ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ.

К. А. Торопова.

Я разсматриваю здѣсь нѣсколько видовъ алгебраическихъ ирраціональныхъ дифференціаловъ, интегрирующихся въ конечномъ видѣ. Дифференціалы эти содержатъ ирраціонально или полиномъ третьей, или полиномъ четвертой степени, или, наконецъ, отношеніе квадратныхъ полиномовъ и, слѣдовательно, вообще не интегрируются въ логариѳмическихъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Одни изъ разсматриваемыхъ здѣсь дифференціаловъ принадлежатъ къ классу, который характеризуется тождествомъ

$$f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{x}\right) d\,\frac{1}{x}; \qquad (1)$$

другіе приводятся посредствомъ простѣйшихъ преобразованій къ дифференціаламъ этого класса.

1. Прежде чѣмъ приступить къ перечисленію дифференціаловъ, интегрирующихся въ конечномъ видѣ, мы сдѣлаемъ нѣсколько общихъ замѣчаній.

Будемъ называть цѣлою возвратною функціей степени n такую:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0,$$

гдѣ коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца, одинаковы, т. е.

$$A_i = A_{n-i}.$$

Знакоперемѣнною возвратною функціей степени n будемъ называть функцію

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots - A_2 x^2 - A_1 x - A_0,$$

въ которой коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца, одинаковы, но противныхъ знаковъ, т. е.

$$A_i = -A_{n-i}.$$

Напримѣръ, функцію x^α будемъ называть возвратною степени 2α; функцію же $x^\alpha - x^\beta$ знакоперемѣнною возвратною степени $\alpha + \beta$.

Замѣчаемъ, что знакоперемѣнная возвратная функція имѣетъ всегда корень равный единицѣ, и если она четной степени $2m$, то не имѣетъ члена съ x^m. Возвратная функція нечетной степени имѣетъ корень равный -1. Возвратная функція нулевой степени есть какая-нибудь постоянная величина; знакоперемѣнная же возвратная нулевой степени есть нуль.

2. Нетрудно убѣдиться въ слѣдующемъ.

Если дифференціалъ

$$f(x)\,dx = \frac{P\,dx}{Q\sqrt[m]{R}}, \tag{2}$$

гдѣ P, Q и R цѣлыя функціи x съ вещественными коэффиціентами, удовлетворяетъ тождеству (1), то при m четномъ функція R и одна изъ функцій P и Q должны быть возвратными, другая же изъ нихъ должна быть знакоперемѣнною возвратною; при m нечетномъ должно быть или то-же самое, что при m четномъ или же R есть знакоперемѣнная возвратная, и тогда обѣ P и Q должны быть возвратными. Кромѣ того, если P, Q и R будутъ соотвѣтственно степеней p, q и r, то во всякомъ случаѣ должно быть

$$q - p + \frac{r}{m} - 2 = 0. \tag{3}$$

Мы не будемъ здѣсь приводить доказательства этого, а разсмотримъ только два частныхъ случая, которые будутъ для насъ необходимы въ дальнѣйшемъ.

3. Пусть намъ данъ дифференціалъ

$$\frac{P(x)\,dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p}{a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \ldots + a_q} \times$$
$$\times \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}}, \tag{4}$$

удовлетворяющій тождеству (1), т. е. мы имѣемъ:

$$\sqrt{x^4 R\left(\frac{1}{x}\right)}\,.\,x^q Q\left(\frac{1}{x}\right) P(x) = -x^{q-p} Q(x)\, x^p P\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{R(x)}. \tag{5}$$

Такъ какъ предполагается, что коэффиціенты D и E одновременно не нули, то мы заключаемъ

$$x^4 R\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha\, R(x),$$

т. е.

$$E = \alpha A,\ D = \alpha B,\ C = \alpha C,\ B = \alpha D,\ A = \alpha E,$$

откуда

$$\alpha^5 = 1,$$

т. е.

$$\alpha = 1\,,$$

такъ какъ коэффиціенты A, B, C, D и E вещественны.

Слѣдовательно, мы имѣемъ возвратную функцію

$$R = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A\,,$$

если E не нуль, и

$$R = Bx^3 + Cx^2 + Bx\,,$$

если $E = 0$.

Функціи P и Q не имѣютъ общихъ множителей, что всегда можно предположить; поэтому, если A_p и a_q не равны нулю, изъ (5) получаемъ $q = p$ и

$$P(x) = \alpha x^p P\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Q\,(x) = -\,\alpha x^q\, Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

или

$$P\,(x) = -\,\alpha x^p P\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Q(x) = \alpha x^q Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

Откуда, подобно предыдущему, заключаемъ, что одна изъ P и Q должна быть возвратною, другая знакоперемѣнною возвратною и притомъ обѣ одинаковой степени.

Мы предполагали, что ни A_p, ни a_q не равны нулю. Одновременно они не могутъ быть нулями; поэтому разсмотримъ случай, когда одна изъ нихъ равна нулю.

Положимъ

$$A_p = 0,\, A_{p-1} = 0, \ldots A_{p-i+1} = 0,$$

тогда изъ тождества (5) слѣдуетъ или

$$Q(x) = \alpha x^q Q\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$P(x) = -\alpha x^{p+i} P\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (6)$$

или

$$Q(x) = -\alpha x^q Q\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$P(x) = \alpha x^{p+i} P\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (6')$$

и

$$q = p + i.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-i} x^i =$$
$$= \pm\alpha (A_{p-i} x^p + A_{p-i-1} x^{p-1} + \ldots + A_0 x^i),$$

и P будетъ такого вида

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots \pm A_1 x^{i+1} \pm A_0 x^i,$$

т. е., P есть возвратная или знакоперемѣнная возвратная функція степени $p+i$. Что же касается Q, то она, какъ видно изъ (6') и (6), будетъ тогда знакоперемѣнною возвратною, или возвратною степени тоже $p+i$.

4. Разсмотримъ теперь дифференціалъ

$$\frac{P(x)\,dx}{Q(x)\sqrt[3]{R(x)}} = \frac{A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p}{a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \ldots + a_q} \times$$
$$\times \frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}, \qquad (7)$$

удовлетворяющій тождеству (1). Мы имѣемъ

$$\sqrt[3]{x^3 R\left(\frac{1}{x}\right) \cdot P(x)\, x^q Q\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= -x^{q-p-1} Q(x)\, x^p P\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{R(x)}, \qquad (8)$$

откуда

$$x^3 R\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha R(x), \qquad (9)$$

т. е.

$$\alpha = \pm 1$$

и

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 \pm Bx \pm A.$$

Если

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 + Bx + A,$$

также, какъ и въ n° 3, заключимъ, что одна изъ функцій P и Q есть возвратная, другая же знакоперемѣнная возвратная; степень Q на единицу болѣе степени P.

Если $\alpha = -1$, т. е.

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 - Bx - A,$$

мы, подобно предыдущему найдемъ, что P и Q суть функціи одновременно или возвратныя или знакоперемѣнныя возвратныя; но послѣдняго быть не можетъ, такъ какъ P и Q не имѣютъ общихъ множителей; слѣдовательно, P и Q обѣ возвратныя и степень Q на единицу болѣе степени P. Замѣтимъ, что отъ втораго случая можемъ перейдти къ первому, замѣняя x на $-x$, такъ какъ, въ чемъ не трудно убѣдиться, возвратная функція нечетной степени при такой замѣнѣ переходитъ въ знакоперемѣнную возвратную и обратно, а возвратная функція четной степени остается возвратною.

Ограничиваясь двумя разобранными случаями дифференціала (2), мы перейдемъ къ перечисленію дифференціаловъ, интегрирующихся въ конечномъ видѣ.

5. Въ дальнѣйшемъ вездѣ буква f будетъ обозначать раціональную функцію, удовлетворяющую тождеству (1).

Дифференціалы вида

$$f(x, \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E})\, dx \qquad (10)$$

интегрируются въ конечномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференціалъ (10) всегда можно представить такъ:

$$\frac{M(x)}{N(x)} dx + \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ M, N, P и Q цѣлыя функціи x и

$$R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

Въ силу (1) будемъ имѣть тождество

$$\frac{M(x)dx}{N(x)} + \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{M\left(\frac{1}{x}\right) d\frac{1}{x}}{N\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{P\left(\frac{1}{x}\right) d\frac{1}{x}}{Q\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{R\left(\frac{1}{x}\right)}},$$

откуда

$$\frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{P\left(\frac{1}{x}\right) d\frac{1}{x}}{Q\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{R\left(\frac{1}{x}\right)}}.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ (n° 3):

$$R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A,$$
$$P(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots \pm A_1 x \pm A_0,$$
$$Q(x) = a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \ldots \mp a_1 x \mp a_0,$$

гдѣ въ P и Q нужно брать одновременно или верхніе или нижніе знаки.

Для интегрированія дифференціала

$$\frac{P(x)\,dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} \tag{11}$$

введемъ новую перемѣнную уравненіемъ

$$x = \frac{1+t}{1-t}.$$

Такъ какъ одна изъ функцій P и Q есть сумма членовъ вида

$$\alpha_i = A_i(x^{p-i} + x^i),$$

а другая сумма членовъ вида

$$\beta_i = a_i(x^{p-i} - x^i),$$

которые, по внесеніи въ нихъ t вмѣсто x, представятся такъ:

$$\alpha_i = \frac{A_i(1-t^2)^i[(1+t)^{p-2i} + (1-t)^{p-2i}]}{(1-t)^p} = \frac{\varphi_i(t^2)}{(1-t)^p},$$

$$\beta_i = \frac{a_i(1-t^2)[(1+t)^{p-2i} - (1-t)^{p-2i}]}{(1-t)^p} = \frac{t\psi_i(t^2)}{(1-t)^p},$$

то отношеніе $\frac{P}{Q}$ будетъ имѣть видъ

$$\frac{t\varphi(t^2)}{\psi(t^2)}.$$

Далѣе, также найдемъ

$$R(x) = \frac{\omega(t^2)}{(1-t)^4},$$

гдѣ $\omega(t^2)$ есть биквадратный трехчленъ; кромѣ того имѣемъ

$$dx = \frac{2dt}{(1-t)^2}.$$

Слѣдовательно, дифференціалъ (11) будетъ имѣть видъ

$$\frac{2t\varphi(t^2)\,dt}{\psi(t^2)\sqrt{\omega(t^2)}},$$

откуда мы заключаемъ, что дифференціалъ (11), а слѣдовательно, и (10) интегрируются въ конечномъ видѣ.

6. Примѣръ. Найдти интегралъ

$$S = \int\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,{}^{*}.$$

Полагая

$$x = \frac{1+t}{1-t},$$

получимъ

$$S = -2\sqrt{2}\int\frac{tdt}{(1+t^2)\sqrt{1+6t^2+t^4}},$$

откуда, черезъ замѣну t^2 на v, будемъ имѣть

$$S = -\sqrt{2}\int\frac{dv}{(1+v)\sqrt{1+6v+v^2}}.$$

Замѣчая, что при перемѣнѣ v на $-v$ подъинтегральный дифференціалъ переходитъ въ такой, который удовлетворяетъ тождеству (1), полагаемъ

$$v = \frac{u+1}{u-1},$$

тогда

* Institutionum Calculi Integralis volumen quartum. L. Euleri, p. 22.

гдѣ $\omega(u)$ есть биквадратный трехчленъ; кромѣ того имѣемъ

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{u\sqrt{2u^2-1}},$$

откуда, полагая

$$2u^2-1=y^2,$$

получимъ

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} y.$$

Опредѣляя y въ функціи x, найдемъ уравненіе

$$y=-\frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}},$$

которое употребляетъ Эйлеръ для нахожденія интеграла S.

И такъ,

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Совершенно такимъ же манеромъ найдемъ и другіе интегралы Эйлера:

$$\int\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},\ \int\frac{\sqrt{1+x^4}\,dx}{1-x^4},\ \int\frac{x^2}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}\ *$$

Замѣтимъ, что дифференціалъ (11) можетъ быть интегрированъ также при помощи подстановки

$$x=z+\frac{1}{z}\ **.$$

---

* Ibidem.

** *Буняковскій*, О частныхъ случаяхъ интегрируемости дифференціала $\frac{x+c_1}{x+c_2}\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$ въ конечномъ видѣ. (Записки академіи наукъ. Томъ III).

7. Дифференціалы вида

$$f(x, \sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Cx+D})\,dx \qquad (12)$$

интегрируются въ конечномъ видѣ.

Такъ какъ дифференціалъ (12) можно представить въ видѣ суммы трехъ:

$$\frac{M}{N}\,dx+\frac{Pdx}{Q\sqrt[3]{R}}+\frac{Sdx}{T\sqrt[3]{R^2}}, \qquad (13)$$

гдѣ M, N, P, Q, S и T цѣлые полиномы, и $R=Ax^3+$ $+Bx^2+Cx+D$, изъ которыхъ каждый будетъ удовлетворять тождеству (1), то мы заключаемъ (n^0 4) о второмъ дифференціалѣ, что

$$R=Ax^3+Bx^2+Bx+A,$$

$$P=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots\pm A_1x\pm A_0,$$

$$Q=a_0x^{p+1}+a_1x^p+\ldots\mp a_1x\mp a_0.$$

Случай, когда

$$R=Ax^3+Bx^2-Bx-A,$$

какъ мы замѣтили, приводится къ этому.

Относительно третьяго дифференціала замѣтимъ, что такъ какъ онъ удовлетворяетъ тождеству (1) и, кромѣ того,

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{(Ax^3+Bx^2+Bx+A)^2}}=$$

$$=-\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(A\left(\frac{1}{x}\right)^3+B\left(\frac{1}{x}\right)^2+B\left(\frac{1}{x}\right)+A\right)^2}}, \qquad (14)$$

то

$$\frac{S(x)}{T(x)} = -\frac{S\left(\frac{1}{x}\right)}{T\left(\frac{1}{x}\right)}. \qquad (15)$$

Для интегрированія дифференціала (12) полагаемъ,

$$x = \frac{1+t}{1-t},$$

тогда также, какъ и въ n° 5, найдемъ, что второй изъ (13) дифференціаловъ приметъ видъ или

$$\frac{\frac{\varphi(t^2)}{(1-t)^n}\,\frac{dt}{(1-t)^2}}{\frac{t\psi(t^2)}{(1-t)^{n+1}}\sqrt[3]{\frac{A+Bt^2}{(1-t)^3}}} = \frac{\varphi(t^2)\,dt}{t\psi(t^2)\sqrt[3]{A+Bt^2}}, \qquad (16)$$

или

$$\frac{\frac{t\varphi(t^2)}{(1-t)^n}\,\frac{dt}{(1-t)^2}}{\frac{\psi(t^2)}{(1-t)^{n+1}}\sqrt[3]{\frac{A+Bt^2}{(1-t)^3}}} = \frac{t\varphi(t^2)\,dt}{\psi(t^2)\sqrt[3]{A+Bt^2}}. \qquad (17)$$

На основаніи (15), т. е.

$$\frac{S\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{T\left(\frac{1+t}{1-t}\right)} = -\frac{S\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}{T\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}$$

заключаемъ, что отношеніе $\frac{S}{T}$ преобразуется въ нечетную функцію относительно t, т. е. въ функцію вида $t\omega(t^2)$; откуда слѣдуетъ, что третій изъ дифференціаловъ (13) переходитъ въ такой

$$\frac{t\varphi(t^2)\,dt}{\sqrt[3]{(A+Bt^2)^2}}. \qquad (18)$$

Изъ выраженій (16), (17) и (18) заключаемъ, что дифференціалъ (12) интегрируется въ конечномъ видѣ.

8. Примѣръ 1. Найдти интегралъ

$$S=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Bx+A}}.$$

Полагая

$$x=\frac{1+t}{1-t}$$

будемъ имѣть интегралъ

$$S=\int\frac{dt}{t\sqrt[3]{2(A+B)+(3A-B)t^2}},$$

который замѣною $2\,(A+B)+(3A-B)t^2$ на v^3 приводится къ интегралу отъ раціональной дроби.

Въ результатѣ получимъ

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Bx+A}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2(A+B)}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{4R}+(x+1)\sqrt[3]{A+B}}{\sqrt{3}(x+1)\sqrt[3]{A+B}}+$$

$$\frac{1}{4\sqrt[3]{2(A+B)}}\lg\frac{[\sqrt[3]{4R}-\sqrt[3]{A+B}(x+1)]^2}{2\sqrt[3]{2R^2}+(x+1)\sqrt[3]{4(A+B)R}+(x+1)^2\sqrt[3]{(A+B)^2}}, \qquad (19)$$

гдѣ $R=Ax^3+Bx^2+Bx+A$.

Измѣняя здѣсь x на $-x$ и A на $-A$, получимъ выраженіе интеграла

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2-Bx-A}}.$$

При $A = -B$, выраженіе (19) получаетъ неопредѣленный видъ, но тогда мы имѣемъ извѣстный интегралъ

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$$

9. Примѣръ 2. Найдти интегралъ

$$S = \int \frac{xdx}{(x^3-1)\sqrt[3]{1+x^3}}. \tag{20}$$

Подъинтегральный дифференціалъ приводимъ къ раціональному виду, полагая

$$x = \frac{1+t}{1-t} \text{ и } 1+3t^2 = 8v^3.$$

Положивъ въ (20)

$$x^3 = \frac{\alpha+y}{\beta+y},$$

будемъ имѣть интегралъ:

$$S = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt[3]{(\alpha+y)(\beta+y)(\alpha+\beta+2y)}},$$

откуда заключаемъ: если одинъ изъ корней полинома

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

есть средняя ариѳметическая двухъ остальныхъ, то интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Cx+D}} \qquad (21)$$

выражается въ логариѳмическихъ функціяхъ.

Напримѣръ, интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

выражается въ логариѳмахъ.

Замѣняя въ (20) x на $-x$, получимъ интегралъ

$$\int \frac{xdx}{(x^3+1)\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

Полагая здѣсь

$$x=\frac{\alpha+y}{\beta+y},$$

заключаемъ, что интегралъ

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt[3]{(x+\alpha)(x+\beta)}} \qquad (22)$$

выражается въ лагариѳмахъ.

Замѣтимъ, что интегралы (21) и (22) приводятся къ извѣстнымъ и посредствомъ подстановки

$$x+\frac{\alpha+\beta}{2}=y.$$

10. Дифференціалы вида

$$F\left(\sqrt[n]{\frac{ax^2+bx+a}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}},\ \sqrt[m]{\frac{ax^2+bx+a}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}},\ldots\right)f(x)\,dx\,, \qquad (23)$$

гдѣ n, m,.... раціональныя числа и F знакъ раціональной функціи, интегрируются въ конечномъ видѣ.

Полагая

$$x=\frac{1+t}{1-t},$$

замѣчаемъ, что функція F преобразуется въ такую:

$$F\left(\sqrt[n]{\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}},\sqrt[m]{\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}},\ldots\ldots\right).$$

Такъ какъ $f(x)$ удовлетворяетъ тождеству (1), то

$$f\left(\frac{1+t}{1-t}\right)d\,\frac{1+t}{1-t}=f\left(\frac{1-t}{1+t}\right)d\,\frac{1-t}{1+t},$$

т. е. $f(x)dx$ переходитъ въ $\varphi(t)dt$, который удовлетворяетъ тождеству

$$\varphi(t)dt=\varphi(-t)d(-t),$$

заключаемъ, что $\varphi(t)$ есть функція вида

$$t\psi(t^2).$$

Слѣдовательно, полагая далѣе

$$\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}=v^N,$$

гдѣ N есть наименьшее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$,...,

мы приведемъ дифференціалъ (23) къ виду

$$\omega(v)dv,$$

гдѣ $\omega(v)$ есть раціональная функція v.

11. Примѣръ. Найдти интегралъ

$$S=\int\frac{(x^2-1)\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}\,.\,dx}{(x^4-x^3+2x^2-x+1)\left(1+\sqrt[5]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}\right)}.$$

Полагая

$$x=\frac{1+t}{1-t},$$

получимъ

$$S=2\int\frac{t\sqrt[3]{\dfrac{1+3t^2}{2(1+t^2)}}\,.\,dt}{(1+4t^2+3t^4)\left(1+\sqrt[5]{\dfrac{1+3t^2}{2(1+t^2)}}\right)},$$

замѣняя $\dfrac{1+3t^2}{2(1+t^2)}$ чрезъ v^{15}, найдемъ

$$S=\frac{15}{2}\int\frac{v^4\,dv}{1+v^3},$$

слѣдовательно

$$S=\frac{15}{4}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{15}}+\frac{5}{2}\lg\left(1+\sqrt[15]{\frac{x^2-x+1}{1+x^2}}\right)-$$

$$-\frac{5}{4}\lg\left(1-\sqrt[15]{\frac{x^2-x+1}{1+x^2}}+\left(\frac{x^2-x+1}{1+x^2}\right)^{\frac{2}{15}}\right)-$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[15]{\dfrac{x^2-x+1}{1+x^2}}-1}{\sqrt{3}}.$$

12. Нетрудно убѣдиться также, какъ и въ n° 10, что дифференціалы

$$F\left(\sqrt[m]{A+\sqrt[n]{B+\sqrt[p]{C+\ldots+\sqrt[s]{\frac{ax^2+bx+a}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}}}}\right)f(x)dx, \quad (24)$$

$$F\left(\frac{\sqrt{ax^2+bx+a}}{1+x}, \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}{1+x}\right)f(x)\,dx, \quad (25)$$

гдѣ m, n, p, ... s раціональныя числа, а F знакъ раціональной функціи, интегрируются въ конечномъ видѣ.

13. Если коэффиціенты полинома

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

удовлетворяютъ равенству

$$2B^3-9ABC+27A^2D=0, \quad (26)$$

то интегралъ

$$S=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Cx+D}} \quad (27)$$

выражается чрезъ логариѳмическія функціи.

Введя въ (27) новую перемѣнную уравненіемъ

$$x=\frac{\lambda}{y-1},$$

гдѣ λ постоянная величина, получимъ

$$S=\int\frac{-\lambda dy}{(y-1)\sqrt[3]{A\lambda^3-B\lambda^2+C\lambda-D+y(B\lambda^2-2C\lambda+3D)+y^2(C\lambda-3D)+Dy^3}}.$$

Если λ удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}A\lambda^3-B\lambda^2+C\lambda-2D=0,\\ B\lambda^2-3C\lambda+6D=0,\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

то (n° 7) интегралъ (27) выражается въ конечномъ видѣ.

Изъ уравненій (28) весьма просто опредѣляется и, слѣдовательно, исключается λ. Въ самомъ дѣлѣ, умножая первое на три и складывая со вторымъ, находимъ

$$3A\lambda - 2B = 0;$$

подставляя полученное значеніе λ въ одно изъ уравненій (28), будемъ имѣть зависимость (26), что и требовалось показать. Мы видимъ, что для нахожденія интеграла (27), когда существуетъ равенство (26), слѣдуетъ положить:

$$x = \frac{2B}{3A(y-1)}. \tag{29}$$

Такимъ образомъ, интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3 + Bx^2 + \frac{2B^3 + 27A^2D}{9AB}x + D}} \tag{30}$$

при всякихъ значеніяхъ A, B и D выражается чрезъ логариѳмическія функціи.

14. Въ дифференціалѣ

$$\frac{x+\alpha}{x+\beta} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax^2 + Bx + C}} \tag{31}$$

постоянныя α и β всегда можно подобрать такъ, чтобы онъ интегрировался въ конечномъ видѣ.

Пусть

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + Dx + E)\ (x - \gamma)$$

и положимъ

$$x = \gamma + \delta y,$$

тогда дифференціалъ (31) будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\sqrt{\delta}(\alpha+\gamma+\delta y)\,dy}{(\gamma+\beta+\delta y)\sqrt{\delta^2 y^3+\delta(A+3\gamma)y^2+(3\gamma^2+2A\gamma+B)y}}. \quad (32)$$

Если постоянную δ опредѣлимъ изъ уравненія

$$\delta^2 = B + 2\gamma A + 3\gamma^2,$$

а за α и β возьмемъ величины

$$\alpha = \pm\delta - \gamma,$$

$$\beta = -(\gamma \pm \delta);$$

дифференціалъ (32), а слѣдовательно и (31) будетъ интегрироваться въ конечномъ видѣ (n^o 5).

15. Примѣръ. Дифференціалъ

$$\frac{x-4}{x+2}\,\frac{dx}{\sqrt{2x^3+5x^2+2x-9}}$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Полагая

$$x = 3y + 1,$$

представляемъ данный дифференціалъ въ видѣ

$$\frac{1}{3}\,\frac{y-1}{y+1}\,\frac{dy}{\sqrt{6y^3+11y^2+6y}}.$$

Этотъ же послѣдній интегрируемъ, полагая

$$y = \frac{1+t}{1-t}.$$

Въ результатѣ будемъ имѣть

$$\int\frac{x-4}{x+2}\,\frac{dx}{\sqrt{2x^3+5x^2+2x-9}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x^2+3x+5}{(x+2)^2}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ $(x=y+1)$, $\left(y=\frac{1+t}{1-t}\right)$ интегралъ

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{x\sqrt{x^3+3x^2-8x+4}}=\lg\frac{\sqrt{5x^2-8x+8}+\sqrt{x^3+3x^2-8x+4}}{x\sqrt{2}}.$$

16. Какъ и въ n° 14, легко показать, что въ дифференціалѣ

$$\frac{ax^2+bx+c}{\lambda x^2+\mu x+\nu}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3+Ax^2+Bx+C}} \tag{33}$$

можно всегда подобрать два изъ коэффиціентовъ a, b и c и одинъ изъ λ, μ и ν,—или два изъ λ, μ и ν и одинъ изъ a, b, c такъ, что предложенный дифференціалъ будетъ интегрироваться въ конечномъ видѣ. Этимъ путемъ мы можемъ идти сколько угодно далеко.

Примѣръ. Полагая въ интегралѣ

$$\int\frac{(x^2-4x-21)\,dx}{(x^2-4x+29)\sqrt{x^3+x^2+9x-30}}$$

$x=5y+2$, прійдемъ къ интегралу, который выражается въ логариѳмическихъ функціяхъ (по n° 5).

Мы будемъ имѣть

$$\int\frac{x^2-4x-21}{x^2-4x+29}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+9x-30}}=\frac{1}{\sqrt{y}}=\lg\frac{\sqrt{R}-(x-2)\sqrt{7}}{\sqrt{R}+(x-2)\sqrt{7}},$$

гдѣ $R=x^3+x^2+9x-30$.

17. Если между коэффиціентами полинома

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$$

существуетъ зависимость

$$\beta^3-4\alpha\beta\gamma+8\delta\alpha^2=0, \tag{34}$$

то въ дифференціалѣ

$$dS = \frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}} \qquad (35)$$

постоянное A всегда можно подобрать такъ, чтобы онъ интегрировался въ конечномъ видѣ.

Положивъ

$$x = \frac{\lambda}{y + 1},$$

получимъ

$$dS = \frac{-\lambda A\left(y + 1 + \frac{\lambda}{A}\right) dy}{(y + 1)\sqrt{\varepsilon y^4 + \beta_1 y^3 + \gamma_1 y^2 + \delta_1 y + \varepsilon_1}},$$

гдѣ

$$\beta_1 = \delta\lambda + 4\varepsilon$$

$$\gamma_1 = \gamma\lambda^2 + 3\delta\lambda + 6\varepsilon$$

$$\delta_1 = \beta\lambda^3 + 2\gamma\lambda^2 + 3\delta\lambda + 4\varepsilon$$

$$\varepsilon_1 = \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon,$$

Если λ удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} &\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0 \\ &\beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 2\delta = 0, \end{aligned} \qquad (36)$$

то, выбравъ A такъ

$$+1 + \frac{\lambda}{A} = -1,$$

т. е.

$$A = -\frac{\lambda}{2},$$

увидимъ, что дифференціалъ (35) будетъ интегрироваться въ конечномъ видѣ (n° 5).

Помножая первое изъ (36) на два и вычитая второе, получимъ

$$2\alpha\lambda + \beta = 0.$$

Подставляя это выраженіе λ въ одно изъ уравненій (36), найдемъ зависимость (34), что и требовалось показать.

Для интегрированія слѣдуетъ положить

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha(y+1)},$$

тогда

$$A = \frac{\beta}{4\alpha}.$$

17. **Примѣръ.** Найдти интегралъ

$$S = \int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}.$$

Полагая

$$x = \frac{-5}{y+1},$$

имѣемъ

$$S = 25\int \frac{(y-1)\,dy}{(y+1)\sqrt{(y-4)(2y-3)(3y-2)(4y-1)}},$$

замѣняя здѣсь y на $\dfrac{1+t}{1-t}$ и t^2 на v, получимъ

$$S = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{\left(v-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{3}{125}}}.$$

Слѣдовательно, находимъ

$$\int \frac{(2x-5)\,dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lg\left\{4(x^2+5x+5) + \sqrt{16(x^2+5x+5)^2 - 15}\right\}.$$

Точно такимъ же манеромъ можемъ найдти интегралъ

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{x^4-2x^3-6x^2+7x+C}}.$$

18. Въ четвертомъ томѣ «Institutionum Calculi Integralis» Эйлеръ даетъ нѣсколько дифференціаловъ (Problema 17 и слѣд.), содержащихъ корень степени n изъ трехчлена степени $2n$, интегрирующихся въ конечномъ видѣ. Эти дифференціалы можно разсматривать, какъ частные случаи дифференціала (23). Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ (23)

$$a=0,\ f(x)=\frac{x^{2i}}{(1-x^2)^{2i+i}},\ F=F\left(\sqrt[n]{\frac{6x}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}\right),$$

$$x=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\ y^n,$$

получимъ дифференціалъ

$$F\left(\frac{6y}{\sqrt[n]{\gamma y^{2n}+\beta y^n+\alpha}}\right)\frac{y^{(2i+1)n-1}\,dy}{(\alpha-\gamma y^{2n})^{2i+1}}, \qquad (37)$$

интегрирующійся въ конечномъ видѣ.

Если

$$F\left(\frac{6y}{\sqrt[n]{\gamma y^{2n}+\beta y^n+\alpha}}\right)=\left(\frac{\sqrt[n]{\alpha+\beta y^n+\gamma y^{2n}}}{y}\right)^{\lambda+1},$$

дифференціалъ (37) приметъ видъ

$$\frac{Y^{(2i+1)n-\lambda-2}\sqrt[n]{(\alpha+\beta y^n+\gamma y^{2n})^{\lambda+1}}}{(\alpha-\gamma y^{2n})^{2i+1}}\,dy$$

(См. I. C. I. vol. quartum, § 70).

Къ этому же виду приводится и дифференціалъ

$$\frac{dx}{\left(1-x^m\right)\sqrt[2m]{2x^m-1}}. \tag{38}$$

Полагая

$$2x^m - 1 = y^{2m},$$

найдемъ

$$2^{\frac{2m-1}{m}} m \left(\frac{y}{\sqrt[m]{1+y^{2m}}}\right)^{m-1} \frac{y^{m-1}}{1-y^{2m}}\, dy,$$

что, очевидно, есть тоже частный случай дифференціала (37).

19. Въ заключеніе замѣтимъ слѣдующее. Пусть намъ данъ дифференціалъ, удовлетворяющій тождеству

$$f(x)\, dx = f\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right) d\,\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}. \tag{39}$$

Если мы введемъ въ это тождество новую перемѣнную уравненіемъ

$$x = \frac{m+nt}{p+qt},$$

то постоянныя m, n, p и q во множествѣ случаевъ можно выбрать такъ, что тождество (39) перейдетъ въ такое

$$\varphi(t)\, dt = \varphi\left(\frac{1}{t}\right) d\,\frac{1}{t},$$

откуда заключаемъ, что каждая возможная и самостоятельная (а онѣ существуютъ) комбинація постоянныхъ α, β, γ и δ дастъ также много частныхъ случаевъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціаловъ, вообще не интегрирующихся, какъ много даетъ разобранная здѣсь комбинація $\beta=\gamma=0$, $\alpha=\delta$.

Спб.

7 Января 1885 г.