

ОБЪ ОДНОМЪ ЧАСТНОМЪ ЗАКОНѢ

ПОГЛОЩЕНІЯ СВѢТА.

А. П. Грузинцева.

Когда свѣтъ проходитъ черезъ средину, поглощающую лучи той или другой преломляемости, то между свойствами средины и родомъ поглощаемыхъ лучей должна существовать нѣкоторая опредѣленная зависимость. Это очевидно à priori. Средину можетъ характеризоваться различными качествами, равно какъ и свѣтовой лучъ, проходящій черезъ нее. Въ настоящей замѣткѣ мы имѣемъ намѣреніе обратить вниманіе на одинъ частный законъ, относящійся къ поглощенію свѣта срединой, съ опредѣленною поглощательною способностью. Пусть дана средину, поглощающая лучи опредѣленной преломляемости, соответствующей длинѣ волны, которую мы обозначимъ буквой

$$\lambda_m.$$

Если назовемъ массу единицы объема, т. е. плотность поглощающей средину, буквой

$$m,$$

то законъ, о которомъ говоримъ, выразится въ слѣдующей формѣ:

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m,$$

причемъ

α и β

суть нѣкоторые постоянные коэффициенты, характеризующіе средіну. Законъ этотъ теоретически вытекаетъ изъ тѣхъ общихъ взглядовъ на свѣторазсѣяніе (дисперсію), которые принимаются нынѣ физиками, и можетъ быть полученъ изъ формулъ, которыя развиты въ моей теоріи дисперсіи, данной въ 1882 году въ «Сообщеніяхъ» харьк. матем. общества. Для вывода этого закона я предварительно приведу нужныя для того формулы и, пользуясь случаемъ, дамъ имъ нѣсколько большее развитіе, чѣмъ это сдѣлано въ упомянутой моей статьѣ.

Основные уравненія движенія въ поглощающей срединѣ, приведенныя въ моей статьѣ «О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ»¹, и дадутъ, по подстановкѣ значеній входящихъ въ нихъ составляющихъ колебанія эфирной и матеріальной частицы, основные уравненія настоящей замѣтки.

Положимъ:

$$H_1 = S h_x^2 A^2, \quad h_x^2 = \frac{n_x}{2\pi c_0 \mu}, \quad \alpha_x = m_x \sqrt{\frac{m}{\mu}}, \quad a_1 = S \alpha_x^2 A^2,$$

$$g_x = \frac{1}{2\pi c_0} \sqrt{\frac{\delta_x}{\mu}}, \quad G_1 = S g_x^2 A^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S \frac{F_1 A^2 v^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu} &= S \frac{A^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu} \left\{ \beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} N^2 + \beta_x^{(2)} N^4 + \dots \right\} = \\ &= S A^2 \left\{ \frac{\beta_x^{(0)}}{4\pi^2 c_0^2 \mu} - \frac{\beta_x^{(1)} v^2}{c_0^2 \mu \lambda^2} + \frac{4\pi^2 \beta_x^{(2)} v^4}{c_0^2 \mu \lambda^4} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

¹ «Сообщенія» харьк. матем. общества за 1882 г. кн. 1, стр. 77, уравненія 2, или стр. 73 отдельно изданной брошюры подъ тѣмъ-же заглавіемъ.

Значенія входящихъ здѣсь количествъ объяснены въ упомянутой статьѣ.

Если далѣе положимъ:

$$b_1 = S \frac{\beta_x^{(0)} A^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu}, \quad c_1 = - S \frac{\beta_x^{(1)} A^2}{c_0^2 \mu}, \dots,$$

то

$$S \frac{F_1 A^2 v^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu} = \left(b_1 + \frac{c_1}{\lambda^2} N^2 + \frac{c_2}{\lambda^4} N^4 + \dots \right) v^2$$

или еще

$$S \frac{F_1 A^2 v^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu} = \left\{ b_1 + \frac{b^{(1)}}{\lambda^2} N^2 + \frac{b^{(2)}}{\lambda^4} N^4 + \dots \right\} v^2, \quad (1)$$

гдѣ

$$b^{(i)} = \frac{(2\pi)^{2i-2} (-1)^i}{c_0^2 \mu} S \beta_x^{(i)} A^2.$$

Если подставимъ въ формулу (1) значеніе N , т. е.

$$N = \frac{K + \frac{q}{c} \sqrt{-1}}{4},$$

причемъ K пропорціонально коэффициенту поглощенія среды, какъ это объяснено въ упомянутой статьѣ, равно какъ тамъ же объяснено значеніе q и c^* , тогда получимъ:

$$S \frac{F_1 A^2 v^4}{4\pi^2 c_0^2 \mu} = \left\{ b_1 + \sum_{i=1}^{\infty} c^{(i)} \frac{v^{2i}}{\lambda^{2i}} \right\} v^2 \quad (2)$$

причемъ положено

$$c^{(i)} = \frac{(2\pi)^{4i-2}}{(c_0 \sqrt{\mu})^2} S \beta_x^{(i)} A^2. \quad (a)$$

* Въ упоминаемой статьѣ $\sqrt{-1}$ обозначенъ извѣстнымъ символомъ: i .

Подставляя значеніе количествъ, входящихъ въ другіе члены упомянутыхъ уравненій, найдемъ:

$$a_1 = S \alpha_x^2 A^2 = S \frac{m}{\mu} A^2 m_x^2,$$

но

$$m_x = \gamma_x + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_x^{(i)} N^{2i}$$

и такъ какъ

$$(1) \quad N^{2i} = (2\pi)^{2i} (-1)^i \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{2i},$$

т. е.

$$a_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{(i)}}{\lambda^{2i}} v^{2i},$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{m}{\mu} d_0, \quad a^{(i)} = \frac{m}{\mu} d^{(i)}. \quad (b)$$

Замѣтимъ, что коэффициенты $d^{(i)}$ зависятъ отъ взаимодействія между эфирными и матеріальными частицами.

Теперь всѣ члены упомянутыхъ уравненій вычислены и мы получимъ:

$$1 - a_0 - v^2 \frac{a^{(1)}}{\lambda^2} - v^4 \frac{a^{(2)}}{\lambda^4} - \dots = -v^2 + \lambda^2 G_1 + \lambda H_1 \sqrt{1 - \dots}$$

$$(3) \quad - b_1 v^2 - c^{(1)} \frac{v^4}{\lambda^4} - c^{(2)} \frac{v^6}{\lambda^6} - \dots$$

или:

$$v^2(1 + b_1) - 1 = a_0 + G_1 \lambda^2 + a^{(1)} \frac{v^2}{\lambda^2} + \left(a^{(2)} - c^{(1)} \right) \frac{v^4}{\lambda^4} +$$

$$+ \left(a^{(3)} - c^{(2)} \right) \frac{v^6}{\lambda^6} + \dots + H_1 \lambda \sqrt{-1} =$$

$$= a_0 + G_1 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a^{(i)} - c^{(i-1)} \right) \frac{v^{2i}}{\lambda^{2i}} + H_1 \lambda \sqrt{-1} \quad (3)$$

при условии

$$c^{(0)} = 0.$$

Уравнения (а) и (b) показывают, что коэффициенты $a^{(i)}$ пропорциональны плотности поглощающей среды и зависят от колебаний материальных частиц, а коэффициенты $c^{(i)}$ — от изменения упругости эфира под влиянием материальных частиц; количество G_1 — от сопротивления материальных частиц и H_1 — от трения; a_0 зависит от того-же, от чего зависят $a^{(i)}$; b_1 — от того, от чего $b^{(i)}$.

Положим теперь

$$f^{(i)} = a^{(i)} - c^{(i-1)} \quad (c)$$

тогда

$$v^2(1 + b_1) - 1 = a_0 + G_1 \lambda^2 + H_1 \lambda \sqrt{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)} \frac{v^{2i}}{\lambda^{2i}}.$$

Пусть

$$\frac{a_0}{1 + b_1} = a - \varepsilon, \quad \frac{G_1}{1 + b_1} = G, \quad \frac{H_1}{1 + b_1} = H, \quad \frac{f^{(i)}}{1 + b_1} = D_i$$

и

$$\frac{1}{1 + b_1} = 1 + \varepsilon$$

или, другими словами, возьмемъ вмѣсто b_1 и a_0 новыя количества ε и a , такъ что будетъ:

$$b_1 = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad a_0 = \frac{a-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

тогда:

$$v^2 - 1 = a + G\lambda^2 + H\lambda\sqrt{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \frac{v^{2i}}{\lambda^{2i}} \dots \quad (A)$$

Это есть формула (3) стр. 73 цитированной выше статьи (стр. 77 «Сообщений» X. М. О. 1882, I).

Займемся теперь дальнѣйшими преобразованіями формулы (A).

Мы знаемъ, что

$$v = n + p\sqrt{-1},$$

гдѣ n показатель преломленія среды, а p коэффициентъ поглощенія; слѣдовательно

$$v^{2i} = \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1},$$

гдѣ

$$a_{2h,i} = \frac{2i(2i-1)\dots(2i-2h+1)}{1.2.3.\dots.2h}$$

и

$$a_{0,i} = 1, \quad a_{2i,i} = 1;$$

также

$$a_{2h+1,i} = \frac{2i(2i-1)\dots(2i-2h)}{1.2.3.\dots.(2h+1)}$$

(aid I) $\frac{a_{1,i}}{\lambda^i} = 2i, \quad a_{2i+1,i} = 0.$

При помощи этихъ выраженій формула (A) превращается въ слѣдующую:

(aid II)
$$n^2 - p^2 - 1 + 2np\sqrt{-1} = a + G\lambda^2 + H\lambda\sqrt{-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \left(a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{-1} a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \right) = a + G\lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1} \left\{ H\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \right\}.$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, найдемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} \quad (I)$$

$$2np = H\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \quad (II)$$

(A)
или

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i R_i}{\lambda^{2i}} \quad (\text{I bis})$$

$$2np = H\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i S_i}{\lambda^{2i}} ; \quad (\text{II bis})$$

если ради краткости письма положимъ:

$$R_i = \sum_{n=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h}, i n^{2i-2h} p^{2h}$$

$$S_i = \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1}, i n^{2i-2h-1} p^{2h+1} .$$

Выдѣлимъ теперь въ формулѣ (I bis) коэффициенты при различныхъ степеняхъ n .

Подставляя въ формулу (I bis) значенія R_1, R_2, \dots, R_i и отбирая члены съ одинаковыми степенями отношенія $p:n = x$ и полагая:

$$X_i = 1 - a_{2,i} x^2 + a_{4,i} x^4 - a_{6,i} x^6 + \dots + (-1)^i x^{2i},$$

гдѣ слѣдовательно

$$a_{2k,i} = \frac{2i(2i-1)(2i-2)\dots(2i-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k},$$

получимъ:

$$\begin{aligned} n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{D_1 X_1 n^2}{\lambda^2} + \\ + \frac{D_2 X_2 n^4}{\lambda^4} + \dots + \frac{D_k X_k n^{2k}}{\lambda^{2k}} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Если бы поглощенія не было (т. е. $p = 0$), то все X_k были бы равны 1-цѣ, т. е. имѣли бы для всякаго k (цѣлаго и положительнаго) тождество

$$X_k = 1.$$

Если поглощеніе мало (т. е. p очень мало), то все X_k будутъ очень близки къ 1-цѣ, тогда вмѣсто формулы (A) имѣемъ приближенную формулу:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{D_1 n^2}{\lambda^2} + \frac{D_2 n^4}{\lambda^4} + \dots \quad (\text{A bis})$$

Если допустимъ гипотезу (подтвержденную опытомъ à posteriori)

$$D_k X_k = F^k,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k X_k n^{2k}}{\lambda^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{F n^2}{\lambda^2} \right)^k = \frac{F n^2}{\lambda^2 - F n^2},$$

такъ какъ

$$\frac{F n^2}{\lambda^2} < 1.$$

И такъ имѣемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = \frac{F n^2}{\lambda^2 - F n^2} + a + G\lambda^2,$$

или

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{F}{\frac{\lambda^2}{n^2} - F}. \quad (\text{A ter})$$

Эта формула представляетъ одинъ изъ частныхъ видовъ общей формулы свѣторазсѣянія. Она уже повѣрилась опытомъ.

Преобразуемъ подобнымъ же образомъ и формулу (II bis):

Поступая совершенно такъ-же, какъ и выше, и полагая

$$a_{2k-1,i} = \frac{2i(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2k-1)}$$

и

$$Y_i = a_{1,i}x - a_{3,i}x^3 + a_{5,i}x^5 - \dots + (-1)^{i+1} a_{2i-1,i}x^{2i-1},$$

тогда

$$2np = H\lambda + \frac{D_1 Y_1 n^2}{\lambda^2} + \frac{D_2 Y_2 n^4}{\lambda^4} + \frac{D_3 Y_3 n^6}{\lambda^6} + \dots \quad (B)$$

Если допустимъ, какъ гипотезу,

$$D_k Y_k = F^k x,$$

причемъ это F отлично отъ предыдущаго; то

$$2np = H\lambda + x \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Fn^2}{\lambda^2} \right)^k;$$

но

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Fn^2}{\lambda^2} \right)^k \approx \frac{Fn^2}{\lambda^2 - Fn^2},$$

слѣдовательно

$$2np = H\lambda + \frac{Fn^2}{\lambda^2 - Fn^2}, \quad (B \text{ bis})$$

если вмѣсто x внесемъ его значеніе $p:n$.

Если возьмемъ, какъ 1-е приближеніе,

$$2np = H\lambda,$$

тогда, какъ 2-е приближеніе,

$$2nr = H\lambda + \frac{FH\lambda}{2(\lambda^2 - Fn^2)}$$

или

$$(b) \quad 2nr = \lambda \left(H + \frac{m\lambda E}{\lambda^2 - Fn^2} \right),$$

гдѣ

$$E = \frac{FH}{2}.$$

Членъ Fn^2 измѣняется мало и его вліяніе незначительно, поэтому можно принять его за постоянное и означить C , тогда

$$2nr = \lambda \left(H + \frac{E}{\lambda^2 - C} \right). \quad (B \text{ ter})$$

Эту формулу можно разсматривать какъ 2-е приближеніе.

Теперь легко перейти къ закону поглощенія, о которомъ упомянуто въ началѣ статьи.

Формула (B ter) показываетъ, что поглощеніе тѣмъ больше, чѣмъ ближе λ^2 къ количеству C , такъ что максимумъ поглощенія получимъ, если λ^2 равно C ; означимъ это значеніе λ буквой λ_m , тогда

$$\lambda_m^2 = C.$$

Таково условіе для простой поглощающей среды, т. е. для среды съ одною полосой поглощенія; если такихъ полосъ нѣсколько, то приведенное уравненіе имѣетъ мѣсто для каждой полосы отдѣльно. Опредѣляя значеніе коэффиціента C , т. е. помня, что онъ пропорціоналенъ коэффиціенту D или D_k , найдемъ, что

$$C = \alpha + \beta m_m \lambda$$

гдѣ α и β будутъ коэффициенты, независящіе отъ m , т. е. отъ плотности поглощающей среды.

И такъ имѣемъ:

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m. \quad (d)$$

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ подтверждается этотъ законъ наблюденіями.

Для такой повѣрки мы возьмемъ наблюденія Кеттелера, Пульфриха и Гессе.

Представимъ себѣ, что поглощающее вещество (твердое) растворено въ непоглощающемъ (жидкомъ), на примѣръ ціанинъ въ спиртѣ, пусть степень концентраціи такого раствора будетъ k ; тогда можно принять, что m пропорціонально k и выраженіе (d) будетъ имѣть видъ:

$$\lambda_m^2 = A + Bk,$$

гдѣ A и B постоянные коэффициенты (весьма приближенно).

I. Примѣнимъ сказанное къ наблюденіямъ Кеттелера (Wied. Annalen. Bd. XII, 1881. S. 481).

Кеттелеръ опредѣлялъ λ_m для растворовъ ціанина въ спиртѣ, концентраціи коихъ были слѣдующія:

$$k = \frac{5}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36},$$

причемъ k выражены въ произвольныхъ единицахъ; значенія λ_m были (въ тысячныхъ доляхъ миллиметра) 0,58010; 0,58616; 0,58992; 0,59193; 0,59320; 0,59401.

Подставляя эти значенія k и λ_m въ формулу

$$\lambda_m^2 = A + Bk,$$

мы вычислимъ A и B по способу наименьшихъ квадратовъ и найдемъ:

$$A = 0,3534; B = -0,0098.$$

Если бы теперь мы вычислили обратно по A и B величины λ_m^2 и сравнили бы съ наблюдёніями, то получили бы слѣдующее:

вычисленные λ_m^2	0,3369	0,3436	0,3469	0,3501	0,3526	0,3531
наблюденные	0,3365	0,3436	0,3480	0,3504	0,3519	0,3528
разности	+4	0	-11	-3	-7	-3

при этомъ средняя ошибка наблюденія есть $\pm 0,0007$.

II. Примѣнимъ теперь найденный законъ къ наблюдёніямъ Пульфриха надъ ціаниномъ же (Wied. An. Bd. XIV, 1881. S. 177). Вычисляя подобнымъ же образомъ, нашли бы:

$$A = 0,3317, B = -0,0186.$$

Разницу отъ выше-найденныхъ должно объяснить различіемъ въ температурахъ растворовъ, равно какъ и различіемъ взятаго ціанина въ обоихъ случаяхъ.

III. Воспользуемся теперь наблюдёніями Гессе¹ (Wied. Ann. Bd. XI, S. 871. 1880).

а) Возьмемъ наблюденія надъ растворомъ анилина въ водѣ. Значеніе k здѣсь были:

$$1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2.$$

Опредѣляя B по формулѣ:

$$B = \frac{\lambda_m'^2 - \lambda_m^2}{k' - k},$$

гдѣ $\lambda_m, k; \lambda_m', k'$ суть длина волны и степень концентраціи для двухъ наблюденій, найдемъ въ среднемъ:

$$B = -0,0056.$$

¹ Замѣтимъ, что Гессе эмпирически получилъ законъ, подобный нашему.

Теперь для проверки закона предѣлимъ A по формулѣ

$$A = \lambda_m^2 - Bk;$$

найдемъ:

$$A = 0,3177$$

и сравнимъ ее съ полученной отъ предѣловъ

0,3330	0,3300	0,3270	0,3240	0,3210	0,3180	0,3150	0,3120
79	78	77	76	75	74	73	72

$$\text{среднее } A = 0,3178.$$

b) Растворъ анилина въ спиртѣ даетъ

$$B = -0,0114,$$

и для A получаемъ значеніе

$$A = 0,3371$$

0,3370	0,3360	0,3350	0,3340	0,3330	0,3320	0,3310	0,3300
63	72	76	77	78	79	80	81

$$\text{среднее } A = 0,3371.$$

c) Цианинъ въ спиртѣ. Находимъ совершенно такъ-же какъ и выше, комбинируя по два наблюденія:

$$B = -0,0131.$$

По B находимъ:

$$A = 0,3601$$

0,3600	0,3590	0,3580	0,3570	0,3560	0,3550	0,3540	0,3530
01	00	14 (?)	01	00	00	00	00

$$\text{среднее } A = 0,3603.$$

Это значеніе A вообще незначительно отличается отъ A , найденнаго изъ наблюдений Кеттелера и даже Пульфриха; причины разницы тѣ же.

d) Фуксинъ въ спиртѣ. Находимъ

$$B = -0,0120$$

и для A находимъ:

$$A = 0,3589$$

572

609

593

589

среднее $A = 0,3590.$

e) Еще ціанинъ въ спиртѣ. Онъ даетъ:

$$B = -0,0061$$

и

$$A = 0,3380$$

78

76

80

среднее $A = 0,3379.$

Всѣ эти наблюденія показываютъ достаточное согласіе (ибо наблюденія λ_m весьма трудны), и поэтому мы можемъ принять законъ

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m$$

за достаточно точный законъ.