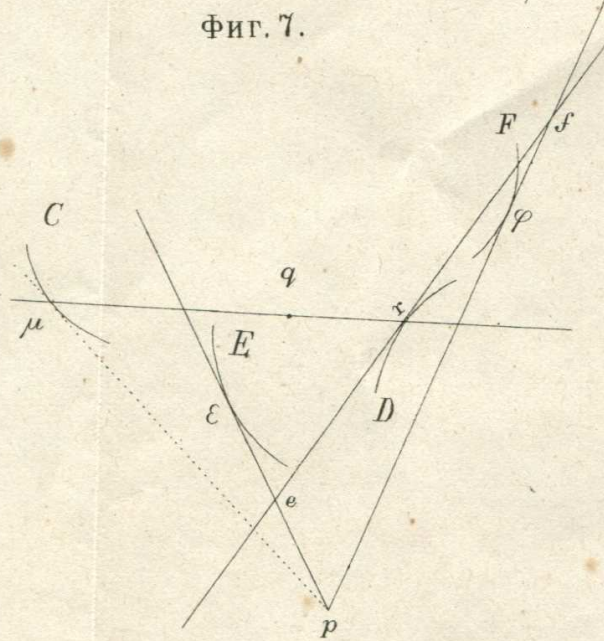
Фиг. 5.



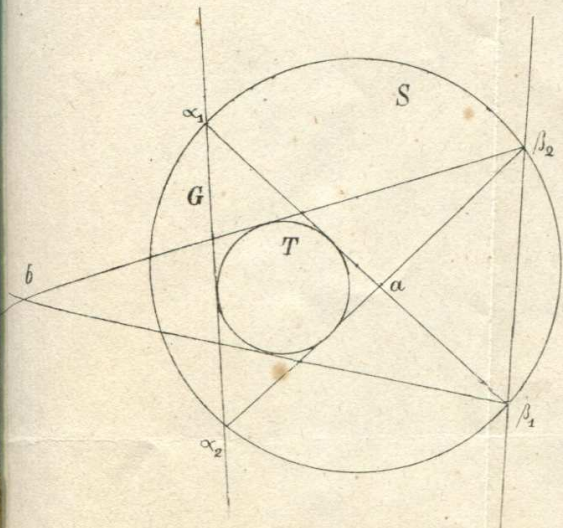
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

