Communications et procès-verbaux de la société mathématique de Kharkow. Année 1885, 2-e livraison (XIV[e] du commancement de l'édition).

СООБЩЕНІЯ

и

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

при

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1885 года.

II.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1886.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *И. Щелковъ.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія:

TABLE DES MATIÈRES.

Extraits des procès-verbaux:

Communications:

ПРОТОКОЛЪ

ГОДИЧНАГО СОБРАНІЯ ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

22-го сентября 1885 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, И. К. Шейдтъ, Г. В. Левицкій, А. М. Ляпуновъ, М. Ѳ. Ковальскій, М. А. Тихомандрицкій, В. Л. Кирпичевъ, Г. В. Латышевъ и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. секретаремъ прочитанъ отчетъ о состояніи и дѣятельности общества въ прошедшемъ $188^4/_5$ академическомъ году.

2. Предсѣдатель доложилъ о выходѣ перваго выпуска за 1885 годъ «Сообщеній и протоколовъ засѣданій харьковскаго математическаго общества» (13-я книжка съ начала изданія).

3. Имъ-же доложено о полученіи отъ *П. С. Флорова* статьи подъ заглавіемъ: «Объ уравненіи $\frac{d^nu}{dx^n} = x^m u$», и отъ *А. А. Маркова* статьи подъ заглавіемъ: «О распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій».

4. Доложено о присылкѣ журнала: «Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1884—85». Постановили — послать математическому кружку въ Палермо полный экземпляръ «Сообщеній харьковскаго математическаго общества» и предложить постоянный обмѣнъ изданій.

5. Доложено, что редакція журнала «American journal of Mathematics», издающагося въ Бальтиморѣ, прислала одинъ изъ своихъ нумеровъ съ предложеніемъ обмѣна на «Сообщенія» общества. Постановили—послать полный экземпляръ «Сообщеній» и извѣстить редакцію американскаго математическаго журнала о согласіи на его предложеніе.

6. Обсуждался вопросъ о болѣе удобномъ помѣщеніи библіотеки общества.

7. *К. А. Андреевъ* указалъ на нѣкоторыя неудобства устава общества и на необходимость пересмотрѣть и дополнить его. Постановили поручить распорядительному комитету разсмотрѣть уставъ и представить къ одному изъ слѣдующихъ засѣданій новую редакцію его.

8. Произведены выборы въ члены распорядительнаго комитета общества. Избраны:

a) Предсѣдателемъ — профессоръ *Константинъ Алексѣевичъ Андреевъ*.

b) Товарищами предсѣдателя — профессоры *Матвѣй Александровичъ Тихомандрицкій* и *Григорій Васильевичъ Левицкій*.

c) Секретаремъ — преподаватель 1-й харьковской гимназіи *Алексѣй Петровичъ Грузинцевъ*.

9. По предложенію г. секретаря предложена была членамъ общества добровольная подписка на покрытіе текущихъ расходовъ.

10. Принято предложенiе г. секретаря послать въ русское физико-химическое общество въ С.-Петербургѣ послѣднiй выпускъ «Сообщенiй» и предложить обмѣнъ изданiй.

11. Доложено о полученiи обществомъ послѣ предыдущаго засѣданiя слѣдующихъ изданiй и брошюръ:

1) Кiевскiя университетскiя извѣстiя, за 1885 годъ, №№ 2, 3, 5 и 6.

2) Записки новороссiйскаго общества естествоиспытателей. Т. IX, вып. 1 и 2, и Т. X, вып. 1, 1885 г.

3) Записки физико-математическаго общества студентовъ с.-петербургскаго университета. Т. 1, 1884 — 1885 (листы 9 и 10, титулъ и оглавленiе).

4) Журналъ элементарной математики. Т. 1, вып. 18, и Т. II, вып. 1 и 2, 1885 г.

5) Bulletin de la société des naturalistes de Moscou. Année 1884, №№ 3 и 4.

6) Bulletin de la société mathématique de France. T. XIII, №№ 2, 3, 4, 5, 6.

7) Mathesis. T. V, 1885, mars, avril, mai, juin et août.

8) Journal de mathématiques élémentaires. T. IX, 1885, №№ 3, 4, 5, 6 и 8.

9) Journal de mathématiques spéciales. T. IX, 1885, №№ 3, 4, 5, 6 и 8.

10) Физико-математическiя науки (журналъ, издаваемый В. В. Бобынинымъ). Т. I, 1885 г. № 3.

11) Journal de sciencias mathematicas e astronomicas. T. I, 1878; T. II, 1880; T. IV, 1883; T. V, 1884, и T. VI, №№ 1 и 2, 1885.

12) Rendiconti del circolo matematico di Palermo (Marzo 1884 — Marzo 1885).

13) *Th. Bredichin* «Revision des valeurs numériques de la force répulsive», 1885, Moscou.

14) *Teixeira (G. F.)* «Integraçao das equaçoes as derivadas parciaes de segunda ordem». Coïmbra, 1875.

15) *Его-же* «Generalisaçao da serie de Lagrange». Coïmbra, 1879.

16) Математическій сборникъ, Т. XII, вып. 1-й, Москва. 1885.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

о дѣятельности математическаго общества, состоящаго при Харьковскомъ университетѣ,

за 1884—1885 академическій годъ.

Представляя въ годичномъ собраніи общества, бывшемъ 22 сентября 1885 года, отчетъ о его дѣятельности, г. секретарь сдѣлалъ предварительно общія указанія на значеніе харьковскаго математическаго общества какъ въ виду его собственныхъ цѣлей, такъ и въ смыслѣ удовлетворенія и поднятія научныхъ интересовъ вообще.

Возникшія у насъ въ сравнительно недавнее время не только въ столицахъ, но и въ другихъ университетскихъ городахъ, общества съ чисто научными цѣлями, и въ частности математическія, ясно свидѣтельствуютъ, по его словамъ, о потребности не только пріобрѣтенія, но и обмѣна научныхъ теоретическихъ знаній, потребности, являющейся признакомъ высокаго культурнаго состоянія той среды, гдѣ она проявляется. Ученыя общества Харькова, среди которыхъ математическое существуетъ уже шесть лѣтъ, придаютъ этому городу значеніе умственнаго центра для цѣлаго края, центра, гдѣ находятъ удовлетвореніе и поощреніе какъ потребность знанія, такъ и стремленіе къ самостоятельному научному труду.

Фактическая сторона дѣятельности и состоянія математическаго общества за послѣдній годъ изображается въ слѣдующихъ общихъ чертахъ.

Характеръ занятій былъ главнымъ образомъ тотъ же, какъ и въ предыдущіе годы. Господа члены собирались въ засѣданія въ заранѣе назначенные сроки. Въ теченіи года такихъ очередныхъ засѣданій было 8; въ нихъ было выслушано 14 сообщеній, относящихся по преимуществу къ высшей математикѣ и физикѣ. Кромѣ сообщеній самихъ членовъ общества было доложено нѣсколько изслѣдованій, присланныхъ, какъ и въ предыдущемъ году, петербургскими учеными (профессорами К. А. Поссе, А. А. Марковымъ и г-ми Тороповымъ и Пташицкимъ). Число членовъ увеличилось тремя, избранными въ засѣданіи 19 октября 1881 года. Въ этомъ же году общество лишилось одного изъ своихъ членовъ, маститаго педагога Василія Яковлевича Стоянова, умершаго 23 октября. Въ настоящее время число членовъ общества 33.

Въ этомъ году общество получило предложенія вступить въ обмѣнъ изданій отъ 1) профессора *G. Teixeira* въ Coïmbra, редактирующаго журналъ — « Journal de sciencias mathematicas e astronomicas », и 2) редакціи журнала: « American journal of mathematics », издающагося въ Бальтиморѣ. Предложенія эти приняты, и въ настоящее время число учрежденій и редакцій, съ которыми общество обмѣнивается изданіями, достигло 26-ти. Изданіе « Сообщеній » общества продолжалось на прежнемъ основаніи; издано въ теченіи года двѣ (11 и 12) книжки « Сообщеній ». Библіотека общества продолжала увеличиваться какъ отъ приношеній авторовъ и обмѣна, такъ и выпискою на средства общества нѣкоторыхъ математическихъ журналовъ.

Текущіе расходы общества покрывались, по обычаю, добровольною складчиною членовъ; на изданіе же « Сообщеній » обществу была ассигнована субсидія отъ харьковскаго университета.

О РАСПРЕДѢЛЕНІИ КОРНЕЙ

НѢКОТОРЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

А. А. Маркова.

Уравненія, о которыхъ идетъ рѣчь въ настоящей замѣткѣ, получаются при разложеніи въ непрерывную дробь слѣдующей функціи

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy - \xi \int_c^\partial \frac{f(y)}{z-y}\,dy. \qquad (1)$$

При этомъ мы предполагаемъ числа a, b, c, ∂ вещественными, а разности $b-a$, $c-b$, $\partial-c$, перемѣнный параметръ ξ и функціи $g(y)$, $f(y)$ положительными (по крайней мѣрѣ для разсматриваемыхъ нами значеній y).

Положимъ вообще

$$\int_a^b y^i g(y)\,dy = \alpha_i, \quad \int_c^\partial y^i f(y)\,dy = \beta_i. \qquad (2)$$

Тогда для опредѣленія знаменателя

$$\varphi_n(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n \qquad (3)$$

n-ой дроби $\dfrac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, подходящей къ $F(z)$, будемъ имѣть систему

уравненій первой степени.

$$
\begin{aligned}
&p_0(\alpha_0 - \xi\beta_0) + p_1(\alpha_1 - \xi\beta_1) + \ldots + p_n(\alpha_n - \xi\beta_n) = 0\\
&p_0(\alpha_1 - \xi\beta_1) + p_1(\alpha_2 - \xi\beta_2) + \ldots + p_n(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_0(\alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}) + p_1(\alpha_n - \xi\beta_n) + \ldots + p_n(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) = 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

которая, вообще говоря, опредѣляетъ отношенія

$$\frac{p_0}{p_n}, \frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

А именно, эти отношенія выражаются дробями съ однимъ и тѣмъ же знаменателемъ, равнымъ цѣлой функціи n-ой степени относительно ξ

$$\Phi_n(\xi) = \begin{vmatrix} \alpha_0 - \xi\beta_0, & \alpha_1 - \xi\beta_1, \ldots, & \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1} \\ \alpha_1 - \xi\beta_1, & \alpha_2 - \xi\beta_2, \ldots, & \alpha_n - \xi\beta_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}, & \alpha_n - \xi\beta_n, \ldots, & \alpha_{2n-2} - \xi\beta_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Исключеніе представляютъ только тѣ случаи, когда

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

Въ этихъ исключительныхъ случаяхъ можно положить $p_n = 0$ и понизить такимъ образомъ степень цѣлой функціи $\varphi_n(z)$ на единицу.

Для нашей цѣли важно замѣтить, что при

$$\Phi_n(\xi) \text{ не} = 0$$

всѣ корни уравненія n-ой степени

$$\varphi_n(z) = 0$$

числа конечныя и потому, при безпредѣльномъ возрастаніи одного изъ корней послѣдняго уравненія, ξ приближается къ одному изъ корней уравненія

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

Вопросъ, которому посвящена эта замѣтка, состоитъ въ опредѣленіи числа корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0,$$

лежащихъ соотвѣтственно въ промежуткахъ отъ $-\infty$ до a, отъ a до b, отъ b до c, отъ c до d, отъ d до $+\infty$.

Рѣшеніе этого вопроса заключается въ нижеслѣдующихъ теоремахъ.

Теорема 1.

Всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

вещественны и различны. Изъ нихъ $n-1$ навѣрно лежатъ въ предѣлахъ

отъ a до b и отъ c до d;

въ предѣлахъ же

отъ b до c

ни одного.

Доказательство.

Допустимъ сначала, что

$$\varphi_n(\mathrm{E})=0 \text{ при } b\leqq\varepsilon\leqq c.$$

Тогда произведеніе

$$\varphi_n(z)\,\frac{\varphi_n(z)}{z-\varepsilon}=\varphi_n(z)\theta(z)$$

число отрицательное при $z<b$ и положительное при $z>c$, и потому

$$\int_a^b g(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy-\xi\int_c^d f(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy \qquad \text{(A)}$$

не нуль.

Между тѣмъ, согласно уравненіямъ (4), выраженіе (A) должно быть равно нулю.

Мы пришли, такимъ образомъ, къ противорѣчію, которое ясно указываетъ, что между b и c нѣтъ ни одного корня уравненія $\varphi_n(z)=0$.

Положимъ теперь, что между a и ∂ функція $\varphi_n(z)$ мѣняетъ свой знакъ ровно m разъ при

$$z=x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

и составимъ функцію

$$\theta(z)=(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_m)(z-\varepsilon),$$

гдѣ ε произвольное число, лежащее между b и c.

Тогда

$$\int_a^b g(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy-\xi\int_c^d f(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy \qquad \text{(B)}$$

не нуль.

Между тѣмъ, согласно уравненіямъ (4), выраженіе (B) должно приводиться къ нулю, если только степень функціи $\theta(z)$ меньше n.

Поэтому

$$m+1 \geqq n \text{ и } m > n-1.$$

Такимъ образомъ теорема наша доказана вполнѣ.

Примѣчаніе 1.

При $\xi = 0$ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между a и b, такъ какъ тогда функція $F(z)$ обращается въ

$$\int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy.$$

Напротивъ, при $\xi = \infty$ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между c и d, такъ какъ тогда функція $\dfrac{-F(z)}{\xi}$ обращается въ

$$\int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy\,^{*}.$$

Примѣчаніе 2.

При непрерывномъ измѣненіи ξ число корней уравненія $\varphi_n(z) = 0$, лежащихъ въ какомъ нибудь промежуткѣ, остается неизмѣннымъ

---

* См., напр., мое разсужденіе «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ непрерывныхъ дробей» стр. 22.

до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не достигнетъ одного изъ предѣловъ разсматриваемаго промежутка.

Примѣчаніе 3.

При непрерывномъ измѣненіи ξ число корней уравненія $\varphi_n(z)=0$, лежащихъ между a и b, остается неизмѣннымъ до тѣхъ поръ, пока $\varphi_n(a)$ не достигнетъ значенія равнаго нулю.

Въ тѣхъ же случаяхъ, когда $\varphi_n(a)$ переходитъ черезъ нуль, упомянутое выше число можетъ измѣняться; однако всякій разъ не болѣе какъ на единицу.

Что же касается промежутка отъ $z=c$ до $z=\partial$, то число корней уравненія $\varphi_n(z)=0$, лежащихъ въ этомъ промежуткѣ, можетъ измѣняться только при переходѣ $\varphi_n(\partial)$ черезъ нуль и также всякій разъ не болѣе какъ на единицу.

Отсюда непосредственно вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема 2.

При возрастаніи ξ отъ 0 до ∞ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z)=0$$

послѣдовательно переходятъ

$$\text{черезъ } a, -\infty, +\infty, \partial$$

изъ промежутка (a,b) въ промежутокъ (c,∂).

Поэтому всѣ корни уравненій n-ой степени относительно ξ

$$\varphi_n(a)=0,\ \Phi_n(\xi)=0,\ \varphi_n(\partial)=0$$

вещественны и положительны.

Кромѣ того, если обозначимъ по порядку ихъ величины корни

$$\left.\begin{array}{lll} \text{уравненія } \varphi_n(a)=0 & \text{черезъ} & \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \quad » \quad \Phi_n(\xi)=0 & » & \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n \\ \quad » \quad \varphi_n(\partial)=0 & » & \xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n \end{array}\right\} \quad (6)$$

то будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\xi_1 < \xi'_1 < \xi''_1 < \xi_2 < \xi'_2 < \xi''_2 \ldots . < \xi_n < \xi'_n < \xi''_n. \quad (7)$$

Наконецъ относительно корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

можемъ утверждать, что

при $\xi''_i < \xi < \xi_{i+1}$ $n-i$ изъ нихъ лежатъ между a и b,

а остальные i между c и d;

при $\xi_{i+1} < \xi < \xi'_{i+1}$ $n-i-1$ между a и b,

i » c и d,

одинъ » $-\infty$ и a;

при $\xi'_{i+1} < \xi < \xi''_{i+1}$ $n-i-1$ между a и b,

i » c и d,

одинъ » d и $+\infty$.

Лемма 1.

$$\Phi_{n+1}(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_0}{p_n}(\alpha_n - \xi\beta_n) + \frac{p_1}{p_n}(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) + \ldots \\ \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_n}(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) + \alpha_{2n} - \xi\beta_{2n} \end{array} \right\} \Phi_n(\xi). \quad (8)$$

Эта формула получается на основаніи теоремы о разложеніи опредѣлителя по элементамъ какого нибудь столбца (въ данномъ случаѣ послѣдняго).

Примѣчаніе.

Полагая для удобства

$$p_n = \Phi_n(\xi),$$

можемъ переписать формулу (8) слѣдующимъ образомъ

$$\Phi_{n+1}(\xi) = \int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,.\,y^n dy - \xi\int_c^\partial f(y)\varphi_n(y)\,.\,y^n dy. \quad (9)$$

Лемма 2.

При $\varphi_n\ (a) = 0$ произведеніе

$$\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi)$$

число отрицательное; напротивъ, при $\varphi_n(\partial) = 0$ тоже произведеніе число положительное.

Доказательство.

При $\varphi_n(a) = 0$ выраженіе

$$\frac{\varphi_n(z)\,.(z-b)}{z-a}$$

представляетъ цѣлую функцію n-ой степени отъ z.

Коэффиціентъ при высшей степени z въ этой функціи равенъ $\Phi_n(\xi)$.

На этомъ основаніи нетрудно преобразовать равенство (9) въ слѣдующее:

$$\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi) = \int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,\frac{\varphi_n(y)\ (y-b)}{y-a}\,dy -$$

$$-\ \xi\int_c^\partial f(y)\varphi_n(y)\,\frac{\varphi_n(y)\,.(y-b)}{y-a}\,dy,$$

первая часть котораго, очевидно, число отрицательное, и потому

$$\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ при $\varphi_n(\partial) = 0$ получимъ

$$\left.\begin{aligned}\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi)=\int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,\frac{\varphi_n(y).(y-b)}{y-\partial}\,dy-\\ -\xi\int_c^\partial f(y)\varphi_n(y)\,\frac{\varphi_n(y).(y-b)}{y-\partial}\,dy\end{aligned}\right\}>0.$$

Слѣдствіе.

Всѣ корни уравненія

$$\Phi_{n+1}(\xi)=0$$

расположены, по одному, въ слѣдующихъ $n+1$ промежуткахъ:

$$(0,\xi_1),(\xi''_1,\xi_2),(\xi''_2,\xi_3),\ldots(\xi''_{n-1},\xi_n),(\xi''_n,\infty).$$

Сопоставляя, наконецъ, послѣднее слѣдствіе съ теоремою 2, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема 3.

Если

$$\xi^0_1,\xi^0_2,\ldots\xi^0_n,\xi^0_{n+1}$$

означаютъ всѣ корни уравненія

$$\Phi_{n+1}(\xi)=0$$

въ возрастающемъ порядкѣ, то при

$$\xi=\xi^0_k$$

$n-k+1$ корней уравненія

$$\varphi_n(z)=0$$

лежатъ между a и b, а остальные $k-1$ между c и ∂.

Примѣчаніе.

При разсмотрѣніи выраженій подобныхъ (1) можно придти между прочимъ къ функціямъ Ламэ*.

Отсюда нетрудно видѣть связь между послѣднею нашею теоремой и дополненною г. Ляпуновымъ теоремой** Клейна на счетъ функцій Ламэ.

---

* *Heine*, «Handbuch der Kugelfunctionen», 1878 (§ 102). — *Сохоцкій*, «Объ опредѣленныхъ интегралахъ....», 1873 (глава III).

** *Klein*, «Ueber Lamé'sche Functionen». (Mathematische Annalen. Band XVIII). — *Ляпуновъ*, «Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости». С.-Петербургъ, 1884 (глава IV).

ОТДѢЛЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

М. А. Тихомандрицкаго.

1. Способъ Остроградскаго для отдѣленія алгебраической части интеграловъ отъ раціональныхъ дробей, примѣненный Алексѣевымъ въ его «Интегральномъ исчисленіи» къ интеграламъ отъ выраженій, содержащихъ квадратный корень изъ полинома 2. степени, распространяется и на гиперэллиптическіе интегралы, т. е. на интегралы отъ выраженій, содержащихъ корень квадратный изъ полинома какой угодно степени. Показать это есть цѣль настоящей замѣтки.

2. Имѣя въ виду сдѣланное уже самимъ Остроградскимъ, мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ интеграловъ вида:

$$\int \Phi(x) \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \qquad (1)$$

гдѣ $\Phi(x)$ раціональная функція x, такъ какъ общій интегралъ отъ выраженія, зависящаго отъ квадратнаго корня изъ полинома $R(x)$ какой угодно степени, будетъ отъ разсматриваемаго отличаться на интегралъ отъ раціональной дроби. Функція $\Phi(x)$ вообще неправильная дробь; исключая цѣлую часть, мы будемъ имѣть:

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{2}$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція, а $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ правильная дробь, такъ что, означая степень полинома по Абелю буквою δ, поставленною предъ знакомъ полинома, будемъ имѣть:

$$\delta\varphi(x) < \delta\psi(x). \tag{3}$$

На основаніи (2) нашъ интегралъ (1) приведется къ суммѣ двухъ такихъ:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

изъ которыхъ каждый мы разсмотримъ отдѣльно, начиная съ перваго.

3. Всегда можно найти такой полиномъ $K(x)$ степени не высшей $f(x)$, что по придачѣ его къ $f(x)$ мы получимъ интегралъ

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}}\,dx, \tag{1}$$

который будетъ интегрироваться алгебраически, слѣдовательно будетъ вида:

$$\int \frac{f(x) + K(x)}{2\sqrt{R(x)}} = X\sqrt{R(x)} + C, \tag{2}$$

гдѣ X цѣлый полиномъ*. Дѣйствительно, дифференцируя его и умножая затѣмъ на $2\sqrt{R(x)}$, получимъ:

$$f(x)+K(x)=X'.2R(x)+X.R'(x). \qquad (3)$$

* Общая форма функціи отъ x и $\sqrt{R(x)}$ будетъ конечно такая:

$$\Theta(x)+\Phi(x)\sqrt{R(x)},$$

гдѣ $\Theta(x)$ и $\Phi(x)$ раціональныя функціи; но тогда, продифференцировавъ равенство:

$$\int\frac{f(x)+K(x)}{2\sqrt{R(x)}}\,dx=\Theta(x)+\Phi(x)\sqrt{R(x)},$$

мы получили бы по умноженіи результата на $2\sqrt{R(x)}$ слѣдующее:

$$f(x)+K(x)=\Theta'(x)\,2\sqrt{R(x)}+\Phi'(x)\,2\,R(x)+\Phi(x)\,R'(x), \quad \text{(a)}$$

откуда слѣдуетъ, такъ какъ $\sqrt{R(x)}$ разсматривается всегда неизвлекомый, что

$$\Theta'(x)=0,$$

т. е.

$$\Theta(x)=C.$$

Что $\Phi(x)$ должна быть полиномъ, а не дробная функція, въ этомъ такъ убѣждаемся. Еслибы $\Phi(x)$ была дробная функція, то по разложеніи на частныя дроби она представилась бы суммою членовъ вида $\dfrac{A_\mu}{(x-\alpha)^\mu}$; если m наибольшее значеніе μ, то во второй части равенства (a) встрѣтится членъ

$$\frac{-A_m m 2R(\alpha)}{(x-\alpha)^{m+1}},$$

которому подобнаго не будетъ, но который долженъ исчезнуть, такъ какъ первая часть равенства (a) есть цѣлая функція; слѣдовательно если A_m не $=0$, то должно быть $R(\alpha)=0$, т. е. α должно быть корнемъ полинома $R(x)$; но въ такомъ случаѣ старшимъ членомъ во второй части (a) будетъ такой членъ:

$$\frac{-mA_m 2R'(\alpha)+A_m R'(\alpha)}{(x-\alpha)^m}=\frac{A_m R'(\alpha)(1-2m}{(x-\alpha)^m},$$

который можетъ исчезнуть лишь когда $A_m=0$, ибо ни $R'(\alpha)$, ни $1-2m$ не $=0$. Но тогда такимъ-же образомъ докажется, что $A_{m-1}=0$, затѣмъ $A_{m-2}=0$ и такъ далѣе до $A_0=0$, т. е. что дробная часть $\Phi(x)$ равна нулю, и слѣдовательно $\Phi(x)$ есть цѣлая функція.

Отсюда слѣдуетъ прежде всего, такъ какъ члены высшей степени направо отъ знака равенства не сокращаются*, что

$$\partial(f(x)+K(x))=\partial X+\partial R-1, \qquad (4)$$

откуда выходитъ, такъ какъ $\partial K(x)<\partial f(x)$, что степень полинома X:

$$\partial X=\partial f(x)-(\partial R-1) \qquad (5)$$

— такъ что самый вопросъ возможенъ лишь пока

$$\partial f(x)\geqq\partial R-1, \qquad (6)$$

— и, слѣдовательно, число его неопредѣленныхъ коэффиціентовъ будетъ:

$$\partial X+1=\partial f(x)-(\partial R-2), \qquad (7)$$

тогда какъ всѣхъ уравненій, получаемыхъ чрезъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ равенства (3) числомъ

$$\partial(f(x)+K(x))+1=\partial X+\partial R, \qquad (8)$$

болѣе числа $\partial X+1$ на

$$\partial R-1.$$

Если мы возьмемъ теперь для $K(x)$ полиномъ степени

$$\partial K(x)=\partial R-2, \qquad (10)$$

то общее число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ будетъ равно числу уравненій для ихъ опредѣленія. Эти уравненія всѣ будутъ независимы между собою. Дѣйствительно, если мы имѣемъ:

---

* См. ниже равенства (11), гдѣ $2m-\rho+2$ очевидно никогда не можетъ быть $=0$, если $m>\rho-2$.

$$R(x) = a_0 x^{\varrho} + a_1 x^{\varrho-1} + a_2 x^{\varrho-2} + \ldots + a_{\varrho}$$

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m$$

и положимъ, принимая во вниманіе (5) и (10),

$$X = \alpha_0 x^{m-\varrho+1} + \alpha_1 x^{m-\varrho} + \alpha_2 x^{m-\varrho-1} + \ldots + \alpha_{m-\varrho+1}$$

$$K(x) = \beta_0 x^{\varrho-2} + \beta_1 x^{\varrho-3} + \beta_2 x^{\varrho-4} + \ldots + \beta_{\varrho-2},$$

то первыя два изъ уравненій, о которыхъ идетъ рѣчь, будутъ:

$$\begin{aligned} b_0 &= (2m - \varrho + 2) a_0 \alpha_0, \\ b_1 &= 2(m - \varrho + 1) a_1 \alpha_0 + \varrho a_0 \alpha_1; \end{aligned} \qquad (11)$$

каждое же изъ послѣдующихъ будетъ содержать кромѣ нѣкоторыхъ α по одному только коэффиціенту полинома K, — будетъ именно вида:

$$b_k = -\beta_{k-2} + \text{линейная функція отъ } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-\varrho+1})$$

— который не войдетъ ни въ одно изъ остальныхъ уравненій, а потому вторыя части ни котораго изъ нихъ не могутъ быть линейною функціей остальныхъ. Слѣдовательно, рѣшеніе будетъ одно, конечное и опредѣленное, и изъ (2) мы получимъ тогда:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = X\sqrt{R(x)} - \int \frac{K(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

Такимъ образомъ чрезъ отдѣленіе алгебраической части отъ нашего интеграла мы сведемъ его къ интегралу того же вида, въ которомъ степень полинома будетъ не превосходить $\delta R - 2$. Въ частномъ случаѣ она можетъ быть меньше $\delta R - 2$, можетъ даже случиться, что всѣ коэффиціенты полинома $K(x)$ окажутся равными нулю; въ такомъ случаѣ предложенный намъ интеграль (1) будетъ интегрироваться алгебраически, такъ какъ вторая часть (12) приведется тогда къ первому члену ея.

4. Переходя къ интегралу

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $\delta\varphi(x) < \delta\psi(x)$, мы докажемъ, что всегда можно найти такой полиномъ $K(x)$, степени низшей чѣмъ $\delta\psi(x) + \delta R(x)$, что по придачѣ его къ числителю получится выраженіе:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

интегрирующееся алгебраически, именно такимъ образомъ, что будетъ:

$$\int \frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{X}{Y}\sqrt{R(x)} + C, \qquad (2)$$

гдѣ

$$\delta X < \delta Y^*. \qquad (3)$$

* Что членъ несодержащій $\sqrt{R(x)}$ приводится къ постоянной, докажется какъ и выше; что же касается предположенія о правильности дроби $\frac{X}{Y}$, то допустимъ противное и предположимъ, что вторая часть (2) есть

$$\left(\Theta(x) + \frac{X}{Y}\right)\sqrt{R(x)} + C,$$

гдѣ $\frac{X}{Y}$ правильная дробь, а $\Theta(x)$ цѣлая функція; дифференцируя и дѣля на $\sqrt{R(x)}$, мы получимъ тогда такое равенство:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} \frac{1}{2R(x)} = \frac{YX' - XY'}{Y^2} + \frac{X}{Y} \cdot \frac{R'(x)}{2R(x)} + $$
$$+ \Theta'(x) + \Theta(x)\frac{R'(x)}{2R(x)}; \qquad \text{(b)}$$

но здѣсь цѣлое можетъ заключаться только въ послѣднихъ двухъ членахъ второй части. Пусть $A_m x^m$ старшій членъ въ $\Theta(x)$; тогда во второй части (b) старшіе члены цѣлой части будутъ:

Дѣйствительно, дифференцируя, получимъ по умноженіи на $2\sqrt{R(x)}$:

$$\frac{\varphi(x)+K(x)}{\psi(x)}=\frac{(YX'-XY')}{Y^2}\,2\,R(x)+\frac{X}{Y}R'(x),$$

или приводя къ одному знаменателю вторую часть:

$$\frac{\varphi(x)+K(x)}{\psi(\alpha)}=\frac{(YX'-XY')\,2\,R(x)+XYR'(x)}{Y^2}. \qquad (4)$$

Здѣсь вторая часть можетъ сократиться только на дѣлителей полинома Y, и какъ два члена числителя содержатъ Y множителемъ, а третій его производную Y', помноженную на X и $R(x)$, гдѣ X простой съ Y, то это сокращеніе можетъ произойти только на тѣхъ множителей полинома Y, которые суть общіе или Y и Y' или Y и $R(x)$. Означая чрезъ Θ общаго наибольшаго дѣлителя функцій Y и Y', такъ что будетъ слѣдовательно:

$$\Theta=D(Y,Y'), \qquad (5)$$

а также полагая

$$mA_m x^{m-1}+A_m\frac{\rho}{2}\,x^{m-1}=(m+\frac{\rho}{2})\,A_m x^{m-1},$$

(если $\partial R(x)=\rho$); но это должно исчезнуть, такъ какъ налѣво отъ знака $=$ въ (b) стоитъ правильная дробь; слѣдовательно должно быть $Am=0$, такъ какъ $m+\frac{\rho}{2}$ не равно нулю, какъ сумма положительныхъ чиселъ. Но тогда также докажется, что и $A_{m-1}=0$, и наконецъ $A_1=0$. Далѣе A_0 войдетъ въ такой членъ:

$$A_0\frac{\rho}{2}\cdot\frac{1}{x},$$

которому сходственнаго между другими не найдется, такъ какъ въ прочихъ членахъ степень числителя меньше степени знаменателя по крайней мѣрѣ на 2 единицы; слѣдовательно $A_0=0$, такимъ образомъ $\Theta(x)=0$, что̀ и требовалось доказать.

$$Y : \Theta = P, \tag{6}$$

$$Y' : \Theta = Q, \tag{7}$$

мы, по сокращеніи на Θ второй части равенства (4), дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(PX' - XQ)\,2R(x) + XPR'(x)}{Y.P}, \tag{8}$$

гдѣ вторая часть можетъ сократиться уже только на дѣлителей общихъ P и $R(x)$; дѣйствительно, всякій множитель Y входитъ въ P одинъ разъ, а $R(x)$ кратныхъ не имѣетъ; далѣе $PX' - XQ$ простое съ P, и P входитъ множителемъ во второй членъ (8); что же касается до множителей общихъ P и $R'(x)$, которые могутъ случиться, то они не дѣлятъ ни $R(x)$, ибо $R(x)$ не имѣетъ кратныхъ дѣлителей, ни $PX' - XQ$, которое, какъ сейчасъ уже упомянуто, простое съ P. Итакъ, вторая часть (8) можетъ сократиться только на общаго наибольшаго дѣлителя P и $R(x)$, который означимъ такъ:

$$z = D(P, R(x)); \tag{9}$$

введя еще обозначенія:

$$P : D(P, R(x)) = p$$

$$R(x) : D(P, R(x)) = r(x), \tag{10}$$

мы получимъ изъ (8) по сокращеніи на z такое равенство:

$$\frac{\varphi(x) + K(x)}{\psi(x)} = \frac{(PX' - XQ)\,2r(x) + XpR'(x)}{Y.p}, \tag{11}$$

гдѣ вторая часть будетъ уже несократимая дробь; что же касается первой части, то она можетъ сокращаться на нѣкоторый полиномъ q; слѣдовательно мы будемъ имѣть изъ (11):

$$\varphi(x)+K(x)=[(PX'-XQ)\,2r(x)+XpR'(x)].q \quad (12)$$

$$\psi(x)=Y.p.q. \quad (13)$$

5. Первое изъ этихъ равенствъ дастъ полиномъ $K(x)$, когда будутъ извѣстны: $P, Q, p, q, r(x)$ и X. Послѣдній, а съ нимъ и $K(x)$ вполнѣ опредѣлятся,—послѣ того какъ будутъ извѣстны $P, Q, p, q, r(x)$ и еще Y,—изъ условія, чтобы полиномъ

$$K(x)=[(PX'-XQ)\,2r(x)+XpR'(x)]q-\varphi(x) \quad (14)$$

дѣлился безъ остатка на Y. Въ самомъ дѣлѣ, когда $P, Q, p, q, r(x)$ и Y будутъ извѣстны, то во второй части (14) будетъ только $\partial X+1=\partial Y$ неопредѣленныхъ величинъ, именно коэффиціентовъ полинома X; слѣдовательно для его опредѣленія, а съ нимъ вмѣстѣ и $K(x)$, можно поставить только ∂Y условій; а такое число условій и даетъ наше требованіе дѣлимости $K(x)$ на $Y(x)$; для этого, какъ извѣстно, остатокъ дѣленія, который будетъ степени $\partial Y-1=\partial X$, долженъ имѣть всѣ свои ∂Y коэффиціентовъ равными нулю; потому уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ полинома X согласно этому требованію мы получимъ, выполнивъ дѣленіе второй части (14) на $Y(x)$ и приравнивая нулю каждый коэффиціентъ остатка этого дѣленія. Изъ этихъ уравненій коэффиціенты X, а слѣдовательно потомъ и коэффиціенты частнаго:

$$L(x)=\frac{[(PX'-XQ)\,2r(x)+XpR'(x)]q-\varphi(x)}{Y} \quad (15)$$

вполнѣ опредѣлятся. Уравненія эти вполнѣ независимы; въ самомъ дѣлѣ, если нѣкоторыя изъ нихъ были бы слѣдствіемъ остальныхъ, то равное число коэффиціентовъ полинома X, а слѣдовательно и самый полиномъ X до нѣкоторой степени остались бы произвольными; но тогда изъ дѣлимости второй части (14) на Y при произвольности полинома X слѣдовало бы необходимымъ образомъ, что коэффиціенты при X, X' и независящій отъ нихъ членъ, т. е. $\varphi(x)$, должны дѣлиться на Y; но это послѣднее невозможно, ибо дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ всегда берется несократимая, а Y по (13) есть дѣлитель ея знаменателя $\psi(x)$. Такъ какъ $K(x)$ содержитъ только ∂Y произвольныхъ величинъ, то его нельзя подчинить требованію дѣлиться на полиномъ высшей степени чѣмъ Y; наибольшей степени сократимости дроби $\frac{K(x)}{\psi(x)}$, прибавленной къ дроби, стоящей подъ нашимъ интеграломъ, можно достигнуть, слѣдовательно, только увеличеніемъ степени полинома Y.

6. Изъ (13) слѣдуетъ, что Y, p и q суть дѣлители $\psi(x)$, и такъ какъ мы желаемъ собрать въ Y наивозможно большее число дѣлителей $\psi(x)$, чтобы увеличить его степень, то на долю q мы должны оставить наименьшее число ихъ, ибо p зависитъ отъ P и слѣдовательно отъ Y. Изъ (6) имѣемъ

$$Y=\theta.P;$$

далѣе изъ (10) и (9) предыдущаго §

$$P=p.z;$$

внося отсюда и изъ предыдущаго въ (13), будемъ имѣть:

$$\psi(x)=\theta.p^2.z.q, \tag{1}$$

отсюда слѣдуетъ, что наименьшее значеніе для q получимъ, если соберемъ въ немъ простыхъ множителей $\psi(x)$, отличныхъ отъ множителей полинома $R(x)$; общіе же множители съ послѣднимъ взятые одинъ разъ собраны въ z. Написавъ (1) такимъ образомъ

$$\psi(x)=(\theta.p)p.z.q, \tag{2}$$

въ произведеніи $p.z.q$ будемъ имѣть все различныхъ множителей, тогда какъ въ (θp) могутъ быть и одинакіе, причемъ входящіе въ p будутъ входить и въ θp; также могутъ входить въ θp нѣкоторые изъ множителей z, притомъ множители θp непремѣнно будутъ входить по одному разу въ pz; что же касается до множителей q, то они не будутъ входить въ θp, ибо, по условію, это простые множители $\psi(x)$, отличные отъ множителей общихъ у $\psi(x)$ съ $R(x)$. И такъ

$$p.z.q = Pq$$

будетъ произведеніе всѣхъ различныхъ множителей $\psi(x)$, взятыхъ по одному разу. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\theta p = D(\psi(x), \psi'(x)), \qquad \text{(I)}$$

а

$$Pq = \psi(x) : D(\psi(x), \psi'(x)). \qquad \text{(II)}$$

Такъ какъ множители q отличны отъ множителей $R(x)$, то общій наибольшій дѣлитель Pq и $R(x)$ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ P и $R(x)$, т. е. будетъ:

$$z = D(P, R(x)) = D(Pq, R(x)) \qquad \text{(III)}$$

и потому можетъ быть найденъ.

Дѣля на него $R(x)$, найдемъ $r(x)$:

$$r(x) = R(x) : z; \qquad \text{(IV)}$$

дѣля Pq на z, найдемъ pq:

$$pq = Pq : z. \qquad \text{(V)}$$

Такъ какъ pq содержитъ простыхъ множителей, изъ которыхъ только входящіе въ p входятъ въ $\theta . p$; то p будетъ общій наибольшій дѣлитель pq и θp:

$$p = D(pq, \theta p). \qquad \text{(VI)}$$

Найдя его, дѣлимъ на него pq и θp; получимъ:

$$q = pq : p. \qquad \text{(VII)}$$

$$\theta = \theta p : p. \qquad \text{(VIII)}$$

Дѣля Pq на q найдемъ

$$P = Pq : q; \qquad \text{(IX)}$$

перемножая P и θ, найдемъ

$$Y = P . \theta; \qquad \text{(X)}$$

дифференцируя его найдемъ Y', и затѣмъ Q по формулѣ

$$Q = \frac{Y'P}{Y}, \qquad \text{(XI)}$$

которая вытекаетъ изъ (6) и (7) § 4. Такимъ образомъ все, входящее въ выраженіе $K(x)$:

$$K(x) = [(PX' - XQ) 2r(x) + XpR'(x)]q - \varphi(x) \qquad \text{(XII)}$$

будетъ теперь извѣстно до степени полинома X включительно; подставляя сюда вмѣсто X полиномъ степени $\delta Y - 1$ съ неопредѣленными коэффиціентами и дѣля вторую часть на Y, приравняемъ нулю каждый изъ δY коэффиціентовъ имѣющаго получиться остатка; тогда будемъ имѣть δY уравненій, изъ которыхъ и найдемъ всѣ коэффиціенты полинома X; вставляя ихъ въ частное этого дѣленія

$$\frac{K(x)}{Y} = \frac{[(PX' - XQ) 2r(x) + XpR'(x)]q - \varphi(x)}{Y} = L(x), \qquad \text{(XIII)}$$

найдемъ и полиномъ $L(x)$.

Послѣ этого мы будемъ имѣть:

$$\int\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{X}{Y}\sqrt{R(x)}-\int\frac{L(x)}{p.q}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}. \qquad \text{(XIV')}$$

Примѣч. Мы опредѣлили полиномъ $K(x)$ изъ условія дѣлимости выраженія (14) на Y; почему же не на другой полиномъ той же степени какъ Y, который можно получить, замѣняя нѣкоторые множители Y множителями q? но легко видѣть, что это невозможно: въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ первая группа членовъ въ (14), имѣя множителемъ q, очевидно дѣлится на него, то остальной членъ $-\varphi(x)$ въ такомъ случаѣ тоже долженъ дѣлиться на q, а это невозможно, ибо q есть дѣлитель $\psi(x)$. Отсюда слѣдуетъ, что вышеизложенное приведеніе гиперэллиптическаго интеграла посредствомъ отдѣленія алгебраической части есть единственное.

7. Степень полинома $L(x)$ найдется изъ слѣдующихъ соображеній. Степень обоихъ членовъ выраженія:

$$PX'-XQ, \qquad (1)$$

будетъ

$$\delta P+\delta X-1=\delta P+\delta Y-2,$$

какъ не трудно видѣть, или, такъ какъ

$$\delta P=\delta p+\delta z,$$

слѣдующая:

$$\delta p+\delta z+\delta Y-2;$$

по умноженіи (1) на $2r(x)$, мы получимъ для степени произведенія:

$$\delta p+\delta z+\delta r(x)+\delta Y-2=\delta p+\delta Y+\delta R-2, \qquad (2)$$

ибо

$$\delta R=\delta z+\delta r(x). \qquad (3)$$

Второй членъ выраженія въ [ ] въ (14), или XII, будетъ степени той-же самой:

$$\delta p + \delta Y - 1 + \delta R - 1.$$

Если это выраженіе въ [ ] помножимъ на q, то степень произведенія будетъ:

$$\delta p + \delta q + \delta Y + \delta R - 2: \tag{4}$$

такъ какъ степень послѣдняго члена $\varphi(x)$ есть

$$\delta\varphi(x) < \delta\psi(x),$$

а по (13) § 4:

$$\delta\psi(x) = \delta p + \delta q + \delta Y,$$

то мы видимъ, что вообще будетъ

$$\delta L(x) = \delta p + \delta q + \delta R - 2. \tag{5}$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ (XIII) второй членъ разобьется, по разложеніи дроби $\frac{L(x)}{p.q}$ на простѣйшія, на сумму интеграловъ того-же вида какъ во второй части (12) § 3, которые разбиваются на интегралы перваго и втораго рода — обращающіеся въ ∞ для $x = \infty$, — и интегралы третьяго рода, вида:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)\,2\sqrt{R(x)}},$$

обращающіеся логариѳмически въ ∞ для $x = \alpha$,

$$\sqrt{R(x)} = \pm\sqrt{R(\alpha)}.$$

8. Пояснимъ изложенное въ § 6 слѣдующимъ примѣромъ. Пусть данъ интегралъ

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^2(x-1)\sqrt{x^3-1}}; \tag{1}$$

найдемъ такой полиномъ $K(x)$, чтобы было

$$\int \frac{(x^2+1+K(x))\,dx}{x^2(x-1)\sqrt{x^3-1}} = \frac{X}{Y}\sqrt{x^3-1}. \qquad (2)$$

Въ нашемъ интегралѣ слѣдовательно:

$$R(x) = x^3 - 1 \qquad (3)$$

$$\varphi(x) = x^2 + 1 \qquad (4)$$

$$\psi(x) = x^2(x-1), \qquad (5)$$

и потому будетъ:

I $\quad D(\psi(x), \psi'(x)) = D(x^2(x-1), 3x^2 - 2x) = x = \theta p;$

II $\quad \psi(x) : \theta p = x^2(x-1) : x = x(x-1) = Pq;$

III $\quad D(Pq, R(x)) = D(x(x-1), x^3-1) = x-1 = D(P, R(x)) = z;$

IV $\quad R(x) : z = (x^3-1) : (x-1) = x^2 + x + 1 = r(x)]$

V $\quad Pq = z = x(x-1) : (x-1) = x = pq;$

VI $\quad D(\theta p : pq) = D(x, x) = x = p;$

VII $\quad pq : p = x : x = 1 = q;$

VIII $\quad \theta p : p = x : x = 1 = \theta;$

IX $\quad Pq : q = x(x-1) : 1 = x(x-1) = P;$

X $\quad Y = \theta \,.\, P = 1 \,.\, x(x-1) = x^2 - x; \;\; Y' = 2x - 1; \;\; \delta Y = 2;$

XI $\quad Q = \dfrac{Y'.P}{Y} = \dfrac{(2x-1).x(x-1)}{x(x-1)} = 2x - 1;$

такъ какъ $\delta Y = 2$, то полагаемъ

$$X = ax + b; \text{ слѣд. } X' = a,$$

и потому имѣемъ:

$$K(x)=[(PX'-XQ)\,2r(x)+Xp\,.\,R'(x)]\,q-\varphi(x)=$$
$$=[\{x(x-1)a-(ax+b)(2x-1)\}\,2(x^2+x+1)+$$
$$+(ax+b)\,.\,x\,.\,3x^2]\,.\,1-x^2-1=$$
$$=ax^4-(2a+b)x^3-(2a+2b+1)x^2-2bx+2b-1.$$

Дѣля на $Y=x^2-x$, получимъ въ частномъ:

$$L(x)=ax^2-(a+b)x-(3a+3b+1),$$

а въ остаткѣ:

$$-(3a+5b+1)x+2b-1;$$

полагая

$$\left.\begin{array}{r}3a+5b+1=0,\\ 2b-1=0,\end{array}\right\}$$

находимъ:

$$a=-\frac{7}{6},\ b=\frac{1}{2};$$

слѣд.

$$X=-\frac{7x-3}{6}$$

и

$$L(x)=-\frac{1}{6}(7x^2-4x-6),$$

и потому окончательно будемъ имѣть:

$$\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x^3-1}}=-\frac{7x-3}{6x(x-1)}\sqrt{x^3-1}+$$
$$+\frac{1}{6}\int\frac{7x^2-4x-6}{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x^3-1}}.$$

Послѣдній интегралъ разобьется на три интеграла 2-го, 1-го и 3-го рода.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

18 октября 1885 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, А. В. Маевскій, М. Ѳ. Ковальскій, А. М. Ляпуновъ, М. А. Тихомандрицкій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. А. М. Ляпуновъ доложилъ содержаніе статьи *А. А. Маркова* подъ заглавіемъ—«О распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій».

2. *Онъ-же* сообщилъ свою замѣтку подъ заглавіемъ—«Формула для потенціальной функціи эллипсоида на внутреннюю точку».

3. *М. А. Тихомандрицкій* прочелъ свою статью подъ заглавіемъ—«Отдѣленіе алгебраической части гиперэллиптическихъ интеграловъ».

4. К. А. Андреевъ и М. А. Тихомандрицкій предложили въ члены общества г. инспектора харьковскаго технологическаго института А. С. Грицая.

Постановлено: баллотировать въ слѣдующее засѣданіе.

5. Г. предсѣдатель сообщилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. G. Teixeira. Vol. VI, № 3 (1883).

2) Протоколы 39-го и 40-го засѣданій математической секціи казанскаго общества естествоиспытателей.

3) Journal de mathématiques élémentaires et spéciales. № 9, (1885).

4) Mathesis, № 9, (1885).

5) American Journal of Mathematics. Vol. VIII, № 1.

6) Записки общества студентовъ Спб. университета. Томъ 2, лл. 1—4.

Протоколъ засѣданія 15 ноября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, В. Л. Кирпичевъ, А. М. Ляпуновъ, Г. В. Левицкій, М. Ѳ. Ковальскій, С. А. Раевскій, А. А. Клюшниковъ, А. В. Гречаниновъ, В. П. Алексѣевскій, И. Д. Штукаревъ, М. С. Косенко, Г. А. Синяковъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель доложилъ о письмѣ, полученномъ имъ отъ секретаря математическаго кружка въ Палермо, съ выраженіемъ благодарности за посланныя ему «Сообщенія х. м. о.».

2. Онъ-же доложилъ о присланномъ отъ канадскаго института въ Торонто нумерѣ журнала Proceedings of the Canadians Institute, Toronto, (July 1885).

Постановлено: благодарить, выслать послѣдніе три выпуска «Сообщеній х. м. о.» и предложить обмѣнъ изданіями.

3. Прочитанъ проектъ измѣненія дѣйствующаго устава х. м. о., составленный распорядительнымъ комитетомъ. Постановлено ходатайствовать объ утвержденіи его согласно съ новою редакціей.

4. Баллотировался въ члены общества А. С. Грицай, инспекторъ харьковскаго технологическаго института. Избранъ единогласно.

5. М. Ѳ. Ковальскій изложилъ содержаніе статьи *П. С. Флорова*—«Объ уравненіи $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$».

6. *А. М. Ляпуновъ* сообщилъ свою статью подъ заглавіемъ—«Нѣкоторыя обобщенія формулы Дирихле для потенціальной функціи на внутреннюю точку».

7. *А. П. Грузинцевъ* показалъ, что *почти всѣ* примѣры, приводимые въ задачникахъ и руководствахъ по элементарной алгебрѣ на совокупныя уравненія 2-й степени съ 2-мя неизвѣстными, суть частные случаи слѣдующихъ болѣе общихъ формъ:

$$1)\quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f,$$
$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

гдѣ $a, \alpha, \ldots$ суть нѣкоторые коэффиціенты;

$$2)\quad ax^2 + bxy + ay^2 + dx \pm dy = f,$$
$$\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2 + \delta x \pm \delta y = \varphi.$$

Въ этомъ случаѣ надо употребить подстановку:

$$x \pm y = u, \quad xy = v.$$

$$3)\quad axy + bx + cy = d$$
$$\alpha xy + \beta x + \gamma y = \delta$$

$$4)\quad ax^2 + bxy + cy^2 = d$$
$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \delta.$$

8. Доложено о полученіи въ теченіе послѣдняго мѣсяца слѣдующихъ книгъ:

1) *Th. Bredichin,* Sur les oscillations des jets d'émission dans les comètes.

2) Кіевскія университетскія извѣстія. № 8, 1885.

3) Извѣстія политехническаго общества, состоящаго при московскомъ техническомъ училищѣ. Вып. III съ атласомъ чертежей. 1885.

4) Физико-математическія науки. № 9, т. I, 1885.

5) Журналъ элементарной математики. № 5, т. II.

6) Математическій сборникъ. Т. XII, вып. 2-й, 1885 г.

7) Mathesis. Octobre, 1885.

8) Journal de mathématiques élémentaires. № 10, 1885 г.

9) Journal de mathématiques spéciales. № 10, 1885 г.

10) Журналъ физико-химическаго общества съ V т. по XVII.

11) *Тихомандрицкій* — Объ обращеніи гиперэллиптическихъ интеграловъ. Харьковъ. 1885.

12) *Его-же* — Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ.

Протоколъ засѣданія 13 декабря.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, М. А. Тихомандрицкій, А. В. Гречаниновъ, В. Л. Кирпичевъ, А. А. Клюшниковъ, А. М. Ляпуновъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель прочелъ письмо г. Флорова, содержащее просьбу высылать г. Флорову «Сообщенія х. м. о.».

Постановлено: высылать.

2. *Г. В. Левицкій* сообщилъ—«О новой звѣздѣ въ туманности Андромеды».

3. К. А. Андреевъ передалъ содержаніе замѣтки *П. С. Флорова* подъ заглавіемъ—«Зависимость между частными интегралами линейныхъ уравненій».

4. *М. А. Тихомандрицкій* изложилъ свою замѣтку—«О конечной разности *n*-го порядка отъ логариѳма функціи одной независимой перемѣнной».

5. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ изданій:

1) Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Vol. VI, № 4 (1885).

2) Journal de mathématiques élémentaires. № 11, 1885.

3) Journal de mathématiques spéciales. № 11, 1885.

4) Mathesis. Novembre. 1885.

5) Bulletin de la sociéte Impériale des naturalistes de Moscou. № 1, 1885.

6) Журналъ элементарной математики. Т. II, №№ 6 и 7. (1885).

7) Математическій сборникъ. Т. XII, вып. 3, 1885.

8) Кіевскія университетскія извѣстія. №№ 9 и 10, 1885.

9) Журналъ русскаго физико-химическаго общества. Т. XVII, вып. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

10) Физико-математическія науки. № 3 (томъ I), 1885.

11) American Journal of Mathematics. Vol. VII, (July, 1885), Number 4.

НѢКОТОРОЕ ОБОБЩЕНІЕ

ФОРМУЛЫ ЛЕЖЕНЬ-ДИРИХЛЕ

ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ ЭЛЛИПСОИДА НА ВНУТРЕННЮЮ ТОЧКУ.

А. М. Ляпунова.

1. Предметъ этой замѣтки состоитъ въ разысканіи особеннаго выраженія для интеграла

$$V=\iiint\frac{F(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

распространеннаго на всѣ вещественныя значенія ξ, η, ζ, удовлетворяющія условію

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}\leqslant 1,$$

въ предположеніи, что x, y, z также удовлетворяютъ условію

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\leqslant 1,$$

и что функція $F(s)$ вещественной перемѣнной s такова, что можетъ быть найдена функція $F(s+t\sqrt{-1})$, для $t=0$ обращающаяся въ $F(s)$, и притомъ синектическая для всѣхъ значеній комплексной перемѣнной $s+t\sqrt{-1}$, модули которыхъ не превосходятъ k, причемъ k должно быть болѣе $2A$, если A есть наибольшая изъ величинъ A, B, C.

Полагая

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}=r$$

и называя черезъ $d\tau$ элементъ объема эллипсоида

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1,$$

мы найдемъ

$$V=\int\frac{F(r)}{r}\,d\tau, \tag{1}$$

гдѣ интегралъ распространенъ на весь объемъ этого эллипсоида.

V будетъ, слѣдовательно, представлять потенціальную функцію разсматриваемаго эллипсоида на внутреннюю точку для притяженія, законъ котораго въ функціи разстоянія выражается формулой

$$\frac{F(r)}{r^2}-\frac{F'(r)}{r}.$$

Выраженіе, которое мы предполагаемъ найдти для нея, будетъ заключать въ себѣ, какъ частный случай, извѣстное выраженіе Дирихле, получаемое при $F(r)=1$.

Въ силу сдѣланнаго предположенія относительно функціи $F(r)$, на основаніи извѣстной теоремы получимъ:

$$F(r)=\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\ldots, \tag{2}$$

гдѣ α_0, α_1 и т. д. не зависятъ отъ r, и это разложеніе функціи $F(r)$ будетъ справедливо для всѣхъ значеній r, встрѣчающихся въ подъинтегральной функціи выраженія (1).

Такимъ образомъ мы найдемъ:

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n U_n\,, \tag{3}$$

гдѣ

$$U_n = \int r^{n-1}\, d\tau.$$

Вопросъ приводится, слѣдовательно, къ разысканію выраженія для U_n.

2. Разысканіе U_n можетъ быть основано на слѣдующихъ теоремахъ:

Теорема 1. U_n есть функція отъ x, y, z, A, B, C и цѣлаго положительнаго (или равнаго нулю) числа n, удовлетворяющая условіямъ:

1) U_n удовлетворяетъ четыремъ слѣдующимъ уравненіямъ съ частными производными и въ конечныхъ разностяхъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial x^2} &= (n+1)\left(x\frac{\partial U_n}{\partial x} + A\,\frac{\partial U_n}{\partial A}\right), \\ \frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial y^2} &= (n+1)\left(y\frac{\partial U_n}{\partial y} + B\,\frac{\partial U_n}{\partial B}\right), \\ \frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial z^2} &= (n+1)\left(z\,\frac{\partial U_n}{\partial z} + C\,\frac{\partial U_n}{\partial C}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$U^0{}_{n+2} = \frac{1}{n+4}\left\{ A^3\,\frac{\partial U_n{}^0}{\partial A} + B^3\,\frac{\partial U_n{}^0}{\partial B} + C^3\,\frac{\partial U_n{}^0}{\partial C}\right\}, \tag{5}$$

гдѣ $U_n{}^0$ есть значеніе U_n при $x = y = z = 0$.

2) U_n есть четная функція отъ x, y, z.

3) Для $n = 0$ и $n = 1$, U_n опредѣляется формулами:

$$U_0 = \pi ABC \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} d\lambda,$$

$$U_1 = \frac{4}{3}\pi ABC.$$

Что функція U_n удовлетворяетъ двумъ послѣднимъ условіямъ, это очевидно. Поэтому остается только показать, что она удовлетворяетъ первому.

Легко видѣть, что

$$A\frac{\partial U_n}{\partial A} = U_n + \int \xi \frac{\partial r^{n-1}}{\partial \xi} d\tau = U_n - \frac{\partial}{\partial x}\int \xi r^{n-1}\, d\tau\,,$$

а съ другой стороны, нетрудно убѣдиться, что

$$\int \xi r^{n-1}\, d\tau = xU_n - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\int r^{n+1}\, d\tau,$$

откуда и получается первое изъ уравненій (4).

Далѣе, замѣчая, что выраженіе для U_n^0 можетъ быть приведено къ виду:

$$U_n^0 = \frac{2}{n+2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} p^{-\frac{n+2}{2}} \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

гдѣ

$$p = \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{A^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{B^2} + \frac{\cos^2\theta}{C^2},$$

мы легко убѣждаемся въ справедливости уравненія (5).

Теорема 2. Условія 1), 2) и 3) вполнѣ опредѣляютъ функцію U_n.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть V_n удовлетворяетъ условіямъ 1), 2) и 3). Въ такомъ случаѣ функція $W_n = U_n - V_n$ будетъ удовлетворять условіямъ 1) и 2), а для $n=0$ и $n=1$ будетъ приводиться къ нулю. Но если для какого-либо значенія n, $W_n = 0$, то въ силу (4)

$$\frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial x^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial z^2} = 0\,,$$

и слѣд.

$$W_{n+2} = axyz + a_1 yz + b_1 zx + c_1 xy + a_2 x + b_2 y + c_2 z + a_3\,,$$

гдѣ a, a_1, b_1 и т. д. не зависятъ отъ x, y, z. Въ силу же условія 2) и уравненія (5) всѣ эти постоянныя a, a_1, b_1 и т. д. должны быть нулями. Такимъ образомъ оказывается, что и $W_{n+2} = 0$.

Примѣчаніе. Если положимъ

$$(n+1)\left(x\frac{\partial U_n}{\partial x} + A\frac{\partial U_n}{\partial A}\right) = f_n(x, y, z)\,,$$

$$(n+1)\left(y\frac{\partial U_n}{\partial y} + B\frac{\partial U_n}{\partial B}\right) = \varphi_n(x, y, z)\,,$$

$$(n+1)\left(z\frac{\partial U_n}{\partial z} + C\frac{\partial U_n}{\partial C}\right) = \psi_n(x, y, z)\,,$$

то для вычисленія U_{n+2} по найденному U_n получимъ изъ уравненій (4) слѣдующую формулу

$$U_{n+2} = U^0{}_{n+2} + \int_0^x (x-u) f_n(u, y, z)\, du + \int_0^y (y-v)\varphi_n(o, v, z)\, dv +$$

$$+ \int_0^w (z-w)\psi_n(o, o, w)\, dw.$$

По этой формулѣ наприм. найдемъ:

$$U_2 = \frac{\pi}{4} ABC \int_0^\infty \left\{ 1 + \frac{A^2}{A^2+\lambda} + \frac{B^2}{B^2+\lambda} + \frac{C^2}{C^2+\lambda} - \Big(H(\lambda)\Big)^2 \right\} \frac{\lambda\, d\lambda}{D(\lambda)},$$

гдѣ положено

$$\left.\begin{aligned} H(\lambda) &= 1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}, \\ D(\lambda) &= \sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

3. Разумѣя подъ λ комплексную перемѣнную, проведемъ въ плоскости, служащей для ея изображенія, какую-либо замкнутую кривую, не имѣющую кратныхъ точекъ, и пересѣкающую вещественную ось только въ двухъ точкахъ: M, для которой $\lambda > 0$, и N, для которой $\lambda < -A^2$. Направленіе движенія по этой кривой мы будемъ считать положительнымъ, когда движущаяся точка, переходя изъ M въ N, пересѣкаетъ положительную часть мнимой оси.

Разсматривая какую-либо функцію $f(\lambda)$, мы будемъ подъ интеграломъ

$$\int_0 f(\lambda)\, d\lambda$$

разумѣть интегралъ, взятый по слѣдующему замкнутому контуру: интегрированіе начинается отъ точки $\lambda = 0$, ведется по вещественной оси до точки M, затѣмъ продолжается по упомянутой кривой въ положительномъ направленіи и, по возвращеніи въ точку M, ведется по вещественной оси до точки $\lambda = 0$.

При этомъ условіи могутъ быть доказаны слѣдующія теоремы:

Теорема 3. Выраженія для U_0 и U_1 могутъ быть приведены къ виду:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{\pi}{2} ABC \int\limits_0 \frac{H(\lambda)\,d\lambda}{D(\lambda)}\,, \\ U_1 &= -\frac{2}{3}\; ABCi \int\limits_0 \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{H(\lambda)})^3\,d\lambda}{D(\lambda)}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

гдѣ функціи $D(\lambda)$ и $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ въ началѣ интегрированія должны быть положительными.

Здѣсь $D(\lambda)$ и $H(\lambda)$ суть функціи, опредѣляемыя формулами (6), и $i=\sqrt{-1}$.

Для доказательства мы замѣчаемъ, что всѣ особенныя точки функцій

$$D(\lambda) \text{ и } \frac{\sqrt{\lambda H(\lambda)}}{D(\lambda)}\,,$$

за исключеніемъ точки $\lambda=0$, лежатъ на отрицательной части вещественной оси внутри контура, по которому производится интегрированіе. При томъ первая изъ этихъ функцій имѣетъ три точки развѣтвленія, а вторая вмѣстѣ съ точкой $\lambda=0$ четыре.

Отсюда слѣдуетъ: 1) что въ первомъ изъ интеграловъ (7) подъинтегральная функція при возвращеніи въ точку M получаетъ отрицательное значеніе, а во второмъ — положительное, и 2) что, не измѣняя значеній этихъ интеграловъ, можно предположить, что всѣ точки кривой MN безпредѣльно удаляются отъ точки $\lambda=0$.

Замѣчая поэтому, что интегралы

$$\int \frac{H(\lambda)\,d\lambda}{D(\lambda)} \text{ и } \int \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{H(\lambda)})^3\,d\lambda}{D(\lambda)}\,,$$

взятые по кривой MN, при этомъ возрастаніи ея приближаются соотвѣтственно къ значеніямъ 0 и $2\pi i$, мы и убѣждаемся въ справедливости формулъ (7).

Теорема 4. Общее выраженіе U_n опредѣляется формулой

$$U_n = G_n ABC \int_0 \frac{H(\lambda)(\sqrt{\lambda H(\lambda)})^n \, d\lambda}{D(\lambda)}, \tag{8}$$

гдѣ

$$G_n = \frac{(-i)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(n+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 2(-i)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi, \tag{9}$$

и гдѣ интегрированіе подчинено тому-же условію, какъ и въ формулахъ (7).

Въ самомъ дѣлѣ, это выраженіе U_n, очевидно, удовлетворяетъ условіямъ 2) и 3), и нетрудно убѣдиться, что оно удовлетворяетъ также и условію 1).

Для облегченія дифференцированій, которыя для этого необходимо произвести, можно ввести новыя перемѣнныя, полагая

$$\frac{1}{A^2} = a, \ \frac{1}{B^2} = b, \ \frac{1}{C^2} = c, \ \frac{x}{A} = \xi, \ \frac{y}{B} = \eta, \ \frac{z}{C} = \zeta,$$

вслѣдствіе чего уравненія (4) и (5) обратятся въ

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} = -2(n+1)\frac{\partial U_n}{\partial a},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} = -2(n+1)\frac{\partial U_n}{\partial b},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} = -2(n+1)\frac{\partial U_n}{\partial c},$$

$$\frac{\partial U_n^0}{\partial a} + \frac{\partial U_n^0}{\partial b} + \frac{\partial U_n^0}{\partial c} = -\frac{n+4}{2} U^0_{n+2},$$

а формула (8) приметъ видъ:

$$U_n = G_n \int\limits_0^{} \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\xi^2}{1+a\lambda}-\frac{\eta^2}{1+b\lambda}-\frac{\zeta^2}{1+c\lambda}\right)^{\frac{n+2}{2}} d\lambda}{\sqrt{(1+a\lambda)(1+b\lambda)(1+c\lambda)}}.$$

Примѣчаніе. Въ случаѣ нечетнаго n путь интегрированія въ выраженіи (8) можетъ состоять изъ одной только замкнутой кривой MN.

4. По формулѣ (**3**) мы можемъ теперь найдти выраженіе для V подъ видомъ ряда. Но для того, чтобы этотъ рядъ можно было просуммировать, пользуясь формулой (2), необходимо, чтобы для всѣхъ точекъ кривой MN, входящей въ составъ пути интегрированія въ выраженіи (8), было удовлетворено условіе

$$\operatorname{mod} \sqrt{\lambda H(\lambda)} < k.$$

Разыскивать предѣльныя положенія кривой MN, удовлетворяющей этому условію, мы не будемъ, а обратимъ вниманіе только на слѣдующую теорему:

Теорема 5. Если λ есть комплексная перемѣнная *постояннаго* модуля R, превосходящаго A^2, то для того, чтобы модули функціи $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ не превосходили k, необходимо и достаточно, чтобы R удовлетворялъ условію:

$$\frac{k^2-k\sqrt{k^2-4A^2}}{2} < R < \frac{k^2+k\sqrt{k^2-4A^2}}{2}. \qquad (10)$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\lambda = Re^{\varphi i},$$

найдемъ:

$$\mathrm{mod}\, H(\lambda) \leqslant 1 + \frac{x^2}{\sqrt{A^4 + 2A^2 R\cos\varphi + R^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{B^4 + 2B^2 R\cos\varphi + R^2}} + \\ + \frac{z^2}{\sqrt{C^4 + 2C^2 R\cos\varphi + R^2}}.$$

Но при условіи $R > A^2$ наибольшая величина второй части неравенства для разсматриваемыхъ значеній x, y, z будетъ

$$1 + \frac{A^2}{\sqrt{A^4 + 2A^2 R\cos\varphi + R^2}},$$

а потому мы найдемъ

$$\mathrm{mod}\, H(\lambda) \leqslant 1 + \frac{A^2}{R - A^2},$$

и слѣдовательно

$$\mathrm{mod}\sqrt{\lambda H(\lambda)} \leqslant \frac{R}{\sqrt{R - A^2}},$$

а отсюда уже нетрудно заключить о справедливости теоремы.

Если кривая MN, входящая въ составъ пути интегрированія, удовлетворяетъ упомянутому условію, то для V получится слѣдующее выраженіе:

$$V = 2ABC \int_0 \frac{H(\lambda)\, d\lambda}{D(\lambda)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi. \quad (11)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему результату.

Теорема 6. Если A есть наибольшая изъ полу-осей эллипсоида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

и если $F(s + ti)$ есть синектическая функція внутри круга радіуса $k > 2A$, то для потенціальной функціи

$$V = \int \frac{F(r)}{r} d\tau$$

этого эллипсоида на внутреннюю точку будетъ справедливо выраженіе (11), въ которомъ интегрированіе по λ производится по замкнутому контуру: начинаясь въ точкѣ $\lambda = 0$, оно ведется по положительному направленію вещественной оси, затѣмъ — въ положительномъ направленіи по всей окружности, описанной изъ точки $\lambda = 0$ радіусомъ R, удовлетворяющимъ условію (10), и наконецъ — въ отрицательномъ направленіи по вещественной оси до точки $\lambda = 0$, причемъ начальныя значенія функцій $D(\lambda)$, $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ должны быть положительны.

Примѣчаніе 1. За путь интегрированія въ выраженіи (11) можетъ быть принята всякая замкнутая кривая, проходящая черезъ точку $\lambda = 0$, для которой эта точка не есть кратная, для которой во всѣхъ точкахъ $\mathrm{mod}\sqrt{\lambda H(\lambda)} < k$, и которая непрерывнымъ измѣненіемъ, при условіи никогда не проходить черезъ особенныя точки функцій $D(\lambda)$ и $\sqrt{H(\lambda)}$, можетъ быть приведена въ совпаденіе съ контуромъ, опредѣленнымъ въ теоремѣ 6.

Примѣчаніе 2. Изъ выраженія (11) для потенціальной функціи можетъ быть найдено слѣдующее выраженіе для проекціи притяженія на ось x-овъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\,ABCx \int_0 \frac{d\lambda}{(A^2+\lambda)\,D(\lambda)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi\right) d\varphi.$$

Примѣчаніе 3. Притяженіе эллипсоидомъ внѣшней точки по теоремѣ Айвори можетъ быть найдено, коль скоро извѣстно притяженіе внутренней точки. Но чтобы перейдти къ этому случаю отъ предыдущихъ формулъ, необходимо расширить область синектичности функціи $F(s+ti)$.

ОБЪ УРАВНЕНІИ

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u.$$

П. С. Флорова.

I. Предварительныя замѣчанія.

Замѣчаніе 1. Если черезъ n и k обозначимъ цѣлыя положительныя числа, а черезъ θ функцію, опредѣляемую уравненіемъ

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{ki}{n}\right) = \theta(x) \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma\left(\frac{nx}{k} + \frac{ni}{k}\right),$$

и если измѣнимъ x въ $x + \frac{k}{n}$, то, на основаніи перваго свойства функціи гамма, получимъ

$$\theta\left(x + \frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^k \theta(x),$$

и вмѣстѣ съ этимъ будемъ имѣть

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{ki}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^{nx} C_n{}^k \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma\left(\frac{nx}{k} + \frac{ni}{k}\right),$$

гдѣ C не зависитъ отъ x. Написавъ здѣсь kx вмѣсто nx и замѣнивъ потомъ n черезъ k, а k черезъ n, увидимъ, что C обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$C_n^{\,k} C_k^{\,n} = 1.$$

Если же измѣнимъ n въ $2n$ и k въ $2k$, то найдемъ:

$$C_{2n}^{\,2k} = \left(\frac{k}{n}\right)^{nk} (C_n^{\,k})^2.$$

Положивъ для рѣшенія этого уравненія

$$C_n^{\,k} = n^{\alpha n+\beta k+\gamma nk}\, k^{\alpha' n+\beta' k+\gamma' nk} A^n B^k$$

и принявъ во вниманіе отношенія

$$C_n^{\,k} C_k^{\,n} = 1\,,\ C'_n = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

получимъ:

$$C_n^{\,k} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{nk-n-k}{2}} (2\pi)^{\frac{n-k}{2}}.$$

На основаніи сказаннаго имѣемъ тождественно

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{ki}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^{nx + \frac{nk-n-k}{2}} (2\pi)^{\frac{n-k}{2}} \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma\left(\frac{nx}{k} + \frac{ni}{k}\right).$$

Замѣчаніе 2. Если α и β цѣлыя положительныя числа и если

$$\alpha = \nu n,\ \beta = \nu k,$$

гдѣ ν одинъ изъ общихъ дѣлителей между α и β, то отношеніе

$$\left(x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha}\right)^k u = \left(z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta}\right)^n u\,,$$

$$k^\nu x^{\frac{1}{k}} = n^\nu z^{\frac{1}{n}}$$

тождественно имѣетъ мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ тождества, доказаннаго въ первомъ замѣчанiи, легко убѣдиться, что подстановка

$$u = x^m$$

удовлетворяетъ предыдущему отношенiю при всякомъ m. Отсюда слѣдуетъ, что отношенiе, о которомъ идетъ рѣчь, имѣетъ болѣе νnk интеграловъ и потому есть тождество.

Такимъ же образомъ доказывается тождество

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x{}^{\alpha} z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^{\beta} u = z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^{\beta} x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x{}^{\alpha} u,$$

$$r x^{\frac{1}{k}} = s z^{\frac{1}{n}},$$

гдѣ r и s какiя угодно числа.

Замѣчанiе 3. Пусть n, k и r будутъ цѣлыя положительныя числа, а m какое угодно не равное k. Покажемъ, что однократное дифференцированiе по x обѣихъ частей равенства

$$D_x{}^r \left(x^m D_x{}^k \right)^n u = \left(k - m \right)^{kn+r} z^{\mu_r} \left(z^p D_z{}^n \right)^{k-r} \left(z^{p+1} D_z{}^{n+1} \right)^r u,$$

въ которомъ для краткости положено

$$z = x^{k-m}, \ (n-p)(k-m) = 1, \ \mu_r + n = (k-r)(n-p),$$

и измѣненiе r въ $r+1$ приводятъ къ одному и тому же результату. Дѣйствительно, сравнивая выраженiя, полученныя указаннымъ путемъ, и полагая

$$(z^{p+1} D_z{}^{n+1})^r u = v, \ k - r = \varrho,$$

находимъ

$$D z^{\mu_{k-\varrho}} \left(z^p D^n \right)^{\varrho} v = z^{\mu_{k-\varrho} - 1} \left(z^p D^n \right)^{\varrho} D^{-n} z D^{n+1} v,$$

гдѣ всѣ дифференцированiя производятся по z. Предыдущее равенство, какъ въ этомъ легко убѣдиться посредствомъ отношенiя

$$\left(z^p D^n\right)^\rho v = \sum_{i=0}^{n(\rho-1)} A_i^\rho \, z^{p\rho-i} D^{n\rho-i} v,$$

въ которомъ A не зависитъ отъ z, тождественно имѣетъ мѣсто. Отсюда слѣдуетъ, что k-кратное дифференцированіе по x обѣихъ частей отношенія

$$\left(x^m D_x^{\,k}\right)^n u = (k-m)^{kn} \, z^{-n+\frac{k}{k-m}} \left(z^{n-\frac{1}{k-m}} D_z^{\,n}\right)^k u$$

приводитъ къ отношенію

$$\left(x^m D_x^{\,k}\right)^{n+1} u =$$

$$= (k-m)^{k(n+1)} z^{-1-n+\frac{k}{k-m}} \left(z^{1+n-\frac{1}{k-m}} D_z^{\,n+1}\right)^k u.$$

Но первое изъ этихъ отношеній при $n=1$ обращается въ тождество; поэтому оно тождественно имѣетъ мѣсто при всякомъ n. Доказанное тождество при условіяхъ

$$k-m=r \quad z=1+r\xi$$

принимаетъ видъ

$$\left(x^{k-r} D_x^{\,k}\right)^n u = (1+r\xi)^{-k+\frac{k}{r}} \left((1+r\xi)^{n-\frac{1}{r}} D_\xi^{\,n}\right)^k u.$$

Положивъ здѣсь $r=0$, получимъ:

$$(x^k D_x^{\,k})^n u = e^{k\xi} (e^{-\xi} D_\xi^{\,n})^k u, \quad \xi = \lg x.$$

Это тождество показываетъ, что всякій интегралъ уравненія

$$D_\xi^{\,n} u = e^{\xi} u, \quad \xi = \lg x$$

удовлетворяетъ уравненію

$$(x^k D_x{}^k)^n u = x^k u.$$

Замѣчаніе 4. Если p и q положительныя или отрицательныя цѣлыя числа, то дѣйственные множители вида

$$x^p D^p, \quad D^q x^q$$

могутъ быть перемѣщаемы какъ угодно въ произведеніи, составленномъ изъ множителей того же вида. Эта мысль сама собою вытекаетъ изъ тождествъ:

$$x^p D^p . x^q D^q \omega(x) = x^q D^q . x^p D^p \omega(x),$$

$$D^p x^p . D^q x^q \vartheta(x) = D^q x^q . D^p x^p \vartheta(x),$$

$$D^p x^p . x^q D^q \varphi(x) = x^q D^q . D^p x^p \varphi(x),$$

доказанныхъ В. П. Алексѣевскимъ въ третьей книжкѣ «Сообщеній» за 1884 годъ. Мы изложимъ здѣсь свои соображенія по поводу тѣхъ-же тождествъ.

Первый случай. Пусть p и q одновременно отрицательны. Если p замѣнимъ черезъ $-p$, а q черезъ $-q$, то лѣвая часть отношенія для ω представится въ видѣ

$$\frac{x^{-p}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int (x-\alpha)^{p-1} \alpha^{-q} d\alpha \int (\alpha-\beta)^{q-1} \omega(\beta)\, d\beta,$$

гдѣ β, по совершеніи интегрированія по β, должно быть замѣнено черезъ α, а α, по совершеніи интегрированія по α, черезъ x. Написавъ въ предыдущемъ выраженіи $x\alpha\beta$ вмѣсто β и $x\alpha$ вмѣсто α, найдемъ:

$$\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int (1-\alpha)^{p-1} d\alpha \int (1-\beta)^{q-1} \omega(x\alpha\beta)\, d\beta.$$

Здѣсь α и β нужно положить равными единицѣ, и это можно сдѣлать по совершеніи обоихъ интегрированій. Отсюда слѣдуетъ, что предыдущее выраженіе симметрично относительно p и q и что отношеніе для ω тождественно имѣетъ мѣсто. Подобнымъ же образомъ доказывается тождество для ϑ. Что касается отношенія для φ, то лѣвая часть его по замѣнѣ p черезъ $-p$ и q черезъ $-q$ принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\int(1-\alpha)^{p-1}\alpha^{-p}d\alpha\int(1-\beta)^{q-1}\varphi(x\alpha\beta)\,d\beta,$$

гдѣ β и α по совершеніи интегрированій должны быть положены равными единицѣ. И такъ какъ измѣненіе порядка интегрированій сообщаетъ предыдущему выраженію видъ:

$$\frac{1}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\int(1-\alpha)^{q-1}\,d\alpha\int(1-\beta)^{p-1}\beta^{-p}\varphi(x\alpha\beta)\,d\beta,$$

къ которому приводится правая часть отношенія для φ, то и это отношеніе тождественно имѣетъ мѣсто.

Второй случай. Назвавъ ту и другую часть каждаго изъ доказанныхъ тождествъ соотвѣтственно черезъ u, v, w и исключивъ изъ полученныхъ равенствъ ω, ϑ, φ, увидимъ, что тождества, о которыхъ идетъ рѣчь, имѣютъ мѣсто и для положительныхъ p и q.

Третій случай. Если сдѣлаемъ положенія:

$$x^p D^p\omega = u,\ x^q D^q\varphi = v,\ D^p x^p\varphi = w,$$

то получимъ такія тождества относительно u, v, w, которыя покажутъ намъ, что разсматриваемыя тождества имѣютъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда p положительно, а q отрицательно, или наоборотъ.

Всѣ видятъ, что идея изложеннаго доказательства заимствована у А. В. Лѣтникова.

II. Свойства уравненія $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$.

Опредѣленіе. Пусть α и β будутъ цѣлыя положительныя числа, имѣющія ν общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, и пусть

$$\alpha = \nu n, \quad \beta = \nu k.$$

Число α мы будемъ называть порядкомъ, а число β характеристикой уравненія

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = x^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta}} u.$$

Предложеніе 1. *Порядокъ можно сдѣлать характеристикой и одновременно характеристику порядкомъ.*

Тождество

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^\alpha z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^\beta u = z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^\beta x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^\alpha u,$$

$$k^\nu x^{\frac{1}{k}} = n^\nu z^{\frac{1}{n}}$$

показываетъ, что если u частный интегралъ уравненія

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^\alpha u = u \qquad (\alpha)$$

не удовлетворяетъ уравненію

$$z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^\beta v = v, \qquad (\beta)$$

то посредствомъ формулы

$$z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^\beta u = u_1$$

найдется другой его интегралъ, также не удовлетворяющій уравненію (β), какъ въ этомъ легко убѣдиться, принявъ во вниманіе тождество

$$\left(x^{\alpha-\frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha}\right)^k u = \left(z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta}\right)^n u.$$

Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ n интеграловъ уравненія (α), связанныхъ между собою отношеніями

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u = u_1,$$

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u_1 = u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u_{n-1} = u,$$

и не удовлетворяющихъ уравненію (β).

Если сдѣлаемъ положеніе

$$U = u + u_1 + \ldots + u_{n-1},$$

то получимъ

$$x^{\alpha-\frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha} U = U,$$

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} U = U.$$

Произведя здѣсь замѣну $x^{\frac{1}{k}}$ черезъ $\lambda^r x^{\frac{1}{k}}$ равносильную замѣнѣ $z^{\frac{1}{n}}$ черезъ $\lambda^r z^{\frac{1}{n}}$, гдѣ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$, а r одно изъ чиселъ ряда $1, 2, \ldots n-1$, и обозначивъ черезъ U_r ту функцію, въ которую обращается U послѣ этой замѣны, найдемъ

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha} U_r = U_r,$$

$$z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} U_r = \lambda^{rk} U_r.$$

Покажемъ теперь, что ни одна функція ряда

$$U,\ U_1, \ldots\ldots U_{n-1}$$

не выражается линейно въ другихъ. Дѣйствительно, если-бы мы допустили

$$CU + C_1 U_1 + \ldots + C_{n-1} U_{n-1} = 0,$$

то посредствомъ формулы

$$\left(z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta}\right)^i U_r = \lambda^{irk} U_r$$

для опредѣленія неизвѣстныхъ отношеній

$$\frac{C_1}{C}, \frac{C_2}{C}, \ldots\ldots \frac{C_{n-1}}{C}$$

получили бы n уравненій вида

$$CU + \lambda^{ik} C_1 U_1 + \ldots\ldots + \lambda^{(n-1)ik} C_{n-1} U_{n-1} = 0,$$

гдѣ i измѣняется отъ 0 до $n-1$. Детерминантъ этой системы уравненій долженъ быть нулемъ.

Поэтому, опустивъ множитель

$$U U_1 \ldots\ldots U_{n-1}$$

не равный нулю и положивъ $\lambda^{\rho k} = \delta_\rho$, получимъ:

$$\begin{vmatrix} 1, & \delta_0, & \delta_0^2 \ldots\ldots & \delta_0^{n-1} \\ 1, & \delta_1, & \delta_1^2 \ldots\ldots & \delta_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \delta_{n-1}, & \delta_{n-1}^2 \ldots & \delta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Лѣвая часть этого равенства, равная произведенію множителей вида

$$(\delta_\varrho - \delta_0)(\delta_\varrho - \delta_1) \ldots\ldots (\delta_\varrho - \delta_{\varrho-1}),$$

гдѣ ϱ измѣняется отъ единицы до $n-1$, не можетъ быть нулемъ. Поэтому равенство, о которомъ идетъ рѣчь, нелѣпо, и допущеніе, изъ котораго оно выведено, несостоятельно. Допущеніе

$$CU + C_1 U_1 + \ldots\ldots + C_\varrho U_\varrho = 0,$$

гдѣ $\varrho < n-1$, и подавно не можетъ имѣть мѣста.

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$U, U_1, \ldots\ldots U_{n-1}$$

представляетъ n различныхъ между собою интеграловъ уравненія (α).

Подобнымъ же образомъ рядъ

$$V, V_1, \ldots\ldots V_{k-1},$$

въ которомъ V_i выведено изъ U посредствомъ замѣны $k^\nu x^{\frac{1}{k}}$ черезъ $\mu^i n^\nu z^{\frac{1}{n}}$, гдѣ μ первообразный корень уравненія $\mu^k = 1$, представляетъ k различныхъ между собою интеграловъ уравненія (β).

Очевидно, что зависимость между U_r и V_i выражается отношеніемъ

$$(k^\beta x)^n = (n^\alpha z)^k.$$

До сего времени мы разсматривали лишь одну группу интеграловъ уравненія (α), состоящую изъ n интеграловъ; но число такихъ группъ есть ν и по отношенію къ каждой изъ нихъ изложенныя разсужденія имѣютъ мѣсто. Поэтому уравненіе (α) имѣетъ α такихъ интеграловъ, которые съ β интегралами уравненія (β) связаны отношеніемъ:

$$(k^\beta x)^n = (n^\alpha z)^k;$$

это и нужно было доказать.

Примѣчаніе. Если-бы мы допустили

$$u = U + U_1 + \ldots\ldots + U_{n-1},$$

то безъ труда получили бы

$$u_r = U + \lambda^{rk} U_1 + \ldots + \lambda^{(n-1)rk} U_{n-1},$$

гдѣ r измѣняется отъ единицы до n. Легко убѣдиться послѣ этого, что ни одна функція ряда

$$u, u_1, \ldots\ldots u_{n-1}$$

не выражается линейно въ другихъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ

$$u_r = CU + C_1 U_1 + \ldots\ldots + C_{n-1} U_{n-1},$$

получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ постоянныхъ

$$C, C_1, \ldots\ldots C_{n-1}$$

n уравненій вида

$$u_{r+\varrho} = CU + \lambda^{\varrho k} C_1 U_1 + \ldots\ldots + \lambda^{(n-1)\varrho k} C_{n-1} U_{n-1},$$

гдѣ ϱ измѣняется отъ 0 до $n-1$. И такъ какъ линейныя уравненія имѣютъ единственныя рѣшенія, то непремѣнно

$$C_i = \lambda^{irk}.$$

Этимъ и подтверждается мысль о различіи интеграловъ

$$u,\ u_1, \ldots\ldots u_{n-1}.$$

Предложеніе 2. *Характеристику можно и увеличить и уменьшить на число кратное порядку.*

Если посредствомъ обозначенія

$$x^{p_1} D^{q_1} x^{p_2} D^{q_2} \ldots x^{p_n} D^{q_n} u = \prod_{i=1}^{n} \left(x^{p_i} D^{q_i} \right) u$$

распространимъ знакъ произведенія на дѣйственные множители, то уравненіе

$$z^{\alpha c - c} D_z^{\alpha c} u = u$$

можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\prod_{i=1}^{\alpha} \left(z^{(i-1)c} D_z^{\ ic} \right) u = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{(i-1)c} D_z^{\ ic} \right) u.$$

Назвавъ черезъ ω каждую часть этого уравненія, получимъ

$$(z^c D_z^{\ c})^\alpha \omega = z^c \omega.$$

Отсюда слѣдуетъ, что исходное уравненіе удовлетворяется допущеніемъ:

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1}\left(z^{(i-1)c} D_z^{ic}\right) u,$$

гдѣ подъ ω можно разумѣть интегралъ уравненія

$$D_\zeta^\alpha \omega = e^\zeta \omega, \quad \zeta = \lg z.$$

Подобнымъ же образомъ, если v удовлетворяетъ уравненію

$$z^{\alpha c' - c'} D_z^{\alpha c'} v = v,$$

то непремѣнно

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1}\left(z^{(i-1)c'} D_z^{ic'}\right) v.$$

На основаніи сказаннаго находимъ слѣдующую зависимость между u и v:

$$u = z^{(\alpha-1)c} \prod_{i=1}^{\alpha-1}\left(z^{i(c'-c)-c'} D_z^{i(c'-c)}\right) v.$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что связь между интегралами уравненій

$$x^{\alpha - \frac{1}{c}} D_x^\alpha u = u.$$

и

$$\xi^{\alpha - \frac{1}{c+r}} D_\xi^\alpha v = v$$

выражается формулами:

$$u = z^{(\alpha-1)c} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{(i-1)r-c} D_z^{\,ir} \right) v,$$

$$x = c^{-\alpha c} z^c, \quad \xi = (c+r)^{-\alpha(c+r)} z^{c+r},$$

гдѣ r положительное или отрицательное цѣлое число. И такъ какъ въ предыдущія формулы начертаніе c входитъ лишь въ качествѣ показателя степени независимаго перемѣннаго, то формулы эти имѣютъ мѣсто независимо отъ того, будетъ ли c цѣлымъ числомъ или какимъ угодно.

Поэтому, положивъ $\alpha c = \beta$, увидимъ, что интегралы уравненій

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = x^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta}} u$$

и

$$\frac{d^\alpha v}{d\xi^\alpha} = \xi^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta + r\alpha}} v$$

связаны между собою отношеніями

$$u = z^{\frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha}} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{(i-1)r - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\,ir} \right) v,$$

$$\beta x^{\frac{1}{\beta}} = \alpha z^{\frac{1}{\alpha}} = (\beta + r\alpha)\, \xi^{\frac{1}{\beta + r\alpha}},$$

что и нужно было доказать.

Примѣчаніе. Зависимость между интегралами предыдущихъ уравненій можно выразить еще слѣдующею формулой:

$$u = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{-(i-1)r + \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\,-ir} \right) z^{\frac{(\alpha-1)(\beta+\alpha r)}{\alpha}} v.$$

Предложенiе 3. *Порядокъ и характеристику можно сдѣлать одновременно равными общему наибольшему дѣлителю между ними.*

Пусть α и β будутъ данные порядокъ и характеристика и пусть разложенiе отношенiя β къ α въ непрерывную дробь будетъ

$$\frac{\beta}{\alpha}=a+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{r-1}}+\frac{1}{1}.$$

Уменьшивъ характеристику на число $a\alpha$ и сдѣлавъ ее порядкомъ, мы отъ даннаго уравненiя перейдемъ къ такому, котораго порядокъ α_1 и характеристика β_1 опредѣляются равенствами:

$$\alpha_1=\beta-a\alpha,\ \beta_1=\alpha.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\alpha_2=\beta_1-a_1\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_1,$$

и вообще будемъ имѣть:

$$\alpha_{i+1}=\beta_i-a_i\alpha_i,\ \beta_{i+1}=\alpha_i.$$

Эти равенства показываютъ, что общiй наибольшiй дѣлитель между числами α_i и β_i не зависитъ отъ i. Поэтому, назвавъ его черезъ ν, найдемъ:

$$\alpha_r=p\nu,\ \beta_r=q\nu,$$

гдѣ p и q первыя между собою.

Кромѣ того изъ отношенiя

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i}=a_i+\frac{1}{a_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{r-1}}+\frac{1}{1}$$

легко получить $\alpha_r = \beta_r$. Отсюда слѣдуетъ, что $p = q = 1$ и что $\alpha_r = \beta_r = \nu$. Такимъ образомъ отъ уравненія (α) можно перейти къ уравненію

$$\frac{d^\nu v}{d\xi^\nu} = \xi^{-\nu+1} v\,,$$

знаніе всѣхъ интеграловъ котораго вполнѣ достаточно для опредѣленія полнаго интеграла уравненія (α). Это и нужно было доказать.

Предложеніе 4. *Знакъ характеристики можно измѣнить на обратный.*

Если въ уравненіи (α) вмѣсто x за перемѣнное независимое возьмемъ z, опредѣляемое равенствомъ

$$xz = (-1)^\beta,$$

и если положимъ

$$v = z^{\alpha-1} u,$$

то найдемъ

$$\frac{d^\alpha v}{dz^\alpha} = z^{-\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} v.$$

Это и нужно было доказать.

Слѣдствіе. Уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n \pm \frac{n}{k}} u$$

интегрируется конечною формой всякій разъ, когда дробь $\frac{n}{k}$ не сократима.

Примѣры. Изложенный анализъ показываетъ, что интегралы уравненій:

$$\frac{d^{kr+1}u}{dx^{kr+1}} = x^{(1-k)\left(r+\frac{1}{k}\right)}u,$$

$$\frac{d^k u}{dz^k} = z^{\frac{k^2 r}{kr+1}}u$$

выражаются отношеніями:

$$u = \prod_{i=1}^{k-1}\left(x^{ir+\frac{1}{k}}D_x^{ir}\right)D_x e^{kx^{\frac{1}{k}}},$$

$$kx^{\frac{1}{k}} = (kr+1)z^{\frac{1}{kr+1}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^2u}{dz^2} = z^{-2+\frac{2}{3}}u$$

отношеніемъ:

$$u = \left(3z^{\frac{1}{3}} - 1\right)e^{3z^{\frac{1}{3}}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^3u}{dx^3} = x^{-3+\frac{3}{2}}u$$

отношеніемъ:

$$u = \left(2x^{\frac{1}{2}} - 1\right)e^{2x^{\frac{1}{2}}}.$$

III. Интегрированіе уравненія (α).

а) Строкой. Одна группа интеграловъ уравненія (α) легко находится интегрированіемъ этого уравненія строкой. Въ самомъ дѣлѣ, если количество A_p удовлетворяетъ условію

$$\Gamma\left(1-n+a+\frac{p+n}{k}\right)A_{p+n}=\Gamma\left(1-n+\frac{p+n}{k}\right)A_p$$

и если для всякаго p некратнаго съ k и меньшаго n оно есть нуль, то уравненіе (α) можно утождествить подстановкой:

$$u=\sum_{p=0}^{\infty}A_p x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}.$$

Эта мысль будетъ оправдана, когда убѣдимся, что второе изъ условій опредѣляющихъ A_p удовлетворяется одновременно съ первымъ.

Но первое условіе, представленное въ видѣ

$$\prod_{i=2}^{\beta+1}\Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)A_{p+n}=\prod_{i=1}^{\beta}\Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)A_p,$$

даетъ:

$$A_p=\frac{C+\lambda^p C_1+\ldots\lambda^{p(n-1)}C_{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{\beta}\Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)};$$

поэтому остается показать, что A_p, опредѣляемое предыдущимъ равенствомъ, есть нуль для всякаго p некратнаго съ k и меньшаго n.

Такъ какъ n и k суть числа взаимно простыя, то одно изъ чиселъ ряда

$$p+n,\ p+2n,\ \ldots\ldots p+(k-1)n,$$

гдѣ p некратно съ k и меньше n, непремѣнно раздѣлится на k; частное, полученное отъ этого дѣленія, будетъ цѣлымъ числомъ меньшимъ n. Отсюда слѣдуетъ, что для каждаго изъ перечисленныхъ значеній p въ правой части равенства, опредѣляющаго A_p, существуетъ гамма съ аргументомъ равнымъ нулю или отрицательному цѣлому числу. Это и нужно было показать.

И такъ, строка

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^{rp} x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}}{\prod\limits_{i=1}^{\beta} \Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)}, \qquad (\gamma)$$

легко приводимая къ виду

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu p} \lambda^{rp} x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}}{\prod\limits_{i=1}^{\alpha} \Gamma\left(1-k+\frac{p+ki}{n}\right)},$$

есть интегралъ уравненія (α). По формулѣ, связывающей функціи, удовлетворяющія только уравненію (α), съ одновременными интегралами уравненій (α) и (β), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\prod\limits_{i=1}^{\beta} \Gamma\left(1-r+\frac{np+ni}{k}\right)} \\ u &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha p} x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\prod\limits_{i=1}^{\alpha} \Gamma\left(1+p+\frac{ki-kr}{n}\right)} \end{aligned}\right| \qquad (\delta)$$

Эти строки различны только по виду; ими, очевидно, выражается одинъ и тотъ-же интегралъ уравненія (α). Въ формулахъ (γ) и (δ) число r измѣняется отъ единицы до n.

b) **Обобщенными производными.** Строка (γ) при $r=n$ легко приводится къ виду

$$u=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\beta^{\nu p}\,x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}}{\Gamma\left(1+\nu p\right)}\prod_{i=0}^{\beta-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu p-i}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-n+\frac{\nu p-i\alpha}{\beta}\right)}.$$

На основаніи извѣстной формулы А. В. Лѣтникова отношеніе

$$\Gamma\left(1+\frac{\nu p-i}{\beta}\right):\Gamma\left(1+\alpha-n+\frac{\nu p-i\alpha}{\beta}\right)$$

можно замѣнить выраженіемъ

$$x^{\frac{i\alpha-\nu p}{\beta}+n-\alpha}\,D_x^{\frac{(\alpha-1)i}{\beta}+n-\alpha}\,x^{\frac{\nu p-i}{\beta}},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $x=0$. Произведя эту замѣну на самомъ дѣлѣ, получимъ:

$$u=x^{\alpha-n-\frac{1}{\beta}}\prod_{i=0}^{\beta-1}\left(x^{\frac{(\alpha-1)i+1}{\beta}+n-\alpha}\,D_x^{\frac{(\alpha-1)i}{\beta}+n-\alpha}\right)x^{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\Phi\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right),$$

гдѣ для краткости положено:

$$\Phi\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)=e^{\beta x^{\frac{1}{\beta}}}+e^{g\beta x^{\frac{1}{\beta}}}+\ldots+e^{g^{r-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}},\quad g^r=1.$$

Если въ предыдущей формулѣ n замѣнимъ черезъ k, k черезъ n и x черезъ z, то получимъ интегралъ уртвненія (β). Поэтому интегралъ уравненія (α) можно выразить еще слѣдующимъ отношеніемъ:

$$u = z^{\beta-n-\frac{1}{\alpha}} \prod_{i=0}^{\alpha-1}\left(z^{\frac{(\beta-1)i+1}{\alpha}+k-\beta} D_z^{\frac{(\beta-1)i}{\alpha}+k-\beta} \right) z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \Phi\left(z^{\frac{1}{\alpha}} \right),$$

$$\alpha z^{\frac{1}{\alpha}} = \beta x^{\frac{1}{\beta}}.$$

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію строкъ (δ). Первая изъ нихъ, представленная въ видѣ

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha p} x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\Gamma(\alpha+\alpha p)} \prod_{i=1}^{\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\alpha-i+1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1-r+\frac{\alpha p+\alpha i}{\beta}\right)},$$

выразится въ обобщенныхъ производныхъ слѣдующимъ образомъ:

$$u = x^{1-r+\alpha+\frac{1-\alpha}{\beta}} \prod_{i=0}^{\beta-1}\left(x^{\frac{(1-\alpha)i+1}{\beta}+r-1} D_x^{\frac{(1-\alpha)i}{\beta}+r-1} \right) \theta\left(x^{\frac{1}{\beta}} \right),$$

вторая, представленная въ видѣ

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha p} x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\Gamma(\alpha+\alpha p)} \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{\Gamma\left(1+p+\frac{i-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+p+\frac{\beta i-\beta r}{\alpha}\right)},$$

слѣдующимъ:

$$u = z^{\beta + \frac{1-\beta r}{\alpha}} \prod_{i=0}^{\alpha} \left(z^{\frac{(1-\beta)i+\beta r-2}{\alpha}} D_z^{\frac{(1-\beta)i+\beta r-1}{\alpha}} \right) \theta\left(z^{\frac{1}{\alpha}} \right),$$

гдѣ для краткости положено:

$$\theta\left(x^{\frac{1}{\beta}} \right) = e^{\beta x^{\frac{1}{\beta}}} + h e^{h\beta x^{\frac{1}{\beta}}} + \ldots + h^{\alpha-1} e^{h^{\alpha-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}},$$

$$a z^{\frac{1}{\alpha}} = \beta x^{\frac{1}{\beta}},\ h^{\alpha} = 1.$$

Всѣ дифференцированія въ предыдущихъ формулахъ начинаются отъ нуля. Если въ упомянутыхъ формулахъ положимъ $r=1$ и если, перейдя по формуламъ А. В. Лѣтникова отъ обобщенныхъ производныхъ къ опредѣленнымъ интеграламъ, измѣнимъ перемѣнныя такъ, чтобы предѣлами каждаго интегрированія были нуль и единица, то, принявъ во вниманіе зависимость между функціями бета и гамма, возвратимся къ строкамъ (δ). Отсюда слѣдуетъ, что при $r=1$ строки (δ) могутъ быть выражены въ опредѣленныхъ интегралахъ независимо отъ понятія объ обобщенныхъ производныхъ.

Примѣчаніе. Не безполезно замѣтить, что строка

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{np} x^{\frac{np}{k}+n-r}}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+p+\frac{ki-kr}{n}\right)},$$

гдѣ k число положительное, а r одно изъ чиселъ ряда $1, 2 \ldots n$, и равносильная этой строкѣ формула

$$u=z^{k+\frac{1-kr}{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(z^{\frac{(1-k)i+kr-2}{n}}D_z^{\frac{(1-k)i+kr-1}{n}}\right)\theta\left(z^{\frac{1}{n}}\right),$$

$$\theta\left(z^{\frac{1}{n}}\right)=e^{nz^{\frac{1}{n}}}+he^{hnz^{\frac{1}{n}}}+\ldots+h^{n-1}e^{h^{n-1}nz^{\frac{1}{n}}},$$

$$nz^{\frac{1}{n}}=kx^{\frac{1}{k}},\ h^n=1,$$

гдѣ каждое дифференцированіе начинается отъ $z=0$, выражаютъ полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^nu}{dx^n}=x^{-n+\frac{n}{k}}u$$

въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1) когда k цѣлое число первое съ n,

2) когда k несоизмѣримое число,

3) когда k равняется несократимой дроби $\frac{nl}{m}$, знаменатель которой m больше n.

Примѣры. Изложенный анализъ показываетъ, что интегралъ уравненія

$$\frac{d^{kr+1}u}{dx^{kr+1}}=x^{(1-k)\left(r+\frac{1}{k}\right)}u$$

выражается отношеніемъ:

$$u=\prod_{i=1}^{k-1}\left(x^{ri+\frac{1}{k}}D_x^{ri}\right)D_x e^{kx^{\frac{1}{k}}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x^{-2+\frac{1}{k}}u$$

отношеніемъ:

$$u = \int\limits_0^z (z-\omega)^{k-\frac{3}{2}} \operatorname{snh} 2\omega^{\frac{1}{2}}\, d\omega\ ,\ z = k^2 x^{\frac{1}{k}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^{2n}u}{dx^{2n}} = x^{-n}u$$

отношеніемъ:

$$u = \int\limits_0^x (x-\omega)^{n-\frac{3}{2}} \operatorname{snh} 2\omega^{\frac{1}{2}}\, d\omega.$$

О ФУНКЦІЯХЪ,

ПОДОБНЫХЪ ФУНКЦІЯМЪ ЛЕЖАНДРА.

К. А. Поссе.

Въ 7 и 9 №№ Comptes rendus за 1885 годъ, Г. Stieltjes сообщилъ нѣкоторыя теоремы и формулы, относящіяся до такъ называемыхъ функцій, подобныхъ функціямъ Лежандра, или полиномовъ Якоби и составляющія существенныя дополненія къ извѣстнымъ свойствамъ этихъ функцій. Настоящая замѣтка заключаетъ въ себѣ доказательство результатовъ Г. Stieltjes, основанное на разсмотрѣніи этихъ функцій, какъ знаменателей подходящихъ дробей въ разложеніи интеграла

$$\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz}{x-z}, \ (\alpha \text{ и } \beta > 0)$$

въ непрерывную дробь.

Извѣстно, что разлагая

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz}{x-z}$$

въ непрерывную дробь, получаемъ (см. напр. мою диссертацію — «О функціяхъ, подобныхъ функціямъ Лежандра», стр. 28 и слѣд.):

$$\Phi(x) = \cfrac{a}{x - a_2 - \cfrac{a_2 a_3}{x - a_3 - a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{x - a_5 - a_6 - \cdots}}}$$

гдѣ
$$a = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

$$a_{2n} = \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+\beta+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)},$$

$$a_{2n+1} = \frac{n(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)}.$$

Знаменатель n-ой подходящей выражается здѣсь слѣдующимъ образомъ:

$$x^n F\left(1-n-\alpha, -n, 2-2n-(\alpha+\beta), \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

или

$$(-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)} F(\alpha+\beta+n-1, -n, \alpha, x) \qquad (2)$$

гдѣ $F(a, b, c, x)$ обозначаетъ гипергеометрическій рядъ

$$1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2 + \ldots.$$

Обозначая эту цѣлую функцію n-ой степени отъ x черезъ $T_n(\alpha, \beta, x)$ или просто T_n, будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$T_n = x^n - \frac{n(\alpha+n-1)}{\alpha+\beta+2n-2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-3)}x^{n-2} - \ldots. \qquad (1)$$

или

$$T_n = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{n(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha}x + \ldots\ldots\right] \qquad (2)$$

Эта функція и называется функціею, подобною функціи Лежандра или полиномомъ Якоби.

Перечислимъ главнѣйшія ея свойства, вытекающія изъ ея опредѣленія.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} T_n \theta_{n-1}\, dx = 0\,, \qquad \mathrm{I}$$

гдѣ θ_{n-1} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$.

$$T_{n+2} = (x - a_{2n+3} - a_{2n+4})\, T_{n+1} - a_{2n+2} a_{2n+3}\, T_n. \qquad \mathrm{II}$$

$$T_n(\alpha, \beta, 1-x) = (-1)^n T_n(\beta, \alpha, x). \qquad \mathrm{III}$$

Изъ выраженія (2) и формулы III вытекаютъ равенства

$$T_n(\alpha,\beta,0) = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)}\,, \qquad (3)$$

$$T_n(\alpha,\beta,1) = \frac{\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2n-2)}\,. \qquad (4)$$

Изъ выраженія (1) вытекаетъ соотношеніе

$$T'_n(\alpha,\beta,x) = n\, T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x)\,, \qquad \mathrm{IV}$$

гдѣ T'_n означаетъ производную отъ T_n.

Изъ общихъ формулъ въ теоріи непрерывныхъ дробей (см. напр. мою диссертацію, стр. 17) получается формула

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}T_n^2(\alpha,\beta,x)\,dx = a a_2 a_3 \ldots a_{2n+1} =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)^2}. \qquad (5)$$

Функція $T_n(\alpha,\beta,x)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(1-x)x\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha-(\alpha+\beta)x)\frac{dy}{dx}+n(\alpha+\beta+n-1)y=0, \quad \text{V}$$

и всякая цѣлая функція n-ой степени, удовлетворяющая этому уравненію, отличается отъ T_n только постояннымъ множителемъ.

Переходимъ теперь къ доказательству теоремъ и формулъ Г. Stieltjes.

Теорема.

Функція $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\alpha}[(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)]^{\beta}\Pi(x_i-x_k)^2,$$

гдѣ α и $\beta > 0$, а перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_n$ не выходятъ изъ предѣловъ 0 и 1, достигаетъ своего maximum'a, когда $x_1, x_2, \ldots x_n$ дѣлаются равными корнямъ уравненія

$$T_n(\alpha,\beta,x)=0.$$

Здѣсь $\Pi(x_i-x_k)^2$ обозначаетъ произведеніе квадратовъ разностей, составленныхъ изъ величинъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Доказательство.

Уравненія, опредѣляющія величины $x_1, x_2, \ldots x_n$, соотвѣтствующія maximum'y функціи $\Phi(x_1, \ldots x_n)$, можно написать подъ видомъ

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=0 \text{ или } \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x_k}=0$$

для $k=1,\ 2,\ldots\ldots n$.

Полагая

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)$$

и обозначая черезъ Δ дискриминантъ этой функціи, будемъ имѣть

$$\frac{\partial \lg \Phi}{\partial x_k}=\frac{\alpha}{x_k}-\frac{\beta}{1-x_k}+\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k}=0$$

или

$$x_k(1-x_k)\ \frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k}+(\alpha-(\alpha+\beta)x_k)=0. \qquad (6)$$

Далѣе, имѣя $\Delta=\Pi(x_i-x_k)^2$, находимъ

$$\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k}=2\sum_{(i)}\frac{1}{x_k-x_i},\ (i\gtrless k).$$

Съ другой стороны, полагая

$$\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-x_k)},$$

находимъ

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\sum_{(i)}\frac{1}{x-x_i},\ (i\gtrless k),$$

т. е.

$$\frac{(x-x_k)\varphi'(x)-\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi(x)}=\sum_{(i)}\frac{1}{x-x_i},\ (i\gtrless k)$$

и дѣлая $x=x_k$, находимъ

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi''(x_k)}{\varphi'(x_k)}=\sum_{(i)}\frac{1}{x_k-x_i},$$

откуда

$$\frac{\partial \lg \Delta}{\partial x_k}=\frac{\varphi''(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

и уравненіе (6) даетъ

$$x_k(1-x_k)\varphi''(x_k)+(\alpha-(\alpha+\beta)x_k)\varphi'(x_k)=0$$

для $k=1,\ 2,\ldots n$.

Слѣдовательно, цѣлая функція n-ой степени

$$x(1-x)\varphi''(x)+(\alpha-(\alpha+\beta)x)\varphi'(x)$$

отличается отъ $\varphi(x)$ только постояннымъ множителемъ, который, очевидно, равенъ

$$-n(\alpha+\beta+n-1),$$

такъ что окончательно имѣемъ

$$x(1-x)\varphi''(x)+(\alpha-(\alpha+\beta)x)\varphi'(x)+n(\alpha+\beta+n-1)\varphi(x)=0,$$

а потому $\qquad \varphi(x)=T_n(\alpha,\beta,x),$

что и тр. док.

Для вычисленія самаго maximum'a функціи Φ, замѣчаемъ, что

$$[x_1x_2\ldots.x_n]^{\alpha}[(1-x_1)(1-x_2)\ldots.(1-x_n)]^{\beta}=$$

$$=[(-1)^nT_n(\alpha,\beta,0)]^{\alpha}[T_n(\alpha,\beta,1)]^{\beta}=$$

$$=\frac{[\alpha(\alpha+1)\ldots.(\alpha+n-1)]^{\alpha}[\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)]^{\beta}}{[(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n)\ldots.(\alpha+\beta+2n-2)]^{\alpha+\beta}}.$$

Слѣдовательно, все дѣло сводится къ вычисленію дискриминанта $\Pi(x_i - x_k)^2$ функціи $T_n(\alpha, \beta, x)$.

Для этой цѣли замѣчаемъ вмѣстѣ съ Г. Stieltjes, что если X есть цѣлая функція степени n, съ коэффиціентомъ 1 при x^n, X_1 — ея производная, $x_1, x_2, \ldots x_n$ — ея корни, а $X_2, X_3, \ldots X_n$ рядъ функцій Штурма, составляемыхъ по схемѣ

$$X = QX_1 - X_2,\ X_1 = Q_1 X_2 - X_3, \ldots X_{n-2} = Q_{n-2} X_{n-1} - X_n, \quad \mathrm{VI}$$

то, обозначая черезъ $A_1, A_2, \ldots A_n$ коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ $X_1, X_2, \ldots X_n$, будемъ имѣть для выраженія дискриминанта функціи X слѣдующую формулу

$$\Delta = \Pi(x_i - x_k)^2 = A_1^2 A_2^2 \ldots . A_{n-1}^2 X_n \qquad (8)$$

или

$$\Delta = A_1^2 A_2^2 \ldots . A_{n-1}^2 A_n,$$

потому что $X_n =$ постоянному A_n.

Эта формула есть только частный случай формулъ, получаемыхъ по теоремѣ Сильвестера и Борхгардта (см. *Serret*, Cours d'Algèbre supérieure, T. I, стр. 570), въ силу которой вообще имѣемъ

$$A_1^2 A_2^2 \ldots A_{k-1}^2 X_k =$$
$$= \sum (x_1 - x_2)^2 \ldots (x_1 - x_k)^2 \ldots (x_{k-1} - x_k)^2 (x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n),$$

откуда вытекаетъ, что

$$A_1^2 A_2^2 \ldots A_{k-1}^2 A_k = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots s_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1}, & s_k, & \ldots s_{2k-2} \end{vmatrix},$$

гдѣ $s_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \ldots + x_n^\mu$.

Обращаясь къ нашему случаю, въ которомъ

$$X = T_n(\alpha, \beta, x),$$

$$X_1 = T'_n(\alpha, \beta, x) = n T_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x),$$

дѣлимъ $T_n(\alpha, \beta, x)$ на $T'_n(\alpha, \beta, x)$ и обозначаемъ частное черезъ Q, а остатокъ черезъ R.

Подставляя въ формулу I

$$T_n = QT'_n + R, \text{ находимъ:}$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\left\{QT'_n + R\right\}\theta_{n-1}\,dx = 0;$$

полагая $\theta_{n-1} = x(1-x)\theta_{n-3}$, гдѣ θ_{n-3} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-3$, находимъ:

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\left\{nQT_{n-1}(\alpha+1, \beta+1, x) + R\right\}\theta_{n-3}\,dx = 0$$

или замѣчая, что Q есть 1-ой степени относительно x,

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta R\,\theta_{n-3}\,dx = 0,$$

откуда и вытекаетъ, что R отличается отъ

$$T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x)$$

только постояннымъ множителемъ. Такимъ образомъ находимъ соотношеніе

$$T_n(\alpha, \beta, x) = QT'_n(\alpha, \beta, x) - c_2 T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x), \quad (8)$$

гдѣ c_2 — постоянное.

Для опредѣленія c_2, умножаемъ обѣ части равенства (8) на $x^\alpha(1-x)^\beta T_{n-2}(\alpha+1, \beta+1, x)\,dx$ и интегрируемъ отъ 0 до 1; тогда получимъ:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}T_n(\alpha,\beta,x)x(1-x)T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)dx=$$

$$=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}nQT_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x)T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)dx$$

$$-c_2\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}T^2_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)\,dx$$

или замѣчая, что коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x въ функціяхъ T_μ равны 1, получимъ:

$$-\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}T_n^2(\alpha,\beta,x)\,dx=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}T^2_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x)\,dx\\&-c_2\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}T^2_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)\,dx.\end{aligned}\right\}$$

Всѣ интегралы, входящіе въ эту формулу, могутъ быть взяты по формулѣ (5), послѣ чего получаемъ:

$$c_2=\frac{(n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)^2}. \tag{9}$$

Далѣе, замѣнивъ въ формулѣ II α на $\alpha+1$, β на $\beta+1$, n на $n-k$, получимъ для $k\geqq 3$ соотношеніе

$$T_{n-k+2}(\alpha+1,\beta+1,x)=$$

$$=q_{n-k+1}T_{n-k+1}(\alpha+1,\beta+1,x)-c_kT_{n-k}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

гдѣ $c_k=\dfrac{(n-k+1)(\alpha+n-k+1)(\beta+n-k+1)(\alpha+\beta+n-k+1)}{(\alpha+\beta+2n-2k+1)(\alpha+\beta+2n-2k+2)^2(\alpha+\beta+2n-2k+3)}$,

(10)

а q_{n-k+1} — линейная функція.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующій рядъ соотношеній

$$\left.\begin{array}{l} T_n(\alpha,\beta,x)=Q\,T'_n(\alpha,\beta,x)-c_2\,T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x), \\ \qquad\qquad T_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x)= \\ =q_{n-2}\,T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x)-c_3\,T_{n-3}(\alpha+1,\beta+1,x), \\ T_{n-2}(\ldots.)=q_{n-3}\,T_{n-3}(\ldots.)-c_4\,T_{n-4},(\ldots.), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_2(\ldots.)=q_1\,T_1(\ldots.)-c_n. \end{array}\right\}\ \mathrm{VII}$$

Чтобы привести этотъ рядъ соотношеній къ виду VI, полагаемъ

$$T_n(\alpha,\beta,x)=X$$

$$T'_n(\alpha,\beta,x)=X_1=c_1\,T_{n-1}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

гдѣ $c_1=n$, и умножаемъ равенства системы VII соотвѣтственно на

$$1,\ c_1,\ c_2,\ c_1c_3,\ c_2c_4,\ c_1c_3c_5,\ c_2c_4c_6,\ldots.$$

Тогда система VII приведется къ виду VI, причемъ будемъ имѣть:

$$X_2=c_2\,T_{n-2}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

$$X_3=c_1c_3\,T_{n-3}(\alpha+1,\beta+1,x),$$

и вообще

$X_k=c_1c_3\ldots.c_k\,T_{n-k}(\alpha+1,\beta+1,x)$, для k нечетнаго,

$X_k=c_2c_4\ldots.c_k\,T_{n-k}(\alpha+1,\beta+1,x)$, для k четнаго.

Слѣдовательно, коэффиціентъ A_k при x^{n-k} въ функціи X_k будетъ равенъ $c_1\,c_3\ldots\ldots c_k$ въ первомъ и $c_2\,c_4\ldots\ldots c_k$ во второмъ случаѣ. Отсюда въ обоихъ случаяхъ находимъ

$$A_1^{\,2}A_2^{\,2}\ldots.A^2_{k-1}A_k=c_1^{\,k}c_2^{\,k-1}\ldots.c^2_{k-1}c_k$$

и, взявъ выраженія c_k по формуламъ (9) и (10), окончательно получаемъ:

$$A_1^2 A_2^2 \ldots . A^2_{k-1} A_k = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots s_{k-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots s_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1}, & s_k, & \ldots s_{2k-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{r=0}^{k-r} (n-r)^{k-r} (\alpha+n-1-r)^{k-1-r} (\beta+n-1-r)^{k-1-r} \prod\limits_{r=0}^{k-3} (\alpha+\beta+n-2-r)^{k-2-r}}{\prod\limits_{r=0}^{2k-3} (\alpha+\beta+2n-2-r)^{2k-2-r}}$$

При $k=n$, получаемъ выраженіе дискриминанта функціи $T_n(\alpha,\beta,x)$

$$\Delta = \frac{2^2 3^3 \ldots n^n (\alpha+1)(\alpha+2)^2 \ldots (\alpha+n-1)^{n-1} (\beta+1)(\beta+2)^2 \ldots . (\beta+n-1)^{n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)^{n-1} (x+\beta+n)^n \ldots . (\alpha+\beta+2n-2)^{2n-2}} \tag{11}$$

Перемножая (7) и (11) находимъ и величину maximum'а Ф, а именно

$$\prod_{r=1}^{r=n} \frac{r^r (\alpha+r-1)^{\alpha+r-1} (\beta+r-1)^{\beta+r-1}}{(\alpha+\beta+n+r-2)^{\alpha+\beta+n+r-2}}. \tag{12}$$

Если въ формулѣ I замѣнимъ x черезъ $\frac{1+x}{2}$ и z черезъ $\frac{1+z}{2}$, и положимъ

$$\mathrm{T}_n(\alpha,\beta,x) = T_n\left(\alpha,\beta,\frac{1+x}{2}\right),$$

то $T'_n(\alpha, \beta, x)$ будетъ цѣлая функція n-ой степени отъ x, удовлетворяющая условію

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} T_n \theta_{n-1}\, dx = 0,$$

гдѣ θ_{n-1} — произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$, а также и дифференціальному уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x)\frac{dy}{dx} + n(n-1+\alpha+\beta)y = 0. \quad (13)$$

Корни этой функціи $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ связаны съ корнями $x_1, x_2, \ldots x_n$ функціи T_n соотношеніемъ $\xi_i = 2x_i - 1$, а потому дискриминантъ функціи $T'_n(\alpha, \beta, x)$ получится черезъ умноженіе дискриминанта функціи T_n на $2^{n(n-1)}$.

При $\alpha = \beta = 1$ функція $T_n(1, 1, x)$ отличается отъ Лежандровой функціи только постояннымъ множителемъ, поэтому изъ предыдущихъ формулъ прямо получаются аналогичныя формулы для Лежандровыхъ функцій, данныя Г. Stieltjes.

Выраженіе функціи $T_n(\alpha, \beta, x)$ по формулѣ (1) сохраняетъ смыслъ и при $\alpha = \beta = 0$; функція $T_n(0, 0, x) = T_n\left(0, 0, \frac{1+x}{2}\right)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + n(n-1)y = 0 \quad (14)$$

и, какъ видно изъ предыдущаго, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій n-ой степени отъ x, корни которыхъ вещественны и не выходятъ изъ предѣловъ -1 и $+1$, функція $T_n(0, 0, x)$ имѣетъ наибольшій дискриминантъ. Значеніе этого дискриминанта Δ_1 получаемъ по формулѣ (11), умножая на $2^{n(n-1)}$ и полагая $\alpha = \beta = 0$, что даетъ

$$\Delta_1 = \frac{2^{n(n-1)}.1.2^2\ldots n^n[1.2^2\ldots(n-1)^{n-1}]^2}{(n-1)^{n-1}n^n\ldots(2n-2)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{1.2^2\ldots n^n.1.2^2\ldots(n-2)^{n-2}.1^2.2^4.3^6\ldots(n-1)^{2n-2}.2^{n(n-1)}}{1.2^2\ldots(n-2)^{n-2}(n-1)^{n-1}\ldots(2n-2)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{1.2^2\ldots n^n.1.2^2\ldots(n-2)^{n-2}}{1.3^3.5^5\ldots(2n-3)^{2n-3}}.$$

Функція $T_n\,(0, 0, x)$ отличается только постояннымъ множителемъ отъ функціи U_n, опредѣляемой равенствомъ

$$\sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n z^n. \qquad (15)$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство это при $x = \pm 1$ обращается въ $1 \pm z = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n z^n$, откуда видимъ, что при $n \geq 2$, $U_n(+1) = 0$, $U_n(-1) = 0$.

Дифференцируя (15) по x, находимъ

$$\frac{-1}{\sqrt{1-2xz-z^2}} = \sum U'_n\, z^{n-1},$$

откуда, обозначая Лежандрову функцію n-ой степени черезъ X_n, имѣемъ:

$$U'_n = -X_{n-1}$$

и слѣдовательно, $U_n = -\int_{-1}^{x} X_{n-1}\, dx.$

Дифференціальное уравненіе для Лежандровыхъ функцій даетъ

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\,X'_{n-1}\Big) = -n(n-1)\,X_{n-1},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)U''_n\Big)=-n(n-1)U'_n$$

и интегрируя отъ -1 до x, находимъ

$$(1-x^2)U''_n+n(n-1)U_n=0,$$

и, въ силу уравненія (14), получаемъ

$$U_n=C.\mathrm{T}_n(0,0,x),\text{ что и тр. док.}$$

Полагая въ $\displaystyle\int_0^1\frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz}{x-z}$

$\alpha=1,\ z=\dfrac{u}{\beta-1},\ x=\dfrac{\xi}{\beta-1}$ и увеличивая затѣмъ β до ∞, получаемъ въ дополненіе къ результатамъ Г. Stieltjes еще слѣдующій.

Знаменатель n-ой подходящей въ разложеніи

$$\int_0^\infty\frac{e^{-u}\,du}{\xi-u}=\cfrac{1}{\xi-1-\cfrac{1^2}{\xi-3-\cfrac{2^2}{\xi-5-\dots\dots}}}$$

есть цѣлая функція $\psi_n(\xi)$ n-ой степени отъ ξ

$$\psi_n(\xi)=\xi^n-n^2\xi^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1.2}\xi^{n-2}-\dots\dots,$$

удовлетворяющая уравненію

$$\xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(1-\xi)\frac{d\psi}{d\xi}+n\psi=0,$$

и обладающая тѣмъ свойствомъ, что выраженіе

$$\xi_1\,\xi_2\ldots\ldots\xi_n\,e^{-(\xi_1+\xi_2+\ldots\ldots+\xi_n)}\,\Pi(\xi_i-\xi_k)^2,$$

гдѣ всѣ $\xi_i > 0$, достигаетъ своего maximum'a, когда перемѣнныя ξ_i дѣлаются равны корнямъ функціи $\psi_n(\xi)$.

Maximum этотъ равенъ

$$1.2^2.3^6\ldots\ldots n^{2n}\,e^{-n^2},$$

а дискриминантъ функціи $\psi_n(\xi)$ равенъ

$$1.2^3.3^5\ldots\ldots n^{2n-1}.$$

Спб. 31 Января
1886 года.

ОПЕЧАТКИ,

ЗАМѢЧЕННЫЯ ВЪ СТАТЬѢ Г. ФЛОРОВА.

Стран.	*Строк.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ:*
144	5 *снизу*	$\xi^{\frac{1}{\beta + r^{\alpha}}}$	$\xi^{\frac{1}{\beta + r\alpha}}$
148	1 *сверху*	$\Gamma\left(1 - n + a + \frac{p+n}{k}\right)$	$\Gamma\left(1 - n + \alpha + \frac{p+n}{k}\right)$
150	1 *снизу*	$+ e^{g^{r-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}}, \ g^r = 1$	$+ e^{g^{\nu-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}}, \ g^\nu = 1$
151	9 *сверху*	$\Gamma\left(\frac{\alpha p + \alpha - i + 1}{\beta}\right)$	$\Gamma\left(\frac{\alpha p + \alpha + i - 1}{\beta}\right)$
152	1 —	$\prod\limits_{i=0}^{\alpha}$	$\prod\limits_{i=1}^{\alpha}$
152	4 —	$az^{\frac{1}{\alpha}} =$	$\alpha z^{\frac{1}{\alpha}} =$