О ПРИЛОЖЕНІЯХЪ ЗАКОНА

СОХРАНЕНІЯ ЭНЕРГІИ.

А. П. Грузинцева.

Всѣмъ извѣстенъ законъ сохраненія энергіи и его большое значеніе въ физикѣ; всѣмъ извѣстно, что только при помощи его можно уяснить себѣ сущность какого-нибудь физическаго явленія или показать соотношеніе и взаимную превращаемость однихъ физическихъ дѣятелей (силъ) въ другіе; но физики, большею частью, пользуются этимъ закономъ качественно, если можно такъ выразиться, а не количественно, т. е., когда приходится дать математическую теорію какого-нибудь физическаго явленія, то не пользуются непосредственно закономъ сохраненія энергіи, а прибѣгаютъ къ тѣмъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя даются теоретической механикой для случая дѣйствія тѣхъ или другихъ силъ на матеріальную точку или на систему такихъ точекъ, т. е. пользуются дифференціальными уравненіями движенія. Хотя такой способъ совершенно наученъ, но при немъ законъ сохраненія энергіи остается какъ-бы въ сторонѣ и самое изслѣдованіе усложняется безъ особой нужды; такъ поступаютъ почти всѣ писатели по математической физикѣ, за исключеніемъ очень немногихъ, какъ напр. Ралея, который въ своемъ превосходномъ сочиненіи (Theory of sound) постоянно пользуется закономъ сохраненія энергіи, между тѣмъ какъ, прибѣгая къ помощи этого закона, можно нерѣдко значительно сократить изслѣдованіе и придать ему болѣе простую и изящную форму.

Чтобы показать на самомъ дѣлѣ удобство приложенія этого закона, разсмотримъ нѣсколько примѣровъ изъ области математической физики, начиная съ простѣйшихъ и переходя къ болѣе сложнымъ и труднымъ.

Прежде всего выразимъ законъ сохраненія энергіи въ математической формѣ. Назовемъ буквою $Э$ — кинетическую энергію матеріальной точки или системы такихъ точекъ въ нѣкоторый моментъ времени, буквою P — потенціальную энергію внутреннихъ и внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на ту-же точку или систему въ тотъ же моментъ времени; тогда законъ сохраненія энергіи напишется въ-видѣ

$$Э + P = \text{пост. количеству}. \qquad (1)$$

Если мы выразимъ при помощи количествъ, опредѣляющихъ состояніе матеріальной точки или системы такихъ точекъ, величины $Э$ и P и будемъ въ состояніи найдти изъ какихъ нибудь источниковъ значеніе постояннаго количества въ правой части написаннаго уравненія, то это уравненіе можетъ служить намъ для вычисленія или $Э$, если дано P, или P, если дано $Э$, или для вычисленія другихъ величинъ, зависящихъ извѣстнымъ опредѣленнымъ образомъ отъ $Э$ и P (отъ обоихъ вмѣстѣ, или порознь). На самомъ же дѣлѣ значеніе въ конечномъ видѣ $Э$ и P бываетъ неизвѣстно непосредственно, тогда употребляютъ такой пріемъ. Возьмемъ дифференціалъ по времени отъ уравненія (1), тогда получимъ

$$dЭ + dP = 0. \qquad (2)$$

Это будетъ нѣкоторое дифференціальное уравненіе, которое и послужитъ основаніемъ для той или другой развиваемой теоріи.

Замѣтимъ, что обыкновенно пользуются закономъ сохраненія энергіи въ формѣ уравненія (2).

Предпославъ эти краткія замѣчанія, приступимъ къ изложенію тѣхъ примѣровъ, о которыхъ мы выше упоминали, что̀ собственно и составляетъ ближайшую цѣль настоящей замѣтки.

Примѣръ 1-й. Пусть матеріальная точка массы m находится въ движеніи подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: a) силы пропорціональной перемѣщенію и b) силы тренія, пропорціональной скорости движенія точки. Тогда имѣемъ для кинетической энергіи

$$Э=\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

если u будетъ разстояніе точки отъ положенія равновѣсія; потенціальная энергія равная работѣ силъ a) и b) будетъ:

$$P=\int\limits_0^u au\,du+\int\limits_0^u b\frac{du}{dt}du\ ,$$

причемъ a и b суть коэффиціенты пропорціональности.

Поэтому

$$P=\frac{au^2}{2}+b\int\limits_0^u\frac{du}{dt}du\,.$$

Подставляя въ (1) уравненіе, имѣемъ:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{au^2}{2}+b\int\limits_0^u\frac{du}{dt}du=\text{пост.}$$

Дифференцируя по t, имѣемъ:

$$m\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}+au\frac{du}{dt}+b\left(\frac{du}{dt}\right)^2=0$$

*

или

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + au + b\frac{du}{dt} = 0\,, \qquad (3)$$

потому что рѣшеніе

$$\frac{du}{dt} = 0$$

соотвѣтствуетъ положенію равновѣсія. Уравненіе (3) есть извѣстное уравненіе колебательнаго движенія точки въ сопротивляющейся срединѣ.

Примѣръ 2-й. Если бы сила а) 1-го примѣра имѣла форму

$$p = au + a'u^2\,,$$

гдѣ a и a' постоянныя количества, тогда имѣли бы:

$$\text{потенціальная энергія силы } p = \int_0^u p\,du = \frac{au^2}{2} + \frac{a'u^3}{3}.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) дастъ:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{au^2}{2} + \frac{a'u^3}{3} + b\int_0^u \frac{du}{dt}\,du = \text{постоян.}$$

Дифференцируя по t, имѣемъ:

$$m\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} + au\frac{du}{dt} + a'u^2\frac{du}{dt} + b\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 0\,.$$

Или

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + au + a'u^2 + b\frac{du}{dt} = 0\,. \qquad (4)$$

Когда $b=0$, тогда уравненія (3) и (4) даютъ уравненія колебательнаго движенія въ средѣ, не оказывающей сопротивленія движенію.

Примѣръ 3-й. Разсмотримъ теперь болѣе сложный случай. Пусть дана сложная средина, состоящая изъ двухъ системъ точекъ, находящихся въ колебательномъ движеніи. Пусть это будетъ средина, состоящая изъ эфирныхъ частицъ и матеріальныхъ. Назовемъ массу какой нибудь частицы эфира буквой μ, координаты ея x, y, z и составляющія перемѣщенія вдоль координатныхъ осей буквами π, ω, ρ; для матеріальной частицы масса будетъ m, составляющія перемѣщенія u, v, w. Пусть дѣйствующія на частицу μ силы будутъ: a) сила упругости, составляющія которой пусть будутъ Σ_x Σ_y Σ_z; b) сила взаимодѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфирныя; назовемъ ея составляющія буквами M_x, M_y, M_z; c) сила давленія (гидростатическаго), существующаго въ срединѣ въ точкѣ μ.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

Кинетическая энергія эфирныхъ частицъ во всемъ объемѣ средины:

$$Э_1 = \iiint \frac{\mu\, dx\, dy\, dz}{2}\left[\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2\right]$$

энергія матеріальныхъ частицъ:

$$Э_2 = \iiint \frac{m\, dx\, dy\, dz}{2}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right],$$

слѣдовательно, полная кинетическая энергія средины будетъ:

$$Э = Э_1 + Э_2 .$$

Вычислимъ потенціальную энергію средины. Прежде всего имѣемъ:

$$-\iiiint(\Sigma_x\delta\pi+\Sigma_y\delta\omega+\Sigma_z\delta\rho)\,dx\,dy\,dz=P_a$$

это будетъ потенціальная энергія силъ (a).

Затѣмъ

$$-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int(M_x\delta\pi+M_y\delta\omega+M_z\delta\rho)\,dx\,dy\,dz=P_b;$$

это — потенціальная энергія воздѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфирныя.

И наконецъ:

$$-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{dp}{dx}\delta\pi+\frac{dp}{dy}\delta\omega+\frac{dp}{dz}\delta\rho\right)dx\,dy\,dz=P_c;$$

это — потенціальная энергія силы давленія въ срединѣ.

Силою воздѣйствія эфира на матеріальныя частицы и упругостью матеріальныхъ частицъ пренебрегаемъ вслѣдствіе крайней малости ихъ сравнительно съ силами категорій (a) и (b). Такимъ образомъ потенціальная энергія средины будетъ:

$$P=P_a+P_b+P_c\,.$$

Подставляя значеніе $Э$ и P въ уравненіе (1), имѣемъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz\left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\right.$$

$$+\frac{m}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-\int\left(\Sigma_x\delta\pi+\Sigma_y\delta\omega+\Sigma_z\delta\rho\right)-$$

$$\left.-\int\left(M_x\delta\pi+M_y\delta\omega+M_z\delta\rho\right)-\int\left(\frac{dp}{dx}\delta\pi+\frac{dp}{dy}\delta\omega+\frac{dp}{dz}\delta\rho\right)\right\}=$$

= постоянному количеству.

Дифференцируя по t и употребляя, для краткости письма, знакъ S для обозначенія суммы трехъ подобныхъ одинъ другому членовъ, имѣемъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left\{ S\mu \frac{d^2\pi}{dt^2}\delta\pi + Sm\frac{d^2u}{dt^2}\delta u - S\Sigma_x\delta\pi - SM_x\delta\pi - \right.$$

$$\left. - S\frac{dp}{dx}\delta\pi \right\} = 0\,.$$

Положимъ здѣсь

$$u = m_x\pi\,,\; v = m_y\omega\,,\; w = m_z\rho\,,$$

тогда получимъ:

$$\iiint dx\,dy\,dz \left\{ S\Big[\mu\frac{d^2\pi}{dt^2} + m\,m^2{}_x\frac{d^2\pi}{dt^2} - \Sigma_x - \right.$$

$$\left. - M_x - \frac{dp}{dx}\Big]\delta\pi \right\} = 0\,. \qquad \text{(a)}$$

Но $\delta\pi$, $\delta\omega$, $\delta\rho$ суть величины произвольныя, поэтому уравненіе (a) распадается на три слѣдующія:

$$\mu\frac{d^2\pi}{dt^2} + m\,m^2{}_x\frac{d^2\pi}{dt^2} = \Sigma_x + M_x + \frac{dp}{dx}$$

$$\mu\frac{d^2\omega}{dt^2} + m\,m^2{}_y\frac{d^2\omega}{dt^2} = \Sigma_y + M_y + \frac{dp}{dy}$$

$$\mu\frac{d^2\rho}{dt^2} + m\,m^2{}_z\frac{d^2\rho}{dt^2} = \Sigma_z + M_z + \frac{dp}{dz}.$$

Подобныя же уравненія были уже получены мною въ другой моей работѣ (Сообщенія харьковскаго математическаго общества за 1882 г. вып. I, стр. 71).
