ИНТЕГРИРОВАНІЕ

НѢКОТОРЫХЪ ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

К. А. Торопова.

Въ настоящей замѣткѣ я указываю на три вида обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго и втораго порядка, интегрирующихся въ квадратурахъ.

I.

Эйлеръ въ сочиненіи «Institutionum Calculi Integralis volumen primum», трактуя обыкновенныя дифференціальныя уравненія перваго порядка, приводитъ нѣсколько уравненій, имѣющихъ, сравнительно, частный видъ.

Одно изъ этихъ уравненій (Problema 54) есть:

$$\alpha y dx + \beta x dy + x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ α, β, γ и δ величины постоянныя. Для отдѣленія перемѣнныхъ Эйлеръ полагаетъ:

$$x^\alpha y^\beta = t,\ x^\gamma y^\delta = u.$$

Уравненіе (1), какъ мы сейчасъ покажемъ, интегрируется въ квадратурахъ и въ томъ случаѣ, когда α, β, γ и δ будутъ какими угодно функціями произведенія $x^m y^n$.

Введемъ въ уравненіе (1) вмѣсто y новую функцію t посредствомъ уравненія

$$x^m y^n = t.$$

Это послѣднее даетъ

$$nxdy + mydx = xy\frac{dt}{t},$$

слѣдовательно,

$$\alpha y dx = \frac{\alpha xy}{m}\frac{dt}{t} - \frac{\alpha n}{m}xdy,$$

$$x^m y^n \gamma y dx = \frac{\gamma xy}{m}dt - \frac{nt\gamma}{m}xdy.$$

Уравненіе (1) тогда приметъ слѣдующій видъ:

$$y\frac{\alpha + \gamma t}{t}dt + (m\beta + mt\delta - n\alpha - nt\gamma)dy = 0,$$

гдѣ перемѣнныя отдѣляются, такъ какъ α, β, γ и δ здѣсь функціи t.

Общій интегралъ этого уравненія

$$y = Ce^{\int\frac{(\alpha + t\gamma)dt}{t[n(\alpha+t\gamma) - m(\beta+t\delta)]}},$$

гдѣ C постоянная произвольная, введенная интегрированіемъ, будетъ и общимъ интеграломъ уравненія (1), если мы замѣнимъ въ немъ t чрезъ $x^m y^n$.

Положивъ въ уравненіи (1)

$$\gamma = \delta = 0,\ \beta = 1,$$

что, очевидно, не уменьшитъ общности его, получимъ уравненіе

$$f(x^m y^n)ydx + xdy = 0, \qquad (2)$$

общій интегралъ котораго будетъ:

$$y = Ce^{\int \frac{f(t)\,dt}{t[nf(t)-m]}}, \tag{3}$$

гдѣ

$$t = x^m y^n.$$

Если мы положимъ въ (2)

$$n = -m = 1,$$

то получимъ однородныя уравненія

$$y' + \frac{y}{x} f\left(\frac{y}{x}\right) = 0\,*.$$

Вслѣдствіе произвольности въ уравненіи (2) величинъ m и n и функціи $f(x^m y^n)$, оно заключаетъ въ себѣ безчисленное множество частныхъ случаевъ.

Напримѣръ, уравненіе

$$y' + ay^2 = \frac{\varphi(xy)}{x^2}, \tag{4}$$

есть частный случай уравненія (2) и, слѣдовательно, интегрируется въ квадратурахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, оно можетъ быть такъ написано:

$$xy \cdot xdy + (a(xy)^2 - \varphi(xy))\,ydx = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія по формулѣ (3) будетъ

$$y = Ce^{\int \frac{(at^2-\varphi(t))\,dt}{t(at^2-\varphi(t)-t)}},$$

* Буквы со значками вверху означаютъ вездѣ производныя тѣхъ-же буквъ безъ значковъ.

гдѣ

$$t = xy.$$

Пусть

$$\varphi(xy) = \psi(xy) - cxy,$$

тогда вмѣсто уравненія (4) имѣемъ:

$$y' + c\frac{y}{x} + ay^2 = \frac{\psi(xy)}{x^2}.$$

Уравненіе (4) есть частный случай такого

$$y' + ay^2 = \frac{f(xy^{m-1})}{x^{\frac{m}{m-1}}},$$

которое тоже, очевидно, можетъ быть приведено къ виду уравненія (2).

Разсмотримъ двѣ геометрическія задачи, которыя, между прочими, приводятъ къ интегрированію уравненія (2).

1) Найдти кривыя, для которыхъ площадь, ограниченная осью абсциссъ, двумя ординатами (постоянной и перемѣнной) и кривою, есть данная функція площади прямоугольника, построеннаго на координатахъ точки, соотвѣтствующей перемѣнной ординатѣ*.

Условіе задачи

$$\int y dx = f(xy),$$

отсюда дифференцируя получимъ уравненіе

$$(f'(xy) - 1) y dx + f'(xy) x dy = 0.$$

Общій интегралъ его по формулѣ (3) выразится такъ

* Здѣсь и далѣе мы имѣемъ въ виду систему прямоугольныхъ координатъ.

$$y = Ce^{\int \frac{1-f(t)}{t}\,dt},$$

или

$$\log Cx = \int \frac{f'(t)}{t}\,dt,$$

гдѣ

$$t = xy.$$

Напримѣръ, если

$$f(xy) = e^{xy},$$

то уравненіе искомыхъ кривыхъ будетъ:

$$\log Cx = \int \frac{e^t}{t}\,dt.$$

2) Найдти кривыя, для которыхъ площадь, ограниченная двумя радіусами-векторами, выходящими изъ начала координатъ, и кривою есть данная функція площади того же прямоугольника, что и въ предыдущей задачѣ.

Мы имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\int (xdy - ydx) = f(xy).$$

Уравненіе искомыхъ кривыхъ выразится интеграломъ уравненія:

$$(1 + 2f'(xy))\,ydx + (2f'(xy) - 1)\,xdy = 0.$$

По формулѣ (3) получимъ:

$$y = C\sqrt{t}\,e^{\int \frac{f'(t)}{t}\,dt},$$

гдѣ

$$t = xy.$$

Замѣтимъ, что мы приходимъ къ уравненію (2) и въ тѣхъ случаяхъ, когда ищемъ кривыя по одному изъ условій болѣе общихъ:

$$\int y dx = xyf(x^m y^n)$$

$$\int (xdy - ydx) = xyf(x^m y^n).$$

II.

Пріемъ, употребляемый Эйлеромъ для перехода отъ линейныхъ уравненій къ уравненіямъ:

$$y = xf(y') + F(y')$$

и отъ однородныхъ къ уравненіямъ

$$y = x^2 F\left(\frac{y'}{x}\right),$$

будучи примѣненъ къ уравненію (2), даетъ слѣдующее:

$$f(x^m y'^n) y dx + x dy = 0, \tag{5}$$

которое по внѣшнему виду представляетъ чрезвычайное сходство съ уравненіемъ (2).

Покажемъ, что уравненіе (5) интегрируется въ квадратурахъ.

Представивъ его въ видѣ

$$y + xy' f_1(x^m y'^n) = 0,$$

гдѣ

$$f_1(x^m y'^n) = \frac{1}{f(x^m y'^n)}$$

и дифференцируя, получимъ:

$$(1+f_1(x^m y'^n)+mx^m y'^n f_1'(x^m y'^n))\,y'dx+$$
$$+(f_1(x^m y'^n)+nx^m y'^n f_1(x^m y'^n))\,xdy'=0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе принадлежитъ къ типу уравненій (2), то общій интегралъ его найдемъ по формулѣ (3)

$$y'=Ce^{\int\frac{1+f_1(t)+mtf'_1(t)}{t[n+(n-m)f_1(t)]}dt}, \qquad (\alpha)$$

гдѣ
$$t=x^m y'^n. \qquad (\beta)$$

Исключая y' и t изъ уравненій (α), (β) и (5), будемъ имѣть общій интегралъ уравненія (5).

Исключеніе y' можно произвести такимъ образомъ.

Возвышая уравненіе (α) въ степень n, получимъ:

$$y'^n=C^n e^{\int\left(\frac{dt}{t}+m\frac{f_1(t)+ntf_1'(t)}{t[n+(n-m)f_1(t)]}dt\right)},$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (β),

$$x=C^{-\frac{n}{m}}e^{-\int\frac{f_1(t)+ntf_1'(t)}{t[n+(n-m)f_1(t)]}dt}.$$

Слѣдовательно, общій интегралъ уравненія

$$f(x^m y'^n)\,xdy+ydx=0,$$

представится слѣдующими двумя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x&=C^{-\frac{n}{m}}e^{\int\frac{f(t)+ntf'(t)}{[(m-n)f(t)-n]t}dt}\\ y&=-C^{\frac{m-n}{n}}f(t)e^{\int\frac{1+(m-n)tf'(t)}{[n+(n-m)f(t)]t}dt}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

гдѣ C постоянная произвольная, вошедшая при интегрированіи u.

$$t = x^m y'^n.$$

Уравненіе (5) можно представить еще въ иномъ видѣ:

$$f\left(\frac{x^m}{x'^n}\right) ydx + xdy = 0,$$

или, перемѣнивъ x на y, y на x и n на $-n$, въ такомъ

$$f(y^m y'^n)\, ydx + xdy = 0. \qquad (7)$$

Общій интегралъ уравненія (7) получимъ по формуламъ (6), замѣнивъ въ нихъ x чрезъ y, y чрезъ x и n чрезъ $-n$.

Частные случаи: 1) Если мы положимъ въ уравненіи (5)

$$n = -m = 1,$$

то получимъ уравненіе Эйлера

$$y = x^2 F\left(\frac{y'}{x}\right),$$

если сдѣлаемъ

$$F\left(\frac{y'}{x}\right) = -\frac{y'}{xf\left(\frac{y'}{x}\right)}.$$

2) Положивъ въ уравненіи (7)

$$m = -n = 1,$$

получимъ уравненія однородныя относительно y и y'

$$x = \varphi\left(\frac{y}{y'}\right) \qquad (8)$$

3) Положивъ въ уравненіи (7)

$$m = n = 1,$$

получимъ

$$x = y^2 \varphi(yy'). \tag{9}$$

4) Положивъ въ уравненіи (5)

$$m = n = 1,$$

получимъ

$$y = \varphi(xy'). \tag{10}$$

Рѣшимъ три геометрическія задачи, которыя приводятъ къ уравненіямъ (8), (9) и (10).

1) Найдти кривыя, для которыхъ абсцисса точки есть данная функція подкасательной въ этой точкѣ.

Такъ какъ длина подкасательной есть

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'},$$

то по условію задачи имѣемъ уравненіе

$$x = f\left(\frac{y}{y'}\right). \tag{8}$$

Дифференцируя его, получимъ:

$$dx = x'dy = f'(yx')(x'dy + ydx'),$$

или

$$ydx' + \frac{f'(yx') - 1}{f'(yx')}\, x'dy = 0.$$

По формулѣ (3) общій интегралъ этого уравненія будетъ:

$$x' = Ce^{\int \frac{1 - f'(t)}{t} dt},$$

или, такъ какъ

$$t = yx',$$

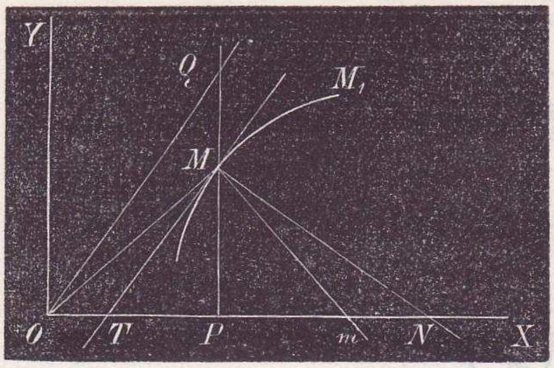
то

$$y = Ce^{\int \frac{f'(t)}{t} dt}. \qquad (\gamma)$$

Кромѣ того, мы имѣемъ по уравненіи (8)

$$x = f(t). \qquad (\delta)$$

Уравненія (γ) и (δ) представляютъ общій интегралъ нашего уравненія (8), слѣдовательно, и уравненія искомыхъ кривыхъ. Мы могли бы, конечно, прямо написать эти уравненія по формуламъ (6)



2) MT и MN касательная и нормаль къ кривой MM, въ точкѣ M. OP и MP координаты точки M.

Линія Mm перпендикулярна радіусу вектору OM точки M. Проекція линій Mm на ось абсциссы дана въ функціи поднормали точки M. Найдти уравненія кривыхъ MM_1.

Такъ какъ поднормаль

$$PN = yy'$$

и

$$\text{пр. } Mm = Pm = \frac{MP^2}{OP} = \frac{y^2}{x},$$

то, на основаніи условія

$$Pm = f(PN),$$

получимъ дифференціальное уравненіе

$$y^2 = xf(yy'),$$

или

$$x = \frac{y^2}{f(yy')} = y^2\varphi(yy'). \tag{9}$$

Общій интегралъ этого уравненія находится очень просто дифференцированіемъ его

$$1 = y^2\varphi'(yy')\frac{d(yy')}{dx} + 2\varphi(yy')yy'.$$

Обозначая yy' чрезъ t, получимъ:

$$(1 - 2t\varphi(t)) = y\frac{t\varphi'(t)dt}{dy},$$

откуда

$$y = Ce^{\int \frac{t\varphi'(t)dt}{1-2t\varphi(t)}}.$$

Послѣднее уравненіе, соединенное съ даннымъ,

$$x = y^2\varphi(t)$$

дадутъ искомыя уравненія кривыхъ MM_1.

3) Линія OQ приведена параллельно касательной MT. Ордината точки M дана въ функціи отрѣзка PQ; найдти уравненія кривыхъ MM_1.

Такъ какъ

$$PQ = xy',$$

то условное уравненіе будетъ:

$$y = f(xy'). \tag{10}$$

Дифферэнцируя его, получимъ:

$$y'dx = f'(xy')(xdy' + y'dx). \qquad (\delta)$$

Формула (3) даетъ общій интегралъ уравненія (δ) въ такомъ видѣ

$$y' = Ce^{\int \frac{1-f'(t)}{t} dt},$$

или, такъ какъ здѣсь

$$t = xy',$$

то

$$x = Ce^{\int \frac{f'(t)dt}{t}}.$$

Послѣднее и данное

$$y = f(t)$$

уравненія и будутъ уравненіями искомыхъ кривыхъ.

Подобныхъ задачъ можно подобрать, конечно, сколько угодно.

III.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$y'' = f(ax + by + c)F(y'). \qquad (11)$$

Если мы введемъ въ него новую функцію t вмѣсто y, полагая

$$ax + by + c = t,$$

то оно приметъ слѣдующій видъ:

$$t'' = bf(t)F\left(\frac{t'-a}{b}\right).$$

Помножая послѣднее на

$$\frac{t'dx}{F\left(\frac{t'-a}{b}\right)} = \frac{dt}{F\left(\frac{t'-a}{b}\right)}$$

и интегрируя, получимъ:

$$\int \frac{t'dt'}{F\left(\frac{t'-a}{b}\right)} = b\int f(t)\,dt + C. \qquad (\varepsilon)$$

Положимъ, что изъ уравненія (ε) мы опредѣлили t и t' въ функціяхъ одной перемѣнной u

$$\left.\begin{aligned} t' &= \lambda(u, C) \\ t &= \mu(u, C). \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

Въ частныхъ случаяхъ u можетъ быть, конечно, одною изъ величинъ t или t'.

Уравненія (ζ) даютъ:

$$x + C_1 = \int \frac{\mu'(u, C)\,du}{\lambda(u, C)}, \qquad (\eta)$$

гдѣ C и C_1 постоянныя произвольныя, вошедшія отъ двухъ интегрированій.

Присоединяя къ уравненію (η) зависимость

$$ax + by + c = \mu(u, C),$$

мы будемъ имѣть общій интегралъ уравненія (11).

Примѣры: 1) Общій интегралъ уравненія:

$$y'' = f(ax + by + c)$$

$$\left.\begin{aligned} x + C_1 &= \int \frac{dt}{\sqrt{C + 2b\int f(t)\,dt}}, \\ ax + by + C &= t \end{aligned}\right\} \qquad (\vartheta)$$

2) Найдемъ общій интегралъ уравненія

$$y'' = f(ax + by + c)\,y'^3.$$

Здѣсь удобно взять за независимую перемѣнную y, а за функцію ея x; тогда наше уравненіе будетъ:

$$x'' = -f(ax + by + c).$$

Общій интегралъ послѣдняго уравненія по формулѣ (ϑ) выразится такъ:

$$y + C_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{C - 2a\int f(t)\,dt}}$$

$$ax + by + c = t.$$

Положимъ здѣсь

$$a = -b = 1,\ c = 0,\ f(t) = t,$$

тогда

$$y + C_1 = \arcsin \frac{t}{\sqrt{C}}.$$

Слѣдовательно, зависимость

$$x = y + \sqrt{C}\,\mathrm{sn}\,(y + C_1)$$

будетъ общимъ интеграломъ уравненія

$$y'' = (x - y)\,y'^3.$$

Одно изъ рѣшеній этого уравненія получимъ:

$$x = y - e\,\mathrm{sn}\,y,$$

полагая

$$C_1 = 0,\ \sqrt{C} = -e.$$

3) Найдти кривыя, кривизна которыхъ въ точкѣ есть функція линейной функціи координатъ точки.

По заданію имѣемъ

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=f(ax+by+c).$$

Формула (ε) для даннаго случая будетъ:

$$\int\frac{t'dt'}{\left(1+\left(\frac{t'-a}{b}\right)^2\right)^{3/2}}=b\int f(t)\,dt+C.$$

Такъ какъ

$$\int\frac{t'dt'}{\left(1+\left(\frac{t'-a}{b}\right)^2\right)^{3/2}}=b\,\frac{a\frac{t'-a}{b}-b}{\sqrt{1+\left(\frac{t'-a}{b}\right)^2}},$$

то

$$t'=a+b\,\frac{ab\pm\sqrt{(a^2+b^2)v-v^2}}{a^2-v},$$

гдѣ

$$v=\int f(t)\,dt+C.$$

Слѣдовательно, уравненія искомыхъ кривыхъ будутъ:

$$x+C_1=\int\frac{(a^2-v)\,dt}{a^3+ab^2-av\pm\sqrt{(a^2+b^2)v-v^2}},$$

$$ax+by+c=t.$$

Спб.

Ноябрь 1884.