О РАСПРЕДѢЛЕНІИ КОРНЕЙ

НѢКОТОРЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

А. А. Маркова.

Уравненія, о которыхъ идетъ рѣчь въ настоящей замѣткѣ, получаются при разложеніи въ непрерывную дробь слѣдующей функціи

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy - \xi \int_c^\partial \frac{f(y)}{z-y}\,dy. \qquad (1)$$

При этомъ мы предполагаемъ числа a, b, c, ∂ вещественными, а разности $b-a$, $c-b$, $\partial-c$, перемѣнный параметръ ξ и функціи $g(y)$, $f(y)$ положительными (по крайней мѣрѣ для разсматриваемыхъ нами значеній y).

Положимъ вообще

$$\int_a^b y^i g(y)\,dy = \alpha_i, \quad \int_c^\partial y^i f(y)\,dy = \beta_i. \qquad (2)$$

Тогда для опредѣленія знаменателя

$$\varphi_n(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n \qquad (3)$$

n-ой дроби $\dfrac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, подходящей къ $F(z)$, будемъ имѣть систему уравненій первой степени.

$$
\begin{aligned}
&p_0(\alpha_0-\xi\beta_0)+p_1(\alpha_1-\xi\beta_1)+\ldots+p_n(\alpha_n-\xi\beta_n)=0\\
&p_0(\alpha_1-\xi\beta_1)+p_1(\alpha_2-\xi\beta_2)+\ldots+p_n(\alpha_{n+1}-\xi\beta_{n+1})=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&p_0(\alpha_{n-1}-\xi\beta_{n-1})+p_1(\alpha_n-\xi\beta_n)+\ldots+p_n(\alpha_{2n-1}-\xi\beta_{2n-1})=0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

которая, вообще говоря, опредѣляетъ отношенія

$$\frac{p_0}{p_n},\ \frac{p_1}{p_n},\ \frac{p_2}{p_n},\ldots\frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

А именно, эти отношенія выражаются дробями съ однимъ и тѣмъ же знаменателемъ, равнымъ цѣлой функціи n-ой степени относительно ξ

$$
\Phi_n(\xi)=\begin{vmatrix}
\alpha_0-\xi\beta_0, & \alpha_1-\xi\beta_1, & \ldots, & \alpha_{n-1}-\xi\beta_{n-1}\\
\alpha_1-\xi\beta_1, & \alpha_2-\xi\beta_2, & \ldots, & \alpha_n-\xi\beta_n\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\alpha_{n-1}-\xi\beta_{n-1}, & \alpha_n-\xi\beta_n, & \ldots, & \alpha_{2n-2}-\xi\beta_{2n-2}
\end{vmatrix}
\tag{5}
$$

Исключеніе представляютъ только тѣ случаи, когда

$$\Phi_n(\xi)=0.$$

Въ этихъ исключительныхъ случаяхъ можно положить $p_n=0$ и понизить такимъ образомъ степень цѣлой функціи $\varphi_n(z)$ на единицу.

Для нашей цѣли важно замѣтить, что при

$$\Phi_n(\xi)\text{ не }=0$$

всѣ корни уравненія n-ой степени

$$\varphi_n(z) = 0$$

числа конечныя и потому, при безпредѣльномъ возрастаніи одного изъ корней послѣдняго уравненія, ξ приближается къ одному изъ корней уравненія

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

Вопросъ, которому посвящена эта замѣтка, состоитъ въ опредѣленіи числа корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0,$$

лежащихъ соотвѣтственно въ промежуткахъ отъ $-\infty$ до a, отъ a до b, отъ b до c, отъ c до d, отъ d до $+\infty$.

Рѣшеніе этого вопроса заключается въ нижеслѣдующихъ теоремахъ.

Теорема 1.

Всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

вещественны и различны. Изъ нихъ $n-1$ навѣрно лежатъ въ предѣлахъ

отъ a до b и отъ c до d;

въ предѣлахъ же

отъ b до c

ни одного.

Доказательство.

Допустимъ сначала, что

$$\varphi_n(\mathrm{E}) = 0 \text{ при } b \leqq \varepsilon \leqq c.$$

Тогда произведеніе

$$\varphi_n(z)\,\frac{\varphi_n(z)}{z-\varepsilon} = \varphi_n(z)\,\theta(z)$$

число отрицательное при $z<b$ и положительное при $z>c$, и потому

$$\int_a^b g(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy \qquad \text{(A)}$$

не нуль.

Между тѣмъ, согласно уравненіямъ (4), выраженіе (A) должно быть равно нулю.

Мы пришли, такимъ образомъ, къ противорѣчію, которое ясно указываетъ, что между b и c нѣтъ ни одного корня уравненія $\varphi_n(z)=0$.

Положимъ теперь, что между a и d функція $\varphi_n(z)$ мѣняетъ свой знакъ ровно m разъ при

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

и составимъ функцію

$$\theta(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_m)(z-\varepsilon),$$

гдѣ ε произвольное число, лежащее между b и c.

Тогда

$$\int_a^b g(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\varphi_n(y)\theta(y)\,dy \qquad \text{(B)}$$

не нуль.

Между тѣмъ, согласно уравненіямъ (4), выраженіе (B) должно приводиться къ нулю, если только степень функціи $\theta(z)$ меньше n.

Поэтому

$$m+1 \geqq n \text{ и } m > n-1.$$

Такимъ образомъ теорема наша доказана вполнѣ.

Примѣчаніе 1.

При $\xi = 0$ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между a и b, такъ какъ тогда функція $F(z)$ обращается въ

$$\int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy.$$

Напротивъ, при $\xi = \infty$ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между c и ∂, такъ какъ тогда функція $\dfrac{-F(z)}{\xi}$ обращается въ

$$\int_c^\partial \frac{f(y)}{z-y}\,dy^*.$$

Примѣчаніе 2.

При непрерывномъ измѣненіи ξ число корней уравненія $\varphi_n(z) = 0$, лежащихъ въ какомъ нибудь промежуткѣ, остается неизмѣннымъ

---

* См., напр., мое разсужденіе «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ непрерывныхъ дробей» стр. 22.

до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не достигнетъ одного изъ предѣловъ разсматриваемаго промежутка.

Примѣчаніе 3.

При непрерывномъ измѣненіи ξ число корней уравненія $\varphi_n(z)=0$, лежащихъ между a и b, остается неизмѣннымъ до тѣхъ поръ, пока $\varphi_n(a)$ не достигнетъ значенія равнаго нулю.

Въ тѣхъ же случаяхъ, когда $\varphi_n(a)$ переходитъ черезъ нуль, упомянутое выше число можетъ измѣняться; однако всякій разъ не болѣе какъ на единицу.

Что же касается промежутка отъ $z=c$ до $z=\partial$, то число корней уравненія $\varphi_n(z)=0$, лежащихъ въ этомъ промежуткѣ, можетъ измѣняться только при переходѣ $\varphi_n(\partial)$ черезъ нуль и также всякій разъ не болѣе какъ на единицу.

Отсюда непосредственно вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема 2.

При возрастаніи ξ отъ 0 до ∞ всѣ корни уравненія

$$\varphi_n(z)=0$$

послѣдовательно переходятъ

$$\text{черезъ } a, -\infty, +\infty, \partial$$

изъ промежутка (a,b) въ промежутокъ (c,∂).

Поэтому всѣ корни уравненій n-ой степени относительно ξ

$$\varphi_n(a)=0,\ \Phi_n(\xi)=0,\ \varphi_n(\partial)=0$$

вещественны и положительны.

Кромѣ того, если обозначимъ по порядку ихъ величины корни

$$\left.\begin{array}{llll} \text{уравненія} & \varphi_n(a)=0 & \text{черезъ} & \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \text{»} & \Phi_n(\xi)=0 & \text{»} & \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n \\ \text{»} & \varphi_n(\partial)=0 & \text{»} & \xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_n \end{array}\right\} \quad (6)$$

то будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\xi_1 < \xi'_1 < \xi''_1 < \xi_2 < \xi'_2 < \xi''_2 \dots < \xi_n < \xi'_n < \xi''_n. \quad (7)$$

Наконецъ относительно корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

можемъ утверждать, что

при $\xi''_i < \xi < \xi_{i+1}$ $n-i$ изъ нихъ лежатъ между a и b,
а остальные i между c и d;

при $\xi_{i+1} < \xi < \xi'_{i+1}$ $n-i-1$ между a и b,
i » c и d,
одинъ » $-\infty$ и a;

при $\xi'_{i+1} < \xi < \xi''_{i+1}$ $n-i-1$ между a и b,
i » c и d,
одинъ » d и $+\infty$.

Лемма 1.

$$\Phi_{n+1}(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p_0}{p_n}(\alpha_n - \xi\beta_n) + \frac{p_1}{p_n}(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) + \dots \\ \dots + \frac{p_{n-1}}{p_n}(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) + \alpha_{2n} - \xi\beta_{2n} \end{array} \right\} \Phi_n(\xi). \quad (8)$$

Эта формула получается на основаніи теоремы о разложеніи опредѣлителя по элементамъ какого нибудь столбца (въ данномъ случаѣ послѣдняго).

Примѣчаніе.

Полагая для удобства

$$p_n = \Phi_n(\xi),$$

можемъ переписать формулу (8) слѣдующимъ образомъ

$$\Phi_{n+1}(\xi) = \int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,.\,y^n dy - \xi \int_c^\partial f(y)\varphi_n(y)\,.\,y^n dy. \quad (9)$$

Лемма 2.

При $\varphi_n\ (a) = 0$ произведеніе

$$\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi)$$

число отрицательное; напротивъ, при $\varphi_n(\partial) = 0$ тоже произведеніе число положительное.

Доказательство.

При $\varphi_n(a) = 0$ выраженіе

$$\frac{\varphi_n(z)\,.\,(z-b)}{z-a}$$

представляетъ цѣлую функцію n-ой степени отъ z.

Коэффиціентъ при высшей степени z въ этой функціи равенъ $\Phi_n(\xi)$.

На этомъ основаніи нетрудно преобразовать равенство (9) въ слѣдующее:

$$\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi) = \int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,\frac{\varphi_n(y)\ \ (y-b)}{y-a}\,dy -$$

$$- \xi \int_c^\partial f(y)\varphi_n(y)\,\frac{\varphi_n(y)\,.\,(y-b)}{y-a}\,dy,$$

первая часть котораго, очевидно, число отрицательное, и потому

$$\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ при $\varphi_n(\partial) = 0$ получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_n(\xi)\,.\,\Phi_{n+1}(\xi) = \int_a^b g(y)\varphi_n(y)\,\dfrac{\varphi_n(y)\,.\,(y-b)}{y-\partial}\,dy - \\[2ex] \qquad - \xi\int_c^\partial f(y)\varphi_n(y)\,\dfrac{\varphi_n(y)\,.\,(y-b)}{y-\partial}\,dy\end{array}\right| > 0.$$

Слѣдствіе.

Всѣ корни уравненія

$$\Phi_{n+1}(\xi) = 0$$

расположены, по одному, въ слѣдующихъ $n+1$ промежуткахъ:

$$(0, \xi_1), (\xi''_1, \xi_2), (\xi''_2, \xi_3), \ldots (\xi''_{n-1}, \xi_n), (\xi''_n, \infty).$$

Сопоставляя, наконецъ, послѣднее слѣдствіе съ теоремою 2, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема 3.

Если

$$\xi^0{}_1, \xi^0{}_2, \ldots \xi^0{}_n, \xi^0{}_{n+1}$$

означаютъ всѣ корни уравненія

$$\Phi_{n+1}(\xi) = 0$$

въ возрастающемъ порядкѣ, то при

$$\xi = \xi^0{}_k$$

$n-k+1$ корней уравненія

$$\varphi_n(z) = 0$$

лежатъ между a и b, а остальные $k-1$ между c и ∂.

Примѣчаніе.

При разсмотрѣніи выраженій подобныхъ (1) можно придти между прочимъ къ функціямъ Ламэ*.

Отсюда нетрудно видѣть связь между послѣднею нашею теоремой и дополненною г. Ляпуновымъ теоремой** Клейна на счетъ функцій Ламэ.

---

* *Heine*, «Handbuch der Kugelfunctionen», 1878 (§ 102). — *Сохоцкій*, «Объ опредѣленныхъ интегралахъ....», 1873 (глава III).

** *Klein*, «Ueber Lamé'sche Functionen». (Mathematische Annalen. Band XVIII). — *Ляпуновъ*, «Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости». С.-Петербургъ, 1884 (глава IV).