СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

1884 ГОДА.

III.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1885.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

СОДЕРЖАНІЕ.

ПРОТОКОЛЪ

ГОДИЧНАГО СОБРАНІЯ

ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

1-го октября 1884 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, И. К. Шейдтъ, С. А. Раевскій, А. В. Маевскій, И. Д. Линицкій, Н. Д. Пильчиковъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Прочитанъ отчетъ о дѣятельности общества въ предыдущемъ $188^3/_4$ академическомъ году.

2. Доложено о поступленіи въ комитетъ общества двухъ статей: отъ *В. П. Алексѣевскаго* — «Объ интегрированіи уравненія

$$\frac{d^ny}{dz^n} + \frac{a_1}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \frac{a_2}{z^2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}\frac{dy}{dz} + a_n z^m y = 0,$$

и отъ *П. С. Флорова* — «Интегрированіе одного класса линейныхъ дифференціальныхъ уравненій»; а также о полученіи отъ *П. М. Новикова* задачи на отысканіе дифференціальнаго уравненія траекторіи движущейся точки по началу наименьшаго дѣйствія.

3. *М. А. Тихомандрицкій* прислалъ обществу (изъ Лейпцига) свою статью подъ заглавіемъ — «Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ».

4. Предсѣдательствующій доложилъ присланный обществу для свѣдѣнія протоколъ засѣданія совѣта университета 31-го марта 1883 г., въ которомъ было постановлено, что на будущее время состоящія при университетѣ ученыя общества должны издавать свои записки и протоколы отдѣльно отъ другихъ изданій университета на счетъ особой субсидіи, назначаемой обществамъ изъ спеціальныхъ средствъ университета.

Обсудивъ этотъ вопросъ, собраніе постановило издавать въ будущемъ Сообщенія и протоколы общества на счетъ упомянутой субсидіи, сохраняя прежнее наименованіе и форматъ изданія и выпуская его въ свѣтъ отдѣльными выпусками отъ двухъ до трехъ печатныхъ листовъ въ каждомъ.

5. Принято предложеніе К. А. Андреева выписывать для библіотеки общества «Журналъ элементарной математики», издаваемый профессоромъ В. П. Ермаковымъ.

6. К. А. Андреевъ предложилъ въ члены общества: В. П. Алексѣевскаго и П. С. Флорова; постановили произвести избраніе въ слѣдующее засѣданіе.

7. По иниціативѣ А. П Грузинцева былъ предложенъ гг. членамъ общества подписной листъ для сбора добровольныхъ взносовъ на текущіе расходы общества.

8. Въ концѣ засѣданія были произведены выборы для составленія вновь распорядительнаго комитета общества. Избраны:

a) Предсѣдателемъ общества — профессоръ *Константинъ Алексѣевичъ Андреевъ*.

b) Товарищами предсѣдателя профессоры *Матвѣй Ѳедоровичъ Ковальскій* и *Даніилъ Михайловичъ Деларю*.

c) Секретаремъ — преподаватель 1-й харьковской гимназіи *Алексѣй Петровичъ Грузинцевъ*.

9. Предсѣдательствовавшій доложилъ, что съ 30-го марта по 1-е октября поступили въ библіотеку общества слѣдующія изданія и брошюры:

1) Bulletin de la société mathématique de France. T. XII, 1884. №№ 1, 2, 3.

2) Записки студентовъ математическаго отдѣленія физико-математическаго факультета с.-петербургскаго университета, годъ 1-й (3-й и 4-й листы). 1884.

3) Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 2-e série, t. V, 3-e cahier, 1883.

4) Собраніе протоколовъ засѣданія секціи математическихъ наукъ при Императорскомъ казанскомъ университетѣ. Томъ 2-й, засѣданія 35 и 36. Казань. 1884, съ приложеніемъ портрета Н. И. Лобачевскаго.

5) Mathesis. T. IV, Mars — Aoùt, 1884.

6) Journal de mathématiques élémentaires, №№ 3 — 6 (Mars — Juillet), 1884, и № 9 (Septembre).

7) Journal de mathématiques spécial, тѣ-же нумера.

8) О наивыгоднѣйшемъ соединеніи гальваническихъ элементовъ въ батареѣ. *П. М. Новикова.*

9) Observations pluviométriques et thérmométriques, par Rayet. Bordeaux.

10) Annales de l'observatoire de Moscou publiées par prof. *Th. Bredichin.* Vol. X, 1-er livr., Moscou. 1884.

11) Observations of the great comet of 1882, made at the United States observatory. Washington. 1883.

12) Bulletin de la société Imperial des naturalistes de Moscou, année 1883. № 4, съ приложеніемъ (Meteorologische Beobachtungen).

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

о дѣятельности математическаго общества, состоящаго при харьковскомъ университетѣ,

за 1883—84 академическій годъ.

Математическое общество при харьковскомъ университетѣ существуетъ пять лѣтъ. Дѣятельность его въ послѣдній годъ имѣла въ общемъ тотъ же характеръ, какъ и въ предыдущіе. Главную часть этой дѣятельности составляли засѣданія, посвящаемыя выслушанію ученыхъ сообщеній членовъ общества или постороннихъ лицъ, а также обсужденія различныхъ научныхъ и педагогическихъ вопросовъ, задачъ и т. п. Тѣ изъ этихъ сообщеній, которыя доставлялись ихъ авторами распорядительному комитету въ рукописяхъ, печатались, какъ это было уже заведено прежде, вмѣстѣ съ протоколами засѣданій въ ученыхъ Запискахъ университета и отдѣльными оттисками. Это изданіе «Сообщеній», составляя существенное дополненіе упомянутой главной части дѣятельности общества, всего болѣе, конечно, содѣйствуетъ его цѣлямъ. Для лицъ, участвующихъ въ трудахъ общества, оно даетъ средство легко и скоро дѣлать извѣстными ихъ произведенія; для лицъ же, интересующихся занятіями общества, и для однородныхъ съ нимъ учрежденій оно представляетъ возможность знакомиться ближайшимъ образомъ съ главными результатами этихъ занятій. Чтобы воспользоваться въ возможно большей мѣрѣ выгодами такихъ условій, комитетъ общества поддерживалъ въ этомъ году сношенія съ прежними его корреспондентами, высылая имъ «Сообщенія» общества и получая въ обмѣнъ ихъ изданія и труды.

Въ истекшемъ году личный составъ общества увеличился однимъ членомъ, избраннымъ въ засѣданіи 18 ноября. Въ настоящемъ году число членовъ общества 31.

Распорядительный комитетъ общества состоялъ въ этому году изъ слѣдующихъ лицъ: предсѣдатель, бывшій профессоръ харьковскаго университета, Е. И. Бейеръ; товарищи предсѣдателя— профессора Д. М. Деларю и К. А. Андреевъ, и секретарь— профес. М. А. Тихомандрицкій.

Въ теченіе года, съ октября по апрѣль, общество имѣло 8 засѣданій, въ которыя были прочитаны 19 ученыхъ сообщеній. Кромѣ того, были предлагаемы и обсуждаемы нѣкоторыя задачи и вопросы. Въ этихъ обсужденіяхъ принимали участіе не только члены общества, но и посторонніе посѣтители, главную часть которыхъ составляли гг. студенты физико-математическаго факультета.

Въ числѣ ученыхъ сообщеній, доложенныхъ въ засѣданіяхъ общества, было нѣсколько присланныхъ обществу гг. профессорами с.-петербургскаго университета — К. А. Поссе, А. А. Марковымъ и Г. Пташицкимъ. Такое содѣйствіе интересамъ общества со стороны столичныхъ ученыхъ, содѣйствіе, начало котораго было положено еще въ прошедшемъ году академикомъ П. Л. Чебышевымъ, конечно, высоко цѣнится обществомъ.

Въ истекшемъ году общество издало три книжки своихъ «Сообщеній», включающія въ себѣ болѣе 14 печатныхъ листовъ и содержащія 17 статей, относящихся къ различнымъ предметамъ чистой и прикладной математики. Всего выпущено въ свѣтъ, до настоящаго времени, 10 выпусковъ «Сообщеній».

Корреспонденты общества, присылавшіе свои изданія и труды въ обмѣнъ за его «Сообщенія», какъ уже замѣчено выше, были въ этомъ году тѣ-же, что и въ предыдущемъ. Между ними слѣдуетъ отмѣтить однородныя съ нашимъ общества, состоящія при другихъ русскихъ университетахъ, а именно: московское математическое общество, математическое отдѣленіе новороссійскаго общества естествоиспытателей и физико-математическая секція казанскаго общества естествоиспытателей. Послѣдняя прислала недавно нашему обществу 2-й томъ своихъ протоколовъ, къ которому приложенъ портретъ бывшаго профессора казанскаго университета Н. И. Лобачевскаго, имя котораго въ вопросахъ о значеніи основныхъ геометрическихъ положеній навсегда останется памятнымъ въ наукѣ на-ряду съ именами Гаусса и Римана.

Протоколъ засѣданія 19 октября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, Г. В. Левицкій, М. С. Косенко, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. По предложенію К. А. Андреева и М. Θ. Ковальскаго баллотировались въ члены математическаго общества П. С. Флоровъ, В. П. Алексѣевскій и Г. А. Синяковъ. Избраны въ члены всѣ трое.

2. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи статьи отъ *М. А. Тихомандрицкаго* подъ заглавіемъ — «Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ». Содержаніе статьи взялся сообщать М. Θ. Ковальскій.

3. Секретарь доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ: a) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. Année 1884. № 1, b) Mathesis. Septembre.

4. *П. С. Флоровъ* прочелъ свою работу подъ заглавіемъ — «Къ интегрированію одного класса линейныхъ дифференціальныхъ уравненій».

5. *В. П. Алексѣевскій* прочелъ свою статью подъ заглавіемъ — «Объ интегрированіи уравненій:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{a_1}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \frac{a_2}{z^2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}\frac{dy}{dz} + a_n z^m y = 0».$$

Протоколъ засѣданія 2 ноября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, И. Д. Штукаревъ, Н. Д. Пильчиковъ, В. П. Алексѣевскій, Г. А. Синяковъ, П. С. Флоровъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

1. Г. предсѣдатель сообщилъ обществу о смерти члена математическаго общества, преподавателя 2-й гимназіи В. Я. Стоянова, умершаго 23 октября, и въ память его сказалъ нѣсколько прочувствованныхъ словъ.

2. *М. Ѳ. Ковальскій* сообщилъ содержаніе работы М. А. Тихомандрицкаго подъ заглавіемъ—«Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ».

3. *А. П. Грузинцевъ* прочелъ свою замѣтку подъ заглавіемъ—«О приложеніяхъ закона сохраненія энергіи».

4. Секретарь сообщилъ обществу о полученіи слѣдующихъ книгъ: Кіевскія университетскія извѣстія—№№ 8, 9, 11, 12 за 1883, и №№ 4, 5, 6 за 1884 годъ.

ОБРАЩЕНІЕ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

М. Тихомандрицкаго.

Въ замѣткѣ моей «Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale» (Math. Ann. Bd. 22) я показалъ, какимъ образомъ, исходя изъ теоремы сложенія интеграловъ 2 рода, мы само собою приходимъ къ Θ-функціи или къ Al (u) Вейерштрасса; въ замѣткѣ «О введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій», помѣщенной въ Сообщеніяхъ и протоколахъ засѣданій математическаго общества при харьковскомъ университетѣ 1883 года вып. I, я прибавилъ къ содержащемуся въ предыдущей статьѣ замѣчаніе, что тотъ-же самый путь приводитъ вообще ко всѣмъ функціямъ, которыя Бріо и Букэ называютъ «fonctions intermédiaires» (Théorie des fonctions elliptique, 2 éd., p. 236); въ слѣдующей моей замѣткѣ (помѣщенной въ «Сообщеніяхъ» 1883 г. вып. II) подъ заглавіемъ—«Выводъ основныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функціи» я показалъ, что найденный мною переходъ отъ интеграловъ къ Θ-функціямъ не требуетъ приведенія подрадикальной функціи къ каноническому виду, если ограничиться полиномами 3 степени, къ какому виду всегда можно привести подрадикальную функцію съ помощію линейной подстановки. Впослѣдствіи я замѣтилъ однако, что существуетъ болѣе прямой способъ перехода отъ интеграловъ къ fonctions intermédiaires, причемъ не только не требуется, чтобы была доказана теорема сложенія интеграловъ 1-го и 2-го рода, но и вообще, чтобы было что-либо извѣстно изъ теоріи эллиптическихъ интеграловъ, кромѣ только того, что верхній предѣлъ эллиптическаго интеграла 1 рода есть однозначная функція значенія интеграла, принимаемаго за независимую перемѣнную, такъ какъ даже двоякая періодичность эллиптическихъ функцій— основное ихъ свойство, получается при этомъ сама собою. Что же касается до однозначности верхняго предѣла интеграла, разсматриваемаго какъ функція значенія интеграла, то это легко можетъ быть доказано (см. *Briot et Bouquet*, Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques).

Въ предлагаемой теперь замѣткѣ, читанной мною въ математическомъ семинарѣ въ Лейпцигѣ 24 іюля 1884 г., я показываю этотъ новый переходъ отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ-функціямъ, предполагая эллиптическій интегралъ приведеннымъ къ Вейерштрассовской канонической формѣ, чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ получить и переходъ къ тѣмъ функціямъ $\sigma(u)$ изъ рода intermédiaires, которыми Вейерштрассъ замѣняетъ теперь свои прежнія $\mathrm{Al}(u)$.

Приведеніе эллиптическихъ интеграловъ къ канонической формѣ Вейерштрасса по его способу можно найдти въ брошюрѣ Митагъ-Лефлера: En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska Functionerna. Af Gösta *Mittag-Leffler*. Helsingfors. J. C. Frenckelletson. 1876; другой способъ, основанный на теоріи бинарныхъ биквадратичныхъ формъ, можно найдти въ мемуарѣ Hermite'a («Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées». Premier mémoire. Crelle. Bd. 52, p. 7 et 8).

1.

Мы опредѣляемъ x какъ функцію отъ u уравненіемъ:

$$\frac{dx}{du} = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}$$

(гдѣ g_2 и g_3 постоянныя, именно оба инваріанта биквадратичной бинарной формы) при условіи $x = \infty$ для $u = 0$.

Возвышая это уравненіе въ квадратъ, раздѣляя на $(x-\alpha)^2$ и разлагая вторую часть по строкѣ Тайлора, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\log(x-\alpha)}{du}\right)^2 = \frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{R''(\alpha)}{1\,.\,2} + \frac{R'''(\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3}(x-\alpha),$$

гдѣ для краткости положено:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4R(x).$$

Дифференцируя предыдущее уравненіе по u и раздѣляя обѣ части на $\frac{d\log(x-\alpha)}{du}$, получимъ такое:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-\alpha}}{du^2} = -2\,\frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^2} - \frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{R'''(\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3}(x-\alpha).$$

Оно приметъ болѣе простой видъ, если взять за α, которое до сихъ поръ оставалось произвольнымъ, корень уравненія $R(x) = 0$, напр. e_i, если $R(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$.

Тогда мы будемъ имѣть:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-e_i}}{du^2} = -\frac{R'(e_i)}{x-e_i} + \frac{R'''(e_i)}{1\,.\,2\,.\,3}(x-e_i)$$

или

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-e_i}}{du^2} = \left(b - \frac{R'(e_i)}{x-e_i}\right) - (b-(x-e_i)), \quad (1)$$

(гдѣ b произвольная постоянная) такъ какъ $\frac{R'''(\alpha)}{1\,.\,2\,.\,3} = 1$.

2.

Первый членъ второй части приводится къ виду втораго чрезъ не лишенную значенія въ теоріи эллиптическихъ функцій подстановку:

$$y - e_i = \frac{R'(e_i)}{x - e_i}; \qquad (2)$$

на основаніи которой значеніямъ x-са : ∞, e_i, e_k, e_l, отвѣчаютъ значенія $y : e_i$, ∞, e_l, e_k; и такъ какъ изъ (2)

$$\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = -\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

то будетъ:

$$\int_{e_i}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = -\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = u. \qquad (3)$$

Такъ какъ далѣе

$$\int_{e_i}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \int_{e_i}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} - \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \omega_i - v,$$

если положить

$$\int_{e_i}^{\infty} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \omega_i, \text{ и } -\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = v,$$

то послѣднее уравненіе обратится въ такое

$$\omega_i - v = u.$$

Если введемъ теперь Вейерштрассовское обозначеніе для функціи x отъ u, положивъ:

$$x = p(u),$$

и слѣдовательно

$$y = p(v) = p(\omega_i - u),$$

то формула (2) дастъ слѣдующее соотношеніе между значеніями функціи $p(u)$ для значеній аргумента, дополняющихъ другъ друга до ω_i:

$$p(\omega_i - u) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u) - e_i}. \tag{4}$$

Предположивъ доказанною однозначность функціи $p(u)$, отсюда сейчасъ получимъ ея періодичность. Дѣйствительно, замѣтивъ, что она четная, чтò слѣдуетъ изъ самого опредѣляющаго ее уравненія (3), и перемѣнивъ u на $u + \omega_i$, получимъ:

$$p(u) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u + \omega_i) - e_i},$$

и чрезъ повтореніе того же пріема:

$$p(u + \omega_i) - e_i = \frac{R'(e_i)}{p(u + 2\omega_i) - e_i},$$

откуда, по сравненіи съ предыдущимъ, тотчасъ получается:

$$p(u + 2\omega_i) = p(u). \tag{5}$$

Слѣдовательно $2\omega_i$ есть періодъ функціи $p(u)$. Повидимому такихъ періодовъ будетъ три. Но съ помощію формулы (3) легко убѣдиться, что третій будетъ линейная функція двухъ первыхъ съ цѣлыми коэффиціентами.

3.

Выразивъ теперь въ уравненіи (1) все чрезъ u, мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{d^2\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du^2} = c - p(u-\omega_i) - (c - p(u))$$

(гдѣ положено $b+e_i=c$). Интегрируя это уравненіе по u отъ $u=\omega_k$, получимъ:

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = \int\limits_{\omega_k}^{u}(c-p(u-\omega_i))du - \int\limits_{\omega_k}^{u}(c-p(u))\,du$$

или

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} = \int\limits_{\omega_k-\omega_i}^{u-\omega_i}(c-p(u))du - \int\limits_{\omega_k}^{u}(c-p(u))\,du.$$

Полагая:

$$\int(c-p(u))\,du = Z(u)+C,$$

мы можемъ послѣднее уравненіе написать такъ:

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du} =$$

$$= Z(u-\omega_i)-Z(u)-[Z(\omega_k-\omega_i)-Z(\omega_k)]. \qquad (7)$$

Но теперь изъ періодичности функціи $p(u)$ слѣдуетъ, что:

$$c-p(u+\omega_i)=c-p(u-\omega_i);$$

помножая это уравненіе на du и интегрируя отъ u_0, получимъ:

$$\int\limits_{u_0}^{u}(c-p(u+\omega_i))\,du=\int\limits_{u_0}^{u}(c-p(u-\omega_i))\,du$$

или

$$\int_{u_0+\omega_i}^{u+\omega_i} (c-p(u))\,du = \int_{u_0-\omega_i}^{u-\omega_i} (c-p(u))\,du,$$

откуда слѣдуетъ, что разность

$$Z(u+\omega_i)-Z(u-\omega_i)=Z(u_0+\omega_i)-Z(u_0-\omega_i)$$

отъ u не зависитъ; положимъ

$$Z(u+\omega_i)-Z(u-\omega_i)=2\eta_i. \tag{8}$$

Это равенство показываетъ, что функція $Z(u)$ обладаетъ періодичностію 2 рода (по Эрмиту) и что η_i есть модуль этой періодичности. Полагая здѣсь $u=0$ и принимая во вниманіе, что $Z(u)$ есть нечетная функція, такъ какъ ея производная $c-p(u)$ есть четная функція, мы получимъ:

$$\eta_i = Z(\omega_i). \tag{9}$$

Полагая въ томъ-же уравненіи (8) $u=\omega_k$, получимъ:

$$Z(\omega_k+\omega_i)-Z(\omega_k-\omega_i)=2\eta_i;$$

но точно такъ-же будемъ имѣть и уравненіе:

$$Z(\omega_i+\omega_k)-Z(\omega_i-\omega_k)=2\eta_k;$$

вычитая изъ этого уравненія предыдущее и дѣля на 2, получимъ:

$$Z(\omega_k-\omega_i)=\eta_k-\eta_i. \tag{10}$$

На основаніи (9) и (10) уравненіе (7) принимаетъ теперь такой видъ:

$$\frac{d\log\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}}{du}=Z(u-\omega_i)-Z(u)+\eta_i. \tag{11}$$

4.

Интегрируя послѣднее уравненіе по u въ тѣхъ же предѣлахъ, получимъ:

$$\log\sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}}=$$

$$=\int\limits_{\omega_k}^{u} Z(u-\omega_i)\,du-\int\limits_{\omega_k}^{u} Z(u)\,du+\eta_i(u-\omega_k)$$

или

$$\log\sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}}=$$

$$=\int\limits_{\omega_k-\omega_i}^{u-\omega_i} Z(u)\,du-\int\limits_{\omega_k}^{u} Z(u)\,du+\eta_i(u-\omega_k)\,, \tag{12}$$

и переходя отъ логариѳма къ числу:

$$\sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}}=\frac{e^{\int\limits_{\omega_k-\omega_i}^{u-\omega_i} Z(u)\,du}\,.\,e^{\eta_i(u-\omega_k)}}{e^{\int\limits_{\omega_k}^{u} Z(u)\,du}} \tag{13}$$

Естественно ввести особое обозначеніе для новой трансцендентной, появившейся теперь во второй части; положивъ потому

$$e^{\int\limits_{u_0}^{u} Z(u)\,du}=\frac{\Theta(u)}{\Theta(u_0)}\,, \tag{14}$$

мы можемъ послѣднее полученное уравненіе представить такъ:

$$\sqrt{\frac{p(u)-p(\omega_i)}{p(\omega_k)-p(\omega_i)}}=\frac{\Theta(u-\omega_i)\,.\,e^{\eta_i(u-\omega_k)}\,.\,\Theta(\omega_k)}{\Theta(u)\,.\,\Theta(\omega_k-\omega_i)}\,.$$

Отсюда, положивъ для краткости

$$\frac{\sqrt{p(\omega_k)-p(\omega_i)}}{\frac{\Theta(\omega_k-\omega_i)e^{\eta_i\omega_k}}{\Theta(\omega_k)}}=C\,,$$

получимъ:

$$\sqrt{p(u)-p(\omega_i)}=C\,\frac{\Theta(u-\omega_i)e^{\eta_i u}}{\Theta(u)}\,, \tag{15}$$

и такихъ формулъ будетъ три.

5.

Изъ уравненія (14), опредѣляющаго функцію $\Theta(u)$, можно вывести извѣстнымъ способомъ (см. нашу замѣтку «О введеніи Θ-функціи въ теорію эллиптическихъ функцій». Сообщенія и протоколы 1883 г., вып. I), что функція $\Theta(u)$: 1) есть однозначная функція отъ u; 2) для конечныхъ значеній u всегда конечная; 3) для $u=0$ равна нулю, и 4) обладаетъ періодичностію 3 рода, что выражается уравненіемъ:

$$\Theta(u+2\omega_i)=-e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\Theta(u). \tag{16}$$

Сдѣлавъ $c=0$ въ выраженіи $Z(u)$, мы получимъ отсюда функцію, которая только независящимъ отъ u множителемъ будетъ отличаться отъ функціи $\sigma(u)$, которую Вейерштрассъ опредѣляетъ уравненіемъ:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=-\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\,; \tag{17}$$

сдѣлавъ $\eta_i=0$, что даетъ для c значеніе $\frac{\bar\eta_i}{\omega_i}$, если $\bar\eta_i$ относится къ частному виду $Z(u)$, именно

$$Z(u) = -\int p(u)\,du + C,$$

мы получимъ функцію, которая подобнымъ же образомъ будетъ отличаться отъ Якобіевской $\Theta(u)$.

Вообще же наши $\Theta(u)$ будутъ fonctions intermédiaires Briot et Bouquet, ибо эти послѣднія какъ-разъ опредѣляются уравненіями (16), изъ которыхъ только два независимыхъ.

Протоколъ засѣданія 30 ноября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, Г. А. Синяковъ, А. А. Клюшниковъ, П. С. Флоровъ, И. Д. Линицкій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

1. Секретарь сообщилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Кіевскія университетскія извѣстія, кн. 7-я за 1884 годъ.

2) Journal de mathématiques élémentair et special № 10-й.

3) Bulletin de la société mathématique de France. № 4, tome XII.

4) Mathesis. Octobre 1884.

5) Протоколъ XXXIV засѣданія казанскаго математическаго общества.

6) Журналъ элементарной математики, № 6-й.

2. Г. предсѣдатель сообщилъ о полученіи статьи *К. А. Торопова* изъ С.-Петербурга подъ заглавіемъ — «Интегрированіе нѣкоторыхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій». Статью эту взялъ на себя трудъ сообщить обществу въ слѣдующее засѣданіе П. С. Флоровъ.

3. *К. А. Андреевъ* передалъ содержаніе своей работы — «О разложеніи функцій въ рядъ по функціямъ подобнымъ функціямъ Лежандра».

4. Онъ-же сообщилъ о выходѣ новой книжки «Сообщеній» харьк. математ. общества (II-й за 1884); книжка эта была роздана присутствующимъ членамъ общества.

5. Онъ-же обратилъ вниманіе гг. преподавателей математики, присутствовавшихъ въ засѣданіи, на новые учебники П. В. *Преображенскаго* (въ Москвѣ) по алгебрѣ и ариѳметикѣ.

6. *А. П. Грузинцевъ* изложилъ свои замѣчанія о нѣкоторыхъ, хотя и не новыхъ, но мало распространенныхъ способахъ демонстрированія физическихъ явленій; эти замѣчанія касались ученія о теплотѣ; приборы, относящіеся сюда, онъ обѣщалъ показать въ слѣдующемъ засѣданіи.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ

НѢКОТОРЫХЪ ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

К. А. Торопова.

Въ настоящей замѣткѣ я указываю на три вида обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго и втораго порядка, интегрирующихся въ квадратурахъ.

I.

Эйлеръ въ сочиненіи «Institutionum Calculi Integralis volumen primum», трактуя обыкновенныя дифференціальныя уравненія перваго порядка, приводитъ нѣсколько уравненій, имѣющихъ, сравнительно, частный видъ.

Одно изъ этихъ уравненій (Problema 54) есть:

$$\alpha y dx + \beta x dy + x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ α, β, γ и δ величины постоянныя. Для отдѣленія перемѣнныхъ Эйлеръ полагаетъ:

$$x^\alpha y^\beta = t,\; x^\gamma y^\delta = u.$$

Уравненіе (1), какъ мы сейчасъ покажемъ, интегрируется въ квадратурахъ и въ томъ случаѣ, когда α, β, γ и δ будутъ какими угодно функціями произведенія $x^m y^n$.

Введемъ въ уравненіе (1) вмѣсто y новую функцію t посредствомъ уравненія

$$x^m y^n = t.$$

Это послѣднее даетъ

$$nxdy + mydx = xy\frac{dt}{t},$$

слѣдовательно,

$$\alpha y dx = \frac{\alpha xy}{m}\frac{dt}{t} - \frac{\alpha n}{m} xdy,$$

$$x^m y^n \gamma y dx = \frac{\gamma xy}{m} dt - \frac{nt\gamma}{m} xdy.$$

Уравненіе (1) тогда приметъ слѣдующій видъ:

$$y\frac{\alpha + \gamma t}{t} dt + (m\beta + mt\delta - n\alpha - nt\gamma) dy = 0,$$

гдѣ перемѣнныя отдѣляются, такъ какъ α, β, γ и δ здѣсь функціи t.

Общій интегралъ этого уравненія

$$y = Ce^{\int \frac{(\alpha + t\gamma) dt}{t[n(\alpha + t\gamma) - m(\beta + t\delta)]}},$$

гдѣ C постоянная произвольная, введенная интегрированіемъ, будетъ и общимъ интеграломъ уравненія (1), если мы замѣнимъ въ немъ t чрезъ $x^m y^n$.

Положивъ въ уравненіи (1)

$$\gamma = \delta = 0,\ \beta = 1,$$

что, очевидно, не уменьшитъ общности его, получимъ уравненіе

$$f(x^m y^n) y dx + xdy = 0, \tag{2}$$

общій интегралъ котораго будетъ:

$$y = Ce^{\int \frac{f(t)\,dt}{t[nf(t)-m]}}, \tag{3}$$

гдѣ

$$t = x^m y^n.$$

Если мы положимъ въ (2)

$$n = -m = 1,$$

то получимъ однородныя уравненія

$$y' + \frac{y}{x} f\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \, *.$$

Вслѣдствіе произвольности въ уравненіи (2) величинъ m и n и функціи $f(x^m y^n)$, оно заключаетъ въ себѣ безчисленное множество частныхъ случаевъ.

Напримѣръ, уравненіе

$$y' + ay^2 = \frac{\varphi(xy)}{x^2}, \tag{4}$$

есть частный случай уравненія (2) и, слѣдовательно, интегрируется въ квадратурахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, оно можетъ быть такъ написано:

$$xy \, . \, xdy + (a(xy)^2 - \varphi(xy))\,ydx = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія по формулѣ (3) будетъ

$$y = Ce^{\int \frac{(at^2 - \varphi(t))\,dt}{t(at^2 - \varphi(t) - t)}},$$

* Буквы со значками вверху означаютъ вездѣ производныя тѣхъ-же буквъ безъ значковъ.

гдѣ

$$t = xy.$$

Пусть

$$\varphi(xy) = \psi(xy) - cxy,$$

тогда вмѣсто уравненія (4) имѣемъ:

$$y' + c\frac{y}{x} + ay^2 = \frac{\psi(xy)}{x^2}.$$

Уравненіе (4) есть частный случай такого

$$y' + ay^2 = \frac{f(xy^{m-1})}{x^{\frac{m}{m-1}}},$$

которое тоже, очевидно, можетъ быть приведено къ виду уравненія (2).

Разсмотримъ двѣ геометрическія задачи, которыя, между прочими, приводятъ къ интегрированію уравненія (2).

1) Найдти кривыя, для которыхъ площадь, ограниченная осью абсциссъ, двумя ординатами (постоянной и перемѣнной) и кривою, есть данная функція площади прямоугольника, построеннаго на координатахъ точки, соотвѣтствующей перемѣнной ординатѣ*.

Условіе задачи

$$\int y dx = f(xy),$$

отсюда дифференцируя получимъ уравненіе

$$(f'(xy) - 1) y dx + f'(xy) x dy = 0.$$

Общій интегралъ его по формулѣ (3) выразится такъ

* Здѣсь и далѣе мы имѣемъ въ виду систему прямоугольныхъ координатъ.

$$y = Ce^{\int \frac{1-f(t)}{t} dt},$$

или

$$\log Cx = \int \frac{f'(t)}{t} dt,$$

гдѣ

$$t = xy.$$

Напримѣръ, если

$$f(xy) = e^{xy},$$

то уравненіе искомыхъ кривыхъ будетъ:

$$\log Cx = \int \frac{et}{t} dt.$$

2) Найдти кривыя, для которыхъ площадь, ограниченная двумя радіусами-векторами, выходящими изъ начала координатъ, и кривою есть данная функція площади того же прямоугольника, что и въ предыдущей задачѣ.

Мы имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\int(xdy - ydx) = f(xy).$$

Уравненіе искомыхъ кривыхъ выразится интеграломъ уравненія:

$$(1 + 2f'(xy))ydx + (2f'(xy) - 1)xdy = 0.$$

По формулѣ (3) получимъ:

$$y = C\sqrt{t}\, e^{\int \frac{f'(t)}{t} dt},$$

гдѣ

$$t = xy.$$

Замѣтимъ, что мы приходимъ къ уравненію (2) и въ тѣхъ случаяхъ, когда ищемъ кривыя по одному изъ условій болѣе общихъ:

$$\int y dx = xyf(x^m y^n)$$

$$\int (xdy - ydx) = xyf(x^m y^n).$$

II.

Пріемъ, употребляемый Эйлеромъ для перехода отъ линейныхъ уравненій къ уравненіямъ:

$$y = xf(y') + F(y')$$

и отъ однородныхъ къ уравненіямъ

$$y = x^2 F\left(\frac{y'}{x}\right),$$

будучи примѣненъ къ уравненію (2), даетъ слѣдующее:

$$f(x^m y'^n) ydx + xdy = 0, \qquad (5)$$

которое по внѣшнему виду представляетъ чрезвычайное сходство съ уравненіемъ (2).

Покажемъ, что уравненіе (5) интегрируется въ квадратурахъ.

Представивъ его въ видѣ

$$y + xy' f_1(x^m y'^n) = 0,$$

гдѣ

$$f_1(x^m y'^n) = \frac{1}{f(x^m y'^n)}$$

и дифференцируя, получимъ:

$$(1+f_1(x^m y'^n)+mx^m y'^n f_1'(x^m y'^n))y'dx+$$
$$+(f_1(x^m y'^n)+nx^m y'^n f_1(x^m y'^n))xdy'=0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе принадлежитъ къ типу уравненій (2), то общій интегралъ его найдемъ по формулѣ (3)

$$y'=Ce^{\int\frac{1+f_1(t)+mtf'_1(t)}{t[n+(n-m)f_1(t)]}dt}, \tag{α}$$

гдѣ

$$t=x^m y'^n. \tag{β}$$

Исключая y' и t изъ уравненій (α), (β) и (5), будемъ имѣть общій интегралъ уравненія (5).

Исключеніе y' можно произвести такимъ образомъ.

Возвышая уравненіе (α) въ степень n, получимъ:

$$y'^n=C^n e^{\int\left(\frac{dt}{t}+m\frac{f_1(t)+ntf_1'(t)}{t[n+(n-m)f_1(t)]}dt\right)},$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (β),

$$x=C^{-\frac{n}{m}}e^{-\int\frac{f_1(t)+ntf_1'(t)}{t[n+(n-m)f_1(t)]}dt}.$$

Слѣдовательно, общій интегралъ уравненія

$$f(x^m y'^n)xdy+ydx=0,$$

представится слѣдующими двумя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x&=C^{-\frac{n}{m}}e^{\int\frac{f(t)+ntf'(t)}{[(m-n)f(t)-n]t}dt} \\ y&=-C^{\frac{m-n}{n}}f(t)e^{\int\frac{1+(m-n)tf'(t)}{[n+(n-m)f(t)]t}dt} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где C постоянная произвольная, вошедшая при интегрированіи u.

$$t = x^m y'^n.$$

Уравненіе (5) можно представить еще въ иномъ видѣ:

$$f\left(\frac{x^m}{x'^n}\right) ydx + xdy = 0,$$

или, перемѣнивъ x на y, y на x и n на $-n$, въ такомъ

$$f(y^m y'^n)\, ydx + xdy = 0. \tag{7}$$

Общій интегралъ уравненія (7) получимъ по формуламъ (6), замѣнивъ въ нихъ x чрезъ y, y чрезъ x и n чрезъ $-n$.

Частные случаи: 1) Если мы положимъ въ уравненіи (5)

$$n = -m = 1,$$

то получимъ уравненіе Эйлера

$$y = x^2 F\left(\frac{y'}{x}\right),$$

если сдѣлаемъ

$$F\left(\frac{y'}{x}\right) = -\frac{y'}{xf\left(\frac{y'}{x}\right)}.$$

2) Положивъ въ уравненіи (7)

$$m = -n = 1,$$

получимъ уравненія однородныя относительно y и y'

$$x = \varphi\left(\frac{y}{y'}\right) \tag{8}$$

3) Положивъ въ уравненіи (7)

$$m = n = 1,$$

получимъ

$$x = y^2 \varphi(yy'). \qquad (9)$$

4) Положивъ въ уравненіи (5)

$$m = n = 1,$$

получимъ

$$y = \varphi(xy'). \qquad (10)$$

Рѣшимъ три геометрическія задачи, которыя приводятъ къ уравненіямъ (8), (9) и (10).

1) Найдти кривыя, для которыхъ абсцисса точки есть данная функція подкасательной въ этой точкѣ.

Такъ какъ длина подкасательной есть

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'},$$

то по условію задачи имѣемъ уравненіе

$$x = f\left(\frac{y}{y'}\right). \qquad (8)$$

Дифференцируя его, получимъ:

$$dx = x'dy = f'(yx')(x'dy + ydx'),$$

или

$$ydx' + \frac{f'(yx') - 1}{f'(yx')}\,x'dy = 0.$$

По формулѣ (3) общій интегралъ этого уравненія будетъ:

$$x' = Ce^{\int \frac{1 - f'(t)}{t}dt},$$

или, такъ какъ

$$t = yx',$$

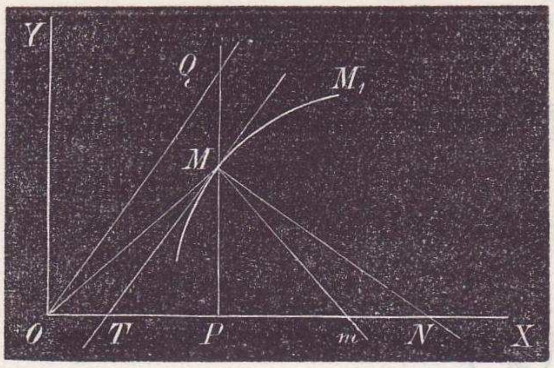
то

$$y = Ce^{\int \frac{f'(t)}{t} dt}. \qquad (\gamma)$$

Кромѣ того, мы имѣемъ по уравненіи (8)

$$x = f(t). \qquad (\delta)$$

Уравненія (γ) и (δ) представляютъ общій интегралъ нашего уравненія (8), слѣдовательно, и уравненія искомыхъ кривыхъ. Мы могли бы, конечно, прямо написать эти уравненія по формуламъ (6)



2) MT и MN касательная и нормаль къ кривой MM, въ точкѣ M. OP и MP координаты точки M.

Линія Mm перпендикулярна радіусу вектору OM точки M. Проекція линій Mm на ось абсциссы дана въ функціи поднормали точки M. Найдти уравненія кривыхъ MM_1.

Такъ какъ поднормаль

$$PN = yy'$$

и

$$\text{пр. } Mm = Pm = \frac{MP^2}{OP} = \frac{y^2}{x},$$

то, на основаніи условія

$$Pm = f(PN),$$

получимъ дифференціальное уравненіе

$$y^2 = xf(yy'),$$

или

$$x = \frac{y^2}{f(yy')} = y^2\varphi(yy'). \qquad (9)$$

Общій интегралъ этого уравненія находится очень просто дифференцированіемъ его

$$1 = y^2\varphi'(yy')\frac{d(yy')}{dx} + 2\varphi(yy')yy'.$$

Обозначая yy' чрезъ t, получимъ:

$$(1 - 2t\varphi(t)) = y\frac{t\varphi'(t)dt}{dy},$$

откуда

$$y = Ce^{\int\frac{t\varphi'(t)dt}{1-2t\varphi(t)}}.$$

Послѣднее уравненіе, соединенное съ даннымъ,

$$x = y^2\varphi(t)$$

дадутъ искомыя уравненія кривыхъ MM_1.

3) Линія OQ приведена параллельно касательной MT. Ордината точки M дана въ функціи отрѣзка PQ; найдти уравненія кривыхъ MM_1.

Такъ какъ

$$PQ = xy',$$

то условное уравненіе будетъ:

$$y = f(xy'). \qquad (10)$$

Дифференцируя его, получимъ:

$$y'dx = f'(xy')(xdy' + y'dx). \qquad (\delta)$$

Формула (3) даетъ общій интегралъ уравненія (δ) въ такомъ видѣ

$$y' = Ce^{\int \frac{1-f'(t)}{t}dt},$$

или, такъ какъ здѣсь

$$t = xy',$$

то

$$x = Ce^{\int \frac{f'(t)dt}{t}}.$$

Послѣднее и данное

$$y = f(t)$$

уравненія и будутъ уравненіями искомыхъ кривыхъ.

Подобныхъ задачъ можно подобрать, конечно, сколько угодно.

III.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$y'' = f(ax + by + c)F(y'). \qquad (11)$$

Если мы введемъ въ него новую функцію t вмѣсто y, полагая

$$ax + by + c = t,$$

то оно приметъ слѣдующій видъ:

$$t'' = bf(t)F\left(\frac{t'-a}{b}\right).$$

Помножая послѣднее на

$$\frac{t'dx}{F\left(\frac{t'-a}{b}\right)}=\frac{dt}{F\left(\frac{t'-a}{b}\right)}$$

и интегрируя, получимъ:

$$\int\frac{t'dt'}{F\left(\frac{t'-a}{b}\right)}=b\int f(t)\,dt+C. \qquad (\varepsilon)$$

Положимъ, что изъ уравненія (ε) мы опредѣлили t и t' въ функціяхъ одной перемѣнной u

$$\left.\begin{aligned} t'&=\lambda(u,C)\\ t&=\mu(u,C).\end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

Въ частныхъ случаяхъ u можетъ быть, конечно, одною изъ величинъ t или t'.

Уравненія (ζ) даютъ:

$$x+C_1=\int\frac{\mu'(u,C)\,du}{\lambda(u,C)}, \qquad (\eta)$$

гдѣ C и C_1 постоянныя произвольныя, вошедшія отъ двухъ интегрированій.

Присоединяя къ уравненію (η) зависимость

$$ax+by+c=\mu(u,C),$$

мы будемъ имѣть общій интегралъ уравненія (11).

Примѣры: 1) Общій интегралъ уравненія:

$$y''=f(ax+by+c)$$

$$\left.\begin{aligned} x+C_1&=\int\frac{dt}{\sqrt{C+2b\int f(t)\,dt}},\\ ax+by+C&=t\end{aligned}\right\} \qquad (\vartheta)$$

2) Найдемъ общій интегралъ уравненія

$$y'' = f(ax + by + c)\,y'^3.$$

Здѣсь удобно взять за независимую перемѣнную y, а за функцію ея x; тогда наше уравненіе будетъ:

$$x'' = -f(ax + by + c).$$

Общій интегралъ послѣдняго уравненія по формулѣ (ϑ) выразится такъ:

$$y + C_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{C - 2a\int f(t)\,dt}}$$

$$ax + by + c = t.$$

Положимъ здѣсь

$$a = -b = 1,\ c = 0,\ f(t) = t,$$

тогда

$$y + C_1 = \operatorname{arc\,sn} \frac{t}{\sqrt{C}}.$$

Слѣдовательно, зависимость

$$x = y + \sqrt{C}\,\operatorname{sn}(y + C_1)$$

будетъ общимъ интеграломъ уравненія

$$y'' = (x - y)\,y'^3.$$

Одно изъ рѣшеній этого уравненія получимъ:

$$x = y - e\,\operatorname{sn} y,$$

полагая

$$C_1 = 0,\ \sqrt{C} = -e.$$

3) Найдти кривыя, кривизна которыхъ въ точкѣ есть функція линейной функціи координатъ точки.

По заданію имѣемъ

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = f(ax+by+c).$$

Формула (ε) для даннаго случая будетъ:

$$\int \frac{t'dt'}{\left(1+\left(\frac{t'-a}{b}\right)^2\right)^{3/2}} = b\int f(t)\,dt + C.$$

Такъ какъ

$$\int \frac{t'dt'}{\left(1+\left(\frac{t'-a}{b}\right)^2\right)^{3/2}} = b\,\frac{a\frac{t'-a}{b}-b}{\sqrt{1+\left(\frac{t'-a}{b}\right)^2}},$$

то

$$t' = a + b\,\frac{ab \pm \sqrt{(a^2+b^2)v-v^2}}{a^2-v},$$

гдѣ

$$v = \int f(t)\,dt + C.$$

Слѣдовательно, уравненія искомыхъ кривыхъ будутъ:

$$x + C_1 = \int \frac{(a^2-v)\,dt}{a^3+ab^2-av \pm \sqrt{(a^2+b^2)v-v^2}},$$

$$ax+by+c=t.$$

Спб.

Ноябрь 1884.

Протоколъ засѣданія 15 декабря.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, М. Θ. Ковальскій, В. П. Алексѣевскій, П. С. Флоровъ, Н. М. Флавицкій, А. А. Клюшниковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Секретарь доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

   1) Математическій сборникъ. Вып. 4, т. XI.

   2) Mathesis. Novembre 1884.

   3) Journal de mathématiques № 11.

2. *П. С. Флоровъ* сообщилъ содержаніе статьи *К. А. Торопова* — «Интегрированіе нѣкоторыхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій».

3. Редакція кіевскихъ университетскихъ извѣстій предлагаетъ продолжать и въ предстоящемъ 1885 году обмѣнъ изданіями; постановлено — принять предложеніе.

4. Секретарь доложилъ обществу объявленіе о выходѣ въ Москвѣ, съ будущаго года, журнала подъ названіемъ — «Физико-математическія науки», изд. В. В. Бабынинымъ, приватъ-доцентомъ московскаго университета; постановлено — выписывать этотъ журналъ въ 1885 году.

5. *М. Θ. Ковальскій* предложилъ задачу:

Требуется доказать равенство —

$$\frac{(-1)^i}{(2i+1)(i)!} = \sum_{k=o}^{k=i} \frac{(-1)^k (i-k)!\, 2^{2i-2k}}{(2i-2k+1)!\, k!},$$

гдѣ i число цѣлое и положительное, а $(n)! = 1, 2, 3 \ldots n$.

6. *А. П. Грузинцевъ* показалъ физическіе опыты съ приборами, о которыхъ онъ сообщалъ въ предыдущее засѣданіе.

О ПРИЛОЖЕНІЯХЪ ЗАКОНА
СОХРАНЕНІЯ ЭНЕРГІИ.

А. П. Грузинцева.

Всѣмъ извѣстенъ законъ сохраненія энергіи и его большое значеніе въ физикѣ; всѣмъ извѣстно, что только при помощи его можно уяснить себѣ сущность какого-нибудь физическаго явленія или показать соотношеніе и взаимную превращаемость однихъ физическихъ дѣятелей (силъ) въ другіе; но физики, большею частью, пользуются этимъ закономъ качественно, если можно такъ выразиться, а не количественно, т. е., когда приходится дать математическую теорію какого-нибудь физическаго явленія, то не пользуются непосредственно закономъ сохраненія энергіи, а прибѣгаютъ къ тѣмъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя даются теоретической механикой для случая дѣйствія тѣхъ или другихъ силъ на матеріальную точку или на систему такихъ точекъ, т. е. пользуются дифференціальными уравненіями движенія. Хотя такой способъ совершенно наученъ, но при немъ законъ сохраненія энергіи остается какъ-бы въ сторонѣ и самое изслѣдованіе усложняется безъ особой нужды; такъ поступаютъ почти всѣ писатели по математической физикѣ, за исключеніемъ очень немногихъ, какъ напр. Ралея, который въ своемъ превосходномъ сочиненіи (Theory of sound) постоянно пользуется закономъ сохраненія энергіи, между тѣмъ какъ, прибѣгая къ помощи этого закона, можно нерѣдко значительно сократить изслѣдованіе и придать ему болѣе простую и изящную форму.

Чтобы показать на самомъ дѣлѣ удобство приложенія этого закона, разсмотримъ нѣсколько примѣровъ изъ области математической физики, начиная съ простѣйшихъ и переходя къ болѣе сложнымъ и труднымъ.

Прежде всего выразимъ законъ сохраненія энергіи въ математической формѣ. Назовемъ буквою $Э$ — кинетическую энергію матеріальной точки или системы такихъ точекъ въ нѣкоторый моментъ времени, буквою P — потенціальную энергію внутреннихъ и внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на ту-же точку или систему въ тотъ же моментъ времени; тогда законъ сохраненія энергіи напишется въ-видѣ

$$Э + P = \text{пост. количеству.} \quad (1)$$

Если мы выразимъ при помощи количествъ, опредѣляющихъ состояніе матеріальной точки или системы такихъ точекъ, величины $Э$ и P и будемъ въ состояніи найдти изъ какихъ нибудь источниковъ значеніе постояннаго количества въ правой части написаннаго уравненія, то это уравненіе можетъ служить намъ для вычисленія или $Э$, если дано P, или P, если дано $Э$, или для вычисленія другихъ величинъ, зависящихъ извѣстнымъ опредѣленнымъ образомъ отъ $Э$ и P (отъ обоихъ вмѣстѣ, или порознь). На самомъ же дѣлѣ значеніе въ конечномъ видѣ $Э$ и P бываетъ неизвѣстно непосредственно, тогда употребляютъ такой пріемъ. Возьмемъ дифференціалъ по времени отъ уравненія (1), тогда получимъ

$$dЭ + dP = 0. \quad (2)$$

Это будетъ нѣкоторое дифференціальное уравненіе, которое и послужитъ основаніемъ для той или другой развиваемой теоріи.

Замѣтимъ, что обыкновенно пользуются закономъ сохраненія энергіи въ формѣ уравненія (2).

Предпославъ эти краткія замѣчанія, приступимъ къ изложенію тѣхъ примѣровъ, о которыхъ мы выше упоминали, что̀ собственно и составляетъ ближайшую цѣль настоящей замѣтки.

Примѣръ 1-й. Пусть матеріальная точка массы m находится въ движеніи подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: a) силы пропорціональной перемѣщенію и b) силы тренія, пропорціональной скорости движенія точки. Тогда имѣемъ для кинетической энергіи

$$Э = \frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

если u будетъ разстояніе точки отъ положенія равновѣсія; потенціальная энергія равная работѣ силъ a) и b) будетъ:

$$P = \int_0^u au\,du + \int_0^u b\frac{du}{dt}du\,,$$

причемъ a и b суть коэффиціенты пропорціональности.

Поэтому

$$P = \frac{au^2}{2} + b\int_0^u \frac{du}{dt}du\,.$$

Подставляя въ (1) уравненіе, имѣемъ:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{au^2}{2} + b\int_0^u \frac{du}{dt}du = \text{пост.}$$

Дифференцируя по t, имѣемъ:

$$m\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} + au\frac{du}{dt} + b\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 0$$

*

или

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+au+b\frac{du}{dt}=0\,, \qquad (3)$$

потому что рѣшеніе

$$\frac{du}{dt}=0$$

соотвѣтствуетъ положенію равновѣсія. Уравненіе (3) есть извѣстное уравненіе колебательнаго движенія точки въ сопротивляющейся срединѣ.

Примѣръ 2-й. Если бы сила а) 1-го примѣра имѣла форму

$$p=au+a'u^2\,,$$

гдѣ a и a' постоянныя количества, тогда имѣли бы:

$$\text{потенціальная энергія силы } p=\int_0^u pdu=\frac{au^2}{2}+\frac{a'u^3}{3}.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) дастъ:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{au^2}{2}+\frac{a'u^3}{3}+b\int_0^u\frac{du}{dt}du=\text{постоян.}$$

Дифференцируя по t, имѣемъ:

$$m\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}+au\frac{du}{dt}+a'u^2\frac{du}{dt}+b\left(\frac{du}{dt}\right)^2=0\,.$$

Или

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+au+a'u^2+b\frac{du}{dt}=0\,. \qquad (4)$$

Когда $b = 0$, тогда уравненія (3) и (4) даютъ уравненія колебательнаго движенія въ средѣ, не оказывающей сопротивленія движенію.

Примѣръ 3-й. Разсмотримъ теперь болѣе сложный случай. Пусть дана сложная средина, состоящая изъ двухъ системъ точекъ, находящихся въ колебательномъ движеніи. Пусть это будетъ средина, состоящая изъ эфирныхъ частицъ и матеріальныхъ. Назовемъ массу какой нибудь частицы эфира буквой μ, координаты ея x, y, z и составляющія перемѣщенія вдоль координатныхъ осей буквами π, ω, ρ; для матеріальной частицы масса будетъ m, составляющія перемѣщенія u, v, w. Пусть дѣйствующія на частицу μ силы будутъ: a) сила упругости, составляющія которой пусть будутъ Σ_x Σ_y Σ_z; b) сила взаимодѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфирныя; назовемъ ея составляющія буквами M_x, M_y, M_z; c) сила давленія (гидростатическаго), существующаго въ срединѣ въ точкѣ μ.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

Кинетическая энергія эфирныхъ частицъ во всемъ объемѣ средины:

$$Э_1 = \iiint \frac{\mu\, dx\, dy\, dz}{2}\left[\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right]$$

энергія матеріальныхъ частицъ:

$$Э_2 = \iiint \frac{m\, dx\, dy\, dz}{2}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right],$$

слѣдовательно, полная кинетическая энергія средины будетъ:

$$Э = Э_1 + Э_2 .$$

Вычислимъ потенціальную энергію средины. Прежде всего имѣемъ:

$$-\iiiint(\Sigma_x\delta\pi+\Sigma_y\delta\omega+\Sigma_z\delta\rho)\,dx\,dy\,dz=P_a$$

это будетъ потенціальная энергія силъ (а).

Затѣмъ

$$-\iiiint(M_x\delta\pi+M_y\delta\omega+M_z\delta\rho)\,dx\,dy\,dz=P_b;$$

это — потенціальная энергія воздѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфирныя.

И наконецъ:

$$-\iiiint\left(\frac{dp}{dx}\delta\pi+\frac{dp}{dy}\delta\omega+\frac{dp}{dz}\delta\rho\right)dx\,dy\,dz=P_c;$$

это — потенціальная энергія силы давленія въ срединѣ.

Силою воздѣйствія эфира на матеріальныя частицы и упругостью матеріальныхъ частицъ пренебрегаемъ вслѣдствіе крайней малости ихъ сравнительно съ силами категорій (а) и (b). Такимъ образомъ потенціальная энергія средины будетъ:

$$P=P_a+P_b+P_c\,.$$

Подставляя значеніе $Э$ и P въ уравненіе (1), имѣемъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz\left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\right.$$

$$+\frac{m}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-\int\left(\Sigma_x\delta\pi+\Sigma_y\delta\omega+\Sigma_z\delta\rho\right)-$$

$$\left.-\int\left(M_x\delta\pi+M_y\delta\omega+M_z\delta\rho\right)-\int\left(\frac{dp}{dx}\delta\pi+\frac{dp}{dy}\delta\omega+\frac{dp}{dz}\delta\rho\right)\right\}=$$

$=$ постоянному количеству.

Дифференцируя по t и употребляя, для краткости письма, знакъ S для обозначенія суммы трехъ подобныхъ одинъ другому членовъ, имѣемъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left\{ S\mu \frac{d^2\pi}{dt^2}\delta\pi + Sm\frac{d^2u}{dt^2}\delta u - S\Sigma_x\delta\pi - SM_x\delta\pi - S\frac{dp}{dx}\delta\pi \right\} = 0\,.$$

Положимъ здѣсь

$$u = m_x\pi\,,\ v = m_y\omega\,,\ w = m_z\rho\,,$$

тогда получимъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left\{ S\left[\mu\frac{d^2\pi}{dt^2} + m\,m^2{}_x\frac{d^2\pi}{dt^2} - \Sigma_x - M_x - \frac{dp}{dx}\right]\delta\pi \right\} = 0\,. \qquad \text{(a)}$$

Но $\delta\pi$, $\delta\omega$, $\delta\rho$ суть величины произвольныя, поэтому уравненіе (a) распадается на три слѣдующія:

$$\mu\frac{d^2\pi}{dt^2} + m\,m^2{}_x\frac{d^2\pi}{dt^2} = \Sigma_x + M_x + \frac{dp}{dx}$$

$$\mu\frac{d^2\omega}{dt^2} + m\,m^2{}_y\frac{d^2\omega}{dt^2} = \Sigma_y + M_y + \frac{dp}{dy}$$

$$\mu\frac{d^2\rho}{dt^2} + m\,m^2{}_z\frac{d^2\rho}{dt^2} = \Sigma_z + M_z + \frac{dp}{dz}\,.$$

Подобныя же уравненія были уже получены мною въ другой моей работѣ (Сообщенія харьковскаго математическаго общества за 1882 г. вып. I, стр. 71).

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ОДНОГО ЛИНЕЙНАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ n-ГО ПОРЯДКА.

В. П. Алексѣевскаго.

1. Уравненіе, способъ интегрированія котораго излагается въ этой замѣткѣ, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n-r} a_i z^{-i} D^{n-i} y + a_n z^m y = 0.$$

Докажемъ предварительно нѣсколько тождествъ.

Пусть u — какая нибудь функція перемѣннаго x, p и q числа цѣлыя, тогда по теоремѣ Лейбница, распространенной на производныя съ отрицательными указателями, имѣемъ:

$$D^{-p} x^q D^{p+q} u =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=q} (-1)^i \frac{p(p+1)\ldots(p+i-1)}{i!} q(q-1)\ldots(q-i+1) x^{q-i} D^{q-i} u$$

но, представивъ правую часть слѣдующимъ образомъ:

$$x^{p+q} \sum_{i=0}^{i=q} \frac{q(q-1)\ldots(q-i+1)}{i!} (-1)^i p(p+1)\ldots(p+i-1) x^{-(p+i)} D^{q-i} u,$$

легко замѣтить, что

$$D^{-p}x^qD^{p+q}u = x^{p+q}D^qx^{-p}u.$$

Умноживъ эту формулу на постоянное A_q, сообщивъ q всѣ значенія отъ 0 до нѣкотораго цѣлаго числа r и складывая результаты, получимъ:

$$\sum_{q=0}^{q=r} A_qD^{-p}.x^qD^{p+q}u = \sum_{q=0}^{q=r} A_qx^{p+q}D^qx^{-p}u.$$

откуда непосредственно слѣдуетъ

$$x^{-p}.\sum_{q=0}^{q=r} A_qx^{p+q}D^q(D^pu) = D^p\sum_{q=0}^{q=r} A_qx^{p+q}D^q(x^{-p}u). \qquad (1)$$

2. Введя слѣдующее знакоположеніе:

$$x^{\mu_1}Dx^{\mu_2}D\ldots x^{\mu_r}Du = \left[x^{\mu_i}D\right]_1^r u,$$

$$s_r = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r,$$

не трудно убѣдиться, что

$$\left[x^{\mu_i}D\right]_1^r u = x^{s_r}\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i{}^{(r)}x^{-i}D^{r-i}u.$$

Для этого стоитъ только, допустивъ справедливость этой формулы для какого нибудь значенія r, продифференцировать обѣ части, а умноживъ обѣ части на x^μ, найдемъ, что она справедлива и для $r+1$.

Если положимъ въ послѣдней формулѣ

$$Du = v \quad \mu_r = \alpha + n \quad n > r - 1,$$

то, очевидно, имѣемъ:

$$x^{\alpha}.x^{-s_{r-1}}\left[x^{\mu_i}D\right]_1^{r-1}x^{\alpha+n}v = \sum_{i=0}^{i=r-1} A_i{}^{(r)}x^{n-i}D^{r-1-i}v.$$

Полагая для сокращенія

$$x^{-s_r}\left[x^{\mu_i}D\right]_1^r u=\prod_r u,$$

предыдущей формулѣ дадимъ такой видъ:

$$x^{-\alpha}\prod^{r-1}x^{\alpha+n}v=\sum_{i=0}^{i=r-1}A_i^{(r)}x^{n-i}D^{r-1-i}v.$$

Измѣнивъ здѣсь r въ $n-r$, v въ $x^{-(r+1)}v$, находимъ:

$$\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=\sum_{i=0}^{i=n-r-1}A_i^{(n-r)}x^{n-i}D^{n-r-1-i}(x^{-(r+1)}v).$$

Отсюда, на основаніи формулы (1),

$$D^{r+1}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=$$

$$=x^{-(r+1)}\sum_{i=0}^{i=n-r-1}A_i^{(n-r)}x^{n-i}D^{n-r-1-i}(D^{r+1}v)$$

или

$$D^{r+1}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=x^{-(r+1)}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}D^{r+1}v;$$

умноживъ же обѣ части на x^{-n+r+1}, получаемъ:

$$x^{-n+r+1}D^{r+1}\left\{x^{-\alpha}\prod^{n-r-1}x^{\alpha+n}\right\}x^{-(r+1)}v=$$

$$=x^{-(\alpha+n)}\prod^{n-r-1}x^{(\alpha+n)}\,.\,D^{r+1}v. \qquad (1)'$$

3. Теперь докажемъ слѣдующее тождество:

$$\left[x^{-n+r+1} D^{r+1}\right]^k \prod^{n-r} D^r u_\rho =$$

$$= x^{-\mu_{n-r,\,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho+k}} D^{r+1} \left[x^{-n+r+1} D^{r+1}\right]^k u_\rho. \quad (2)$$

Здѣсь $\mu_{n-r,\,\rho+k} = \mu_{n-r,\,\rho} + nk$.

а $[x^{-n+r+1} D^{r+1}]^k$ означаетъ повтореніе k разъ операціи, указанной въ скобкахъ.

Пусть u_ρ и $u_{\rho+1}$ двѣ произвольныя функціи, связанныя уравненіемъ:

$$u_\rho = D^{-(r+1)} x^{n-r-1} u_{\rho+1}.$$

Замѣтивъ, что

$$\prod^{n-r} D^r u_\rho = x^{-\mu_{n-r,\,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho}} D^{r+1} u_{\rho+1}$$

послѣ подстановки вмѣсто u_ρ его значенія и дифференцируя обѣ части $(r+1)$ разъ, имѣемъ:

$$D^{r+1} \prod^{n-r} D^r u_\rho = D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho} + n} \right\} x^{-(r+1)} u_{\rho+1},$$

по умноженіи обѣихъ частей на x^{-n+r+1}, на основаніи формулы $(1)'$, получимъ:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \prod^{n-r} D^r u_\rho = x^{-\mu_{n-r,\,\rho+1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\,\rho+1}} D^{r+1} u_{\rho+1}.$$

Послѣднее равенство можно написать такимъ образомъ:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+1} =$$

$$= \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+1}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+1}.$$

Замѣтивъ, что выраженія въ скобкахъ имѣютъ тотъ-же самый видъ, мы въ-правѣ написать:

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+1}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+1} =$$

$$= \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+2}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+2}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+2}$$

. . . .

$$x^{-n+r+1} D^{r+1} \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+k-1}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+k-1}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+k-1} =$$

$$= \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+k}} \right\} D^{r+1} u_{\rho+k}.$$

Исключая изъ всѣхъ этихъ равенствъ $u_{\rho+1} \ldots\ldots u_{\rho+k-1}$, найдемъ:

$$\left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^k \left\{ x^{-\mu_{n-r,\rho}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho}} \right\} D^{r+1} u_\rho =$$

$$= x^{-\mu_{n-r,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{\mu_{n-r,\rho+k}} D^{r+1} u_{\rho+k}$$

при чемъ въ силу зависимости между u_ρ и $u_{\rho+1}$ имѣемъ:

$$u_\rho = \left[D^{-(r+1)} x^{n-r-1} \right]^k u_{\rho+k}.$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ равенствъ $u_{\rho+k}$, и получимъ искомое тождество. Если же изъ этихъ же равенствъ исключить u_ρ и принять условно

$$\left[D^{-(r+1)} x^{n-r-1} \right]^k u_{\rho+k} = \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{-k} u_{\rho+k} ,$$

то не трудно будетъ замѣтить, что тождество (2) имѣетъ мѣсто и для отрицательныхъ значенiй k.

Изъ разсмотрѣнiя тождества (2) вытекаетъ слѣдующее: если положить

$$u_\rho = v_r$$

$$v_{r+1} = \left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{k_{n-r-1}} v_r ,$$

причемъ k_{n-r-1} замѣняетъ k, то предыдущее тождество можно представить въ видѣ:

$$\left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{k_{n-r-1}} \prod^{n-r} D^r v_r =$$

$$= x^{\mu_{n-r,\,\rho+k}} \prod^{n-r-1} x^{-\mu_{n-r,\,\rho+k}} D^{r+1} v_{r+1}.$$

Предполагая $\mu_{n-r\,,\,\rho+k} = 0$

или, что то-же, $\mu_{n-r\,,\,\rho} = -nk_{n-r-1}$,

получаемъ:

$$\left[x^{-n+r+1} D^{r+1} \right]^{k_{n-r-1}} \prod^{n-r} D^r v_r = \prod^{n-r-1} D^{r+1} v_{r+1}.$$

Такъ какъ эта формула справедлива при всякомъ значенiи r отъ 0 до n, то давъ r всѣ значенiя отъ 0 до $n-1$, по исключенiи промежуточныхъ функцiй $v_1, v_2, \ldots . v_{r-1}$, легко находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \left[x^{-n+r} D^r\right]^{k_{n-r}} \left[x^{-n+r-1} D^{r-1}\right]^{k_{n-r+1}} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \left[x^{-n+1} D\right]^{k_{n-1}} \prod^{n} v_0 = \prod^{n-r} D^r v_r \\ v_r = \left[x^{-n+r} D^r\right]^{k_{n-r}} \cdots\cdots \left[x^{-n+1} D\right]^{k_{n-1}} v_0 \end{array}\right\} \qquad (2)'$$

или полагая для краткости

$$v_r = \Phi^{(r)} v_0, \quad v_0 = \Phi^{(-r)} v_r$$

имѣемъ:

$$\Phi^{(r)} \prod^{n} v_0 = \prod^{n-r} D^r v_r$$

или

$$\Phi^{(r)} \prod^{n} v_0 = \prod^{n-r} D^r \Phi^{(r)} v_0. \qquad (3)$$

Если положить въ этихъ формулахъ $r = n - 1$ и замѣтить, что $\prod^{1} u = Du$, то найдемъ:

$$\Phi^{(n-1)} \prod^{n} v_0 = D^n \Phi^{(n-1)} v_0. \qquad (3)'$$

Выводъ этотъ справедливъ, когда $\mu_{i+1,\rho} = -nk_i$, гдѣ k_i цѣлое положительное или отрицательное число.

4. Переходимъ теперь къ интегрированію уравненія

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a_i z^{-i} D^{n-i} y + a_n z^m y = 0. \qquad \text{(I)}$$

Согласно съ сказаннымъ въ § 2, это уравненіе можно представить въ видѣ:

$$z^{-s_n}\left[z^{\mu_i} D\right]_1^n y + a_n z^m y = 0. \qquad (\mathrm{I})'$$

Не трудно привести это уравненіе къ другому такого-же вида, въ которомъ соотвѣтственное m равно нулю.

Дѣйствительно, сдѣлавъ замѣну независимаго перемѣннаго по формулѣ

$$z = \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

гдѣ p пока произвольное постоянное количество, и умноживъ обѣ части уравненія на x^{np}, получимъ:

$$x^{-s_n(p+1)+np}\left[x^{\mu_i(p+1)-p} D\right]_1^n y + \frac{a_n}{(p+1)^m} x^{m(p+1)+np} y = 0.$$

Выбравъ p такъ, чтобы

$$m(p+1) + np = 0, \qquad (\mathrm{a})$$

и положивъ для краткости

$$\mu_i(p+1) - p = -nk_{i-1}\,; \quad -s_n(p+1) + np = n\sigma \qquad (\mathrm{b})$$

$$\sigma = k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1}\,, \quad \frac{a_n}{(p+1)^m} = \lambda,$$

послѣднее уравненіе обращаемъ въ такое:

$$x^{n\sigma}\left[x^{-nk_{i-1}} D\right]_1^n y + \lambda y = 0\,, \qquad (\mathrm{II})$$

или, наконецъ, вводя символъ Π:

$$\prod^n y + \lambda y = 0.$$

Если всѣ k_{i-1} суть числа цѣлыя, то, подвергая обѣ части этого уравненія операціи, которую мы означали чрезъ $\Phi^{(n-1)}$, получимъ:

$$\Phi^{(n-1)} \prod^{n} y + \lambda \Phi^{(n-1)} y = 0,$$

или, на основаніи формулы (3)',

$$D^n \Phi^{(n-1)} y + \lambda \Phi^{(n-1)} y = 0.$$

Допустивъ, что

$$\Phi^{(n-1)} y = \omega,$$

получаемъ уравненіе:

$$D^n \omega + \lambda \omega = 0,$$

интегралъ котораго извѣстенъ.

Убѣдившись такимъ образомъ, что уравненіе (II) интегрируется, когда k_{i-1} суть цѣлыя числа, при помощи равенствъ (a) и (b) легко находимъ, что уравненіе вида (I)' интегрируется, когда

$$\mu_i = -\frac{(m+n)(nk_{i-1}+1)-n}{n}, \qquad \text{(III)}$$

гдѣ m совершенно произвольно.

И такъ, для того чтобы уравненіе вида (I), коэффиціенты котораго суть данныя числа

$$a_1, a_2, \ldots a_{n-1},$$

интегрировалось, необходимо, чтобы коэффиціенты эти были равны соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ уравненія (I)', которые мы для ясности означимъ чрезъ $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$. Но послѣдніе суть опредѣленныя функціи (алгебраическія) количествъ: k_1,

$k_2, \dots k_{n-1}, m$; слѣдовательно, приравнявъ одни коэффиціенты другимъ, мы получимъ систему изъ $(n-1)$ уравненій:

$$A_1 = a_1, A_2 = a_2, \dots, A_{n-1} = a_{n-1} \qquad \text{(IV)}$$

съ n неизвѣстными $k_1, \dots k_{n-1}, m$. Предположимъ, что мы опредѣлили $k_1, k_2, \dots k_{n-2}$ и m чрезъ k_{n-1}; если при этомъ окажется, что всѣ $k_1, k_2, \dots k_{n-2}$ выражаются чрезъ k_{n-1} такъ, что при предположеніи k_{n-1} цѣлымъ числомъ и всѣ остальные $k_1, k_2 \dots k_{n-2}$ будутъ цѣлыми числами, то, при найденномъ значеніи m въ функціи k_{n-1}, данное уравненіе съ коэффиціентами $a_1, \dots a_{n-1}$ интегрируется.

Въ частномъ случаѣ, когда

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0,$$

т. е. когда данное уравненіе имѣетъ видъ:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_n z^m y = 0, \qquad \text{(V)}$$

два значенія m могутъ быть легко опредѣлены. Дѣйствительно, не трудно замѣтить, что при высказанныхъ условіяхъ, уравненія (IV) между прочимъ удовлетворяются, когда

$$\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-1} = 0,$$

что возможно на основаніи формулы (III), когда

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = k,$$

при чемъ

$$m = -n + \frac{n}{nk+1}.$$

Второе значеніе m опредѣлится, если положить въ уравненіи (V)

$$z = -\frac{1}{x}, \quad y = x^{n-1} u,$$

ибо на основаніи извѣстной формулы

$$\frac{d^n y}{d\left(-\frac{1}{x}\right)^n} = x^{n+1} \frac{d^n (x^{n-1} y)}{dx^n}$$

уравненіе (V) преобразуется въ такое

$$\frac{d^n u}{dx^n} + (-1)^m a_n x^{m_1} u = 0,$$

гдѣ

$$m_1 = -(m + 2n).$$

Отсюда

$$m_1 = -n - \frac{n}{nk+1}.$$

КЪ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРІИ

ПОЛЯРИЗАЦІИ СВѢТА.

А. П. Грузинцева.

Цѣль настоящей замѣтки — показать, что электромагнитная теорія явленій отраженія и преломленія свѣта на границѣ прозрачныхъ изотропныхъ срединъ столь-же несостоятельна, какъ и старая теорія Фрэнэля и, кромѣ того, несостоятельность ея обнаруживается въ томъ же пунктѣ, въ которомъ слаба теорія Фрэнэля.

Чтобы показать это, мы будемъ трактовать вопросъ въ его общемъ видѣ; причемъ основныя уравненія возьмемъ въ той формѣ, въ какой они даны у Гельмгольца (см. его Wissenschaftliche Abhandlungen, 1-er Band, S. 621, а также примѣчаніе къ стр. 558), и повторены г. Лоренцомъ въ его статьѣ «Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes», помѣщенной въ «Zeitschrift für Mathematik und Physik» за 1877 годъ.

Назовемъ —

ξ, η, ζ составляющія электрическаго колебанія частицы;

x, y, z ея координаты въ состояніи покоя;

A, B, C косинусы направленія передачи колебаній;

A', B', C' косинусы направленія самаго колебанія;

ω скорость свѣта и —

λ длина волны.

Тогда имѣемъ

$$\xi = A' \operatorname{sn} Q,\ \eta = B' \operatorname{sn} Q,\ \zeta = C' \operatorname{sn} Q,$$

гдѣ

$$Q = \frac{2\pi}{\lambda}(\omega t - \delta),\ \delta = Ax + By + Cz,$$

и амплитуда колебанія принята равною единицѣ. Подставляя все это въ уравненіе (20 c) Гельмгольца, получимъ:

$$(CB' - BC')\ \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{cs} Q = h^2\ \frac{dL}{dt}$$

$$(AC' - BA')\ \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{cs} Q = h^2\ \frac{dM}{dt}$$

$$(BA' - AB')\ \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{cs} Q = h^2\ \frac{dN}{dt},$$

причемъ L, M, N введены вмѣсто λ, μ, ν Гельмгольца и положено

$$h^2 = \frac{A(1 + 4\pi\theta)\epsilon}{\theta}.$$

Уравненіе (20 d) даетъ:

$$\Delta_2\varphi = A^2\varkappa\ \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

но по уравненію (17 a, стр. 613)

$$\Delta_2\varphi = 0,$$

слѣдовательно

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0\,;$$

откуда беремъ частное рѣшеніе этого уравненія:

$$\varphi = 0.$$

Затѣмъ уравненія (20 e) даютъ:

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = -4\pi\theta A A' \operatorname{cs} Q \,\frac{2\pi\omega}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4\pi\theta A B' \operatorname{cs} Q \,\frac{2\pi\omega}{\lambda}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = -4\pi\theta A C' \operatorname{cs} Q \,\frac{2\pi\omega}{\lambda}$$

причемъ положено

$$\varkappa = \infty\,,$$

ибо мы разсматриваемъ прозрачныя (діэлектрическія) средины.

Полагая здѣсь:

$$L = \alpha \operatorname{sn} Q\,,\ M = \beta \operatorname{sn} Q\,,\ N = \gamma \operatorname{sn} Q, g^2 = 4\pi\theta A\,,$$

найдемъ сначала изъ уравненій (20 c)

$$\omega h^2\alpha = CB' - BC'\,,\ \omega h^2\beta = AC' - CA'\,,\ \omega h^2\gamma = BA' - AB',$$

а потомъ изъ уравненій (20 e)

$$A'g^2\omega = B\gamma - C\beta\,,\ B'g^2\omega = C\alpha - A\gamma\,,\ C'g^2\omega = A\beta - B\alpha\,;$$

но

$$B\gamma - C\beta = \frac{A'}{\omega h^2}\,,\ C\alpha - A\gamma = \frac{B'}{\omega h^2}\,,\ A\beta - B\alpha = \frac{C'}{\omega h^2}\,,$$

ибо

$$AA' + BB' + CC' = 0\,,$$

поэтому

$$\omega^2 = \frac{1}{g^2h^2}$$

или

$$\omega = \frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\theta)}}\,;$$

это соотношенiе дано у Гельмгольца, на стр. 625, и оно намъ понадобится ниже.

Положимъ теперь, что колебанiя дошли до границы двухъ прозрачныхъ изотропныхъ (дiэлектрическихъ — съ точки зрѣнiя электромагнитной теорiи свѣта) срединъ; тотчасъ же развиваются отраженныя и преломленныя колебанiя. Назовемъ количества ε, Q, ω, λ, относящiяся до отраженныхъ колебанiй, тѣми же буквами, какъ и для падающихъ, только съ значкомъ ($'$) вверху, а количества, относящiяся до преломленныхъ колебанiй, тѣми же буквами со значкомъ ($_1$) внизу; причемъ амплитуду отраженныхъ колебанiй назовемъ буквою H, а преломленныхъ буквою G; уголъ паденiя i, уголъ отраженiя r; косинусы направленiя отраженныхъ колебанiй m', n', p'; преломленныхъ m'_1, n'_1, p'_1; косинусы направленiя отраженнаго луча m, n, p, а преломленнаго m_1, n_1, p_1*.

---

* Мы здѣсь держимся обозначенiй нашей статьи «Объ отраженiи и преломленiи свѣта». См. «Сообщенiя» харьковскаго математическаго общества, за 1880 г., вып. II, стр. 81.

Тогда получимъ (см. Лоренца, стр. 14 и 15)

$$\left.\begin{aligned} \frac{A'\operatorname{sn} Q}{\varepsilon} + \frac{Hm'\operatorname{sn} Q'}{\varepsilon} &= \frac{m'_1 G \operatorname{sn} Q_1}{\varepsilon_1} \\ \frac{B'\operatorname{sn} Q}{\varepsilon} + \frac{Hn'\operatorname{sn} Q'}{\varepsilon} &= \frac{n'_1 G \operatorname{sn} Q_1}{\varepsilon_1} \\ \frac{C'\operatorname{sn} Q}{\varepsilon} + \frac{Hp'\operatorname{sn} Q'}{\varepsilon} &= \frac{p'_1 G \operatorname{sn} Q_1}{\varepsilon_1} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{A})$$

$$\left.\begin{aligned} A'\operatorname{sn} Q + Hm'\operatorname{sn} Q' &= s\, Gm'_1 \operatorname{sn} Q_1 \\ B'\operatorname{sn} Q + Hn'\operatorname{sn} Q' &= s\, Gn'_1 \operatorname{sn} Q_1 \\ C'\operatorname{sn} Q + Hp'\operatorname{sn} Q' &= s\, Gp'_1 \operatorname{sn} Q_1 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{B})$$

Здѣсь положено

$$s = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$$

и $\varepsilon = \varepsilon'$, что очевидно.

Системы (A) и (B) суть основныя въ разбираемой теоріи. Изъ нихъ находимъ путемъ, указаннымъ въ нашей статьѣ — «Математическая теорія явленій отраженія и преломленія свѣта» и т. д. («Сообщенія» харьковскаго математическаго общества за 1880 г., вып. II, стр. 81), сначала слѣдующія уравненія:

$$\operatorname{sn} i(B' + n'H) = \frac{\omega h^2}{\omega_1 h_1^2}\frac{\theta}{\theta_1}\operatorname{sn} r n'_1 G$$

$$\operatorname{cs} i(B' - n'H) = \frac{\omega h^2}{\omega_1 h_1^2}\frac{\theta}{\theta_1}\operatorname{cs} r n'_1 G$$

$$B' + n'H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} n'_1 G\,,$$

затѣмъ уравненія:

$$C'\mathrm{cs}\,i - A'\mathrm{sn}\,i - (p'\mathrm{cs}\,i + m'\mathrm{sn}\,i)\,H = \frac{\omega h^2}{\omega_1 h_1^2}\frac{\theta}{\theta_1}(p'_1\mathrm{cs}\,r - m'_1\mathrm{sn}\,r)\,G$$

$$A' + m'H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} m'_1\, G$$

$$C' + p'H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} p'_1\, G\,.$$

Если свѣтъ поляризованъ въ такъ-называемомъ первомъ азимутѣ, то приведенныя уравненія обращаются въ слѣдующую систему:

$$\mathrm{sn}\,i\,(1 + H) = \frac{\omega h^2\theta}{\omega_1 h_1^2\theta_1}\,\mathrm{sn}\,r\,G \tag{1}$$

$$\mathrm{cs}\,i\,(1 - H) = \frac{\omega h^2\theta}{\omega_1 h_1^2\theta_1}\,\mathrm{cs}\,r\,G \tag{2}$$

$$1 + H = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,G\,. \tag{3}$$

Здѣсь только два неизвѣстныхъ G и H, поэтому 1-е уравненіе и 3-е умноженное на $\mathrm{sn}\,i$ должны быть тождественны; это даетъ условное уравненіе

$$\frac{\omega h^2\theta}{\omega_1 h_1^2\theta_1}\,\frac{\mathrm{sn}\,r}{\mathrm{sn}\,i} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \tag{a}$$

Если свѣтъ поляризованъ во 2-мъ азимутѣ, то имѣемъ:

$$1 + H = \frac{\omega h^2\theta}{\omega_1 h_1^2\theta_1}\,G \tag{I}$$

$$\mathrm{sn}\,i\,(1 + H) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,\mathrm{sn}\,r\,G \tag{II}$$

$$\mathrm{cs}\,i\,(1 - H) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\,\mathrm{cs}\,r\,G\,. \tag{III}$$

Здѣсь тоже только два неизвѣстныхъ G и H, поэтому должно существовать условіе:

$$\frac{\omega h^2 \theta}{\omega_1 h_1^2 \theta_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{\operatorname{sn} r}{\operatorname{sn} i}. \qquad (\mathfrak{b})$$

Условіе же (a) противорѣчитъ ($\mathfrak{b}$) вообще и совмѣстно съ нимъ только въ частномъ случаѣ нормальнаго паденія. Если же въ обѣихъ системахъ отбросить уравненія, выражающія равенства составляющихъ колебаній перпендикулярныхъ къ плоскости раздѣла, то въ каждой изъ нихъ останутся только по два уравненія, и тогда мы получимъ опредѣленное рѣшеніе; именно — рѣшеніе Фрэнэля.

Такимъ образомъ видимъ, что электромагнитная теорія отраженія и преломленія свѣта приводитъ къ тому же неразрѣшимому пункту, какъ и теорія Фрэнэля[1].

---

[1] Замѣтимъ здѣсь кстати, что въ цитированной статьѣ Лоренца помѣщенъ выводъ основнаго уравненія теоріи двойнаго преломленія свѣта (ур. 45, стр. 20), но этотъ выводъ несостоятеленъ. Дѣйствительно, при существованіи условія (43) стр. 20, уравненіе (40) стр. 19-й даетъ:

$$\frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3} = 0;$$

подставляя это въ уравненіе (41), получимъ:

$$\frac{p}{\varepsilon_1} = Bvp; \; \frac{q}{\varepsilon_2} = Bvq, \; \frac{r}{\varepsilon_3} = Bvr,$$

т. е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$; значитъ, средина изотропна, а потому никакого двойнаго преломленія въ ней не существуетъ.

20 сентября
1882 г.