# НѢКОТОРОЕ ОБОБЩЕНІЕ

## ФОРМУЛЫ ЛЕЖЕНЬ-ДИРИХЛЕ

## ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ ЭЛЛИПСОИДА НА ВНУТРЕННЮЮ ТОЧКУ.

*А. М. Ляпунова.*

1. Предметъ этой замѣтки состоитъ въ разысканіи особеннаго выраженія для интеграла

$$V = \iiint \frac{F(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

распространеннаго на всѣ вещественныя значенія $\xi$, $\eta$, $\zeta$, удовлетворяющія условію

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2} \leqq 1,$$

въ предположеніи, что $x$, $y$, $z$ также удовлетворяютъ условію

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2} \leqq 1,$$

и что функція $F(s)$ вещественной перемѣнной $s$ такова, что можетъ быть найдена функція $F(s+t\sqrt{-1})$, для $t=0$ обращающаяся въ $F(s)$, и притомъ синектическая для всѣхъ значеній комплексной перемѣнной $s+t\sqrt{-1}$, модули которыхъ не превосходятъ $k$, причемъ $k$ должно быть болѣе $2A$, если $A$ есть наибольшая изъ величинъ $A$, $B$, $C$.

Полагая

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}=r$$

и называя черезъ $d\tau$ элементъ объема эллипсоида

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1,$$

мы найдемъ

$$V=\int\frac{F(r)}{r}\,d\tau\,, \qquad (1)$$

гдѣ интегралъ распространенъ на весь объемъ этого эллипсоида.

$V$ будетъ, слѣдовательно, представлять потенціальную функцію разсматриваемаго эллипсоида на внутреннюю точку для притяженія, законъ котораго въ функціи разстоянія выражается формулой

$$\frac{F(r)}{r^2}-\frac{F'(r)}{r}.$$

Выраженіе, которое мы предполагаемъ найдти для нея, будетъ заключать въ себѣ, какъ частный случай, извѣстное выраженіе Дирихле, получаемое при $F(r)=1$.

Въ силу сдѣланнаго предположенія относительно функціи $F(r)$, на основаніи извѣстной теоремы получимъ:

$$F(r)=\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\ldots, \qquad (2)$$

гдѣ $\alpha_0$, $\alpha_1$ и т. д. не зависятъ отъ $r$, и это разложеніе функціи $F(r)$ будетъ справедливо для всѣхъ значеній $r$, встрѣчающихся въ подъинтегральной функціи выраженія (1).

Такимъ образомъ мы найдемъ:

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n U_n , \qquad (3)$$

гдѣ

$$U_n = \int r^{n-1} d\tau.$$

Вопросъ приводится, слѣдовательно, къ разысканію выраженія для $U_n$.

2. Разысканіе $U_n$ можетъ быть основано на слѣдующихъ теоремахъ:

Теорема 1. $U_n$ есть функція отъ $x$, $y$, $z$, $A$, $B$, $C$ и цѣлаго положительнаго (или равнаго нулю) числа $n$, удовлетворяющая условіямъ:

1) $U_n$ удовлетворяетъ четыремъ слѣдующимъ уравненіямъ съ частными производными и въ конечныхъ разностяхъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial x^2} &= (n+1)\left(x\frac{\partial U_n}{\partial x} + A\frac{\partial U_n}{\partial A}\right),\\
\frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial y^2} &= (n+1)\left(y\frac{\partial U_n}{\partial y} + B\frac{\partial U_n}{\partial B}\right),\\
\frac{\partial^2 U_{n+2}}{\partial z^2} &= (n+1)\left(z\frac{\partial U_n}{\partial z} + C\frac{\partial U_n}{\partial C}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$U^0{}_{n+2} = \frac{1}{n+4}\left\{A^3\frac{\partial U_n{}^0}{\partial A} + B^3\frac{\partial U_n{}^0}{\partial B} + C^3\frac{\partial U_n{}^0}{\partial C}\right\}, \qquad (5)$$

гдѣ $U_n{}^0$ есть значеніе $U_n$ при $x = y = z = 0$.

2) $U_n$ есть четная функція отъ $x$, $y$, $z$.

3) Для $n = 0$ и $n = 1$, $U_n$ опредѣляется формулами:

$$U_0 = \pi ABC \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}}{\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}} d\lambda,$$

$$U_1 = \frac{4}{3}\pi ABC.$$

Что функція $U_n$ удовлетворяетъ двумъ послѣднимъ условіямъ, это очевидно. Поэтому остается только показать, что она удовлетворяетъ первому.

Легко видѣть, что

$$A\frac{\partial U_n}{\partial A} = U_n + \int \xi \frac{\partial r^{n-1}}{\partial \xi} d\tau = U_n - \frac{\partial}{\partial x}\int \xi r^{n-1}\, d\tau,$$

а съ другой стороны, нетрудно убѣдиться, что

$$\int \xi r^{n-1}\, d\tau = xU_n - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\int r^{n+1}\, d\tau,$$

откуда и получается первое изъ уравненій (4).

Далѣе, замѣчая, что выраженіе для $U_n{}^0$ можетъ быть приведено къ виду:

$$U_n{}^0 = \frac{2}{n+2}\int_0^\pi\int_0^\pi p^{-\frac{n+2}{2}} \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

гдѣ

$$p = \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{A^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{B^2} + \frac{\cos^2\theta}{C^2},$$

мы легко убѣждаемся въ справедливости уравненія (5).

Теорема 2. Условія 1), 2) и 3) вполнѣ опредѣляютъ функцію $U_n$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $V_n$ удовлетворяетъ условіямъ 1), 2) и 3). Въ такомъ случаѣ функція $W_n = U_n - V_n$ будетъ удовлетворять условіямъ 1) и 2), а для $n=0$ и $n=1$ будетъ приводиться къ нулю. Но если для какого-либо значенія $n$, $W_n = 0$, то въ силу (4)

$$\frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial x^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 W_{n+2}}{\partial z^2} = 0\,,$$

и слѣд.

$$W_{n+2} = axyz + a_1 yz + b_1 zx + c_1 xy + a_2 x + b_2 y + c_2 z + a_3\,,$$

гдѣ $a$, $a_1$, $b_1$ и т. д. не зависятъ отъ $x$, $y$, $z$. Въ силу же условія 2) и уравненія (5) всѣ эти постоянныя $a$, $a_1$, $b_1$ и т. д. должны быть нулями. Такимъ образомъ оказывается, что и $W_{n+2} = 0$.

*Примѣчаніе.* Если положимъ

$$(n+1)\left(x\frac{\partial U_n}{\partial x} + A\frac{\partial U_n}{\partial A}\right) = f_n(x, y, z)\,,$$

$$(n+1)\left(y\frac{\partial U_n}{\partial y} + B\frac{\partial U_n}{\partial B}\right) = \varphi_n(x, y, z)\,,$$

$$(n+1)\left(z\frac{\partial U_n}{\partial z} + C\frac{\partial U_n}{\partial C}\right) = \psi_n(x, y, z)\,,$$

то для вычисленія $U_{n+2}$ по найденному $U_n$ получимъ изъ уравненій (4) слѣдующую формулу

$$U_{n+2} = U^0{}_{n+2} + \int_0^x (x-u) f_n(u, y, z)\,du + \int_0^y (y-v)\,\varphi_n(o, v, z)\,dv +$$

$$+ \int_0^w (z-w)\,\psi_n(o, o, w)\,dw.$$

По этой формулѣ наприм. найдемъ:

$$U_2=\frac{\pi}{4}ABC\int_0^\infty\left\{1+\frac{A^2}{A^2+\lambda}+\frac{B^2}{B^2+\lambda}+\frac{C^2}{C^2+\lambda}-\Big(H(\lambda)\Big)^2\right\}\frac{\lambda d\lambda}{D(\lambda)},$$

гдѣ положено

$$\left.\begin{aligned} H(\lambda)&=1-\frac{x^2}{A^2+\lambda}-\frac{y^2}{B^2+\lambda}-\frac{z^2}{C^2+\lambda},\\ D(\lambda)&=\sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

3. Разумѣя подъ $\lambda$ комплексную перемѣнную, проведемъ въ плоскости, служащей для ея изображенія, какую-либо замкнутую кривую, не имѣющую кратныхъ точекъ, и пересѣкающую вещественную ось только въ двухъ точкахъ: $M$, для которой $\lambda > 0$, и $N$, для которой $\lambda < -A^2$. Направленіе движенія по этой кривой мы будемъ считать положительнымъ, когда движущаяся точка, переходя изъ $M$ въ $N$, пересѣкаетъ положительную часть мнимой оси.

Разсматривая какую-либо функцію $f(\lambda)$, мы будемъ подъ интеграломъ

$$\int_0 f(\lambda)\,d\lambda$$

разумѣть интегралъ, взятый по слѣдующему замкнутому контуру: интегрированіе начинается отъ точки $\lambda=0$, ведется по вещественной оси до точки $M$, затѣмъ продолжается по упомянутой кривой въ положительномъ направленіи и, по возвращеніи въ точку $M$, ведется по вещественной оси до точки $\lambda=0$.

При этомъ условіи могутъ быть доказаны слѣдующія теоремы:

Теорема 3. Выраженія для $U_0$ и $U_1$ могутъ быть приведены къ виду:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{\pi}{2} ABC \int_0 \frac{H(\lambda)\, d\lambda}{D(\lambda)}, \\ U_1 &= -\frac{2}{3} ABCi \int_0 \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{H(\lambda)})^3\, d\lambda}{D(\lambda)}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

гдѣ функціи $D(\lambda)$ и $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ въ началѣ интегрированія должны быть положительными.

Здѣсь $D(\lambda)$ и $H(\lambda)$ суть функціи, опредѣляемыя формулами (6), и $i = \sqrt{-1}$.

Для доказательства мы замѣчаемъ, что всѣ особенныя точки функцій

$$D(\lambda) \text{ и } \frac{\sqrt{\lambda H(\lambda)}}{D(\lambda)},$$

за исключеніемъ точки $\lambda = 0$, лежатъ на отрицательной части вещественной оси внутри контура, по которому производится интегрированіе. При томъ первая изъ этихъ функцій имѣетъ три точки развѣтвленія, а вторая вмѣстѣ съ точкой $\lambda = 0$ четыре.

Отсюда слѣдуетъ: 1) что въ первомъ изъ интеграловъ (7) подъинтегральная функція при возвращеніи въ точку $M$ получаетъ отрицательное значеніе, а во второмъ — положительное, и 2) что, не измѣняя значеній этихъ интеграловъ, можно предположить, что всѣ точки кривой $MN$ безпредѣльно удаляются отъ точки $\lambda = 0$.

Замѣчая поэтому, что интегралы

$$\int \frac{H(\lambda)\, d\lambda}{D(\lambda)} \text{ и } \int \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{H(\lambda)})^3\, d\lambda}{D(\lambda)},$$

взятые по кривой $MN$, при этомъ возрастаніи ея приближаются соотвѣтственно къ значеніямъ 0 и $2\pi i$, мы и убѣждаемся въ справедливости формулъ (7).

Теорема 4. Общее выраженіе $U_n$ опредѣляется формулой

$$U_n = G_n ABC \int_0 \frac{H(\lambda)(\sqrt{\lambda H(\lambda)})^n d\lambda}{D(\lambda)}, \qquad (8)$$

гдѣ

$$G_n = \frac{(-i)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(n+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 2(-i)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi, \qquad (9)$$

и гдѣ интегрированіе подчинено тому-же условію, какъ и въ формулахъ (7).

Въ самомъ дѣлѣ, это выраженіе $U_n$, очевидно, удовлетворяетъ условіямъ 2) и 3), и нетрудно убѣдиться, что оно удовлетворяетъ также и условію 1).

Для облегченія дифференцированій, которыя для этого необходимо произвести, можно ввести новыя перемѣнныя, полагая

$$\frac{1}{A^2} = a, \; \frac{1}{B^2} = b, \; \frac{1}{C^2} = c, \; \frac{x}{A} = \xi, \; \frac{y}{B} = \eta, \; \frac{z}{C} = \zeta,$$

вслѣдствіе чего уравненія (4) и (5) обратятся въ

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} = -2(n+1)\frac{\partial U_n}{\partial a},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} = -2(n+1)\frac{\partial U_n}{\partial b},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \zeta^2} = -2(n+1)\frac{\partial U_n}{\partial c},$$

$$\frac{\partial U_n^0}{\partial a} + \frac{\partial U_n^0}{\partial b} + \frac{\partial U_n^0}{\partial c} = -\frac{n+4}{2} U^0_{n+2},$$

а формула (8) приметъ видъ:

$$U_n = G_n \int_0 \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{\xi^2}{1+a\lambda}-\frac{\eta^2}{1+b\lambda}-\frac{\zeta^2}{1+c\lambda}\right)^{\frac{n+2}{2}} d\lambda}{\sqrt{(1+a\lambda)(1+b\lambda)(1+c\lambda)}}.$$

*Примѣчаніе.* Въ случаѣ нечетнаго $n$ путь интегрированія въ выраженіи (8) можетъ состоять изъ одной только замкнутой кривой $MN$.

**4.** По формулѣ (**3**) мы можемъ теперь найдти выраженіе для $V$ подъ видомъ ряда. Но для того, чтобы этотъ рядъ можно было просуммировать, пользуясь формулой (2), необходимо, чтобы для всѣхъ точекъ кривой $MN$, входящей въ составъ пути интегрированія въ выраженіи (8), было удовлетворено условіе

$$\operatorname{mod} \sqrt{\lambda H(\lambda)} < k.$$

Разыскивать предѣльныя положенія кривой $MN$, удовлетворяющей этому условію, мы не будемъ, а обратимъ вниманіе только на слѣдующую теорему:

Теорема 5. Если $\lambda$ есть комплексная перемѣнная *постояннаго* модуля $R$, превосходящаго $A^2$, то для того, чтобы модули функціи $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ не превосходили $k$, необходимо и достаточно, чтобы $R$ удовлетворялъ условію:

$$\frac{k^2-k\sqrt{k^2-4A^2}}{2} < R < \frac{k^2+k\sqrt{k^2-4A^2}}{2}. \qquad (10)$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\lambda = Re^{\varphi i},$$

найдемъ:

$$\operatorname{mod} H(\lambda) \leqslant 1 + \frac{x^2}{\sqrt{A^4 + 2A^2 R\cos\varphi + R^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{B^4 + 2B^2 R\cos\varphi + R^2}} + \\ + \frac{z^2}{\sqrt{C^4 + 2C^2 R\cos\varphi + R^2}}.$$

Но при условіи $R > A^2$ наибольшая величина второй части неравенства для разсматриваемыхъ значеній $x$, $y$, $z$ будетъ

$$1 + \frac{A^2}{\sqrt{A^4 + 2A^2 R\cos\varphi + R^2}},$$

а потому мы найдемъ

$$\operatorname{mod} H(\lambda) \leqslant 1 + \frac{A^2}{R - A^2},$$

и слѣдовательно

$$\operatorname{mod} \sqrt{\lambda H(\lambda)} \leqslant \frac{R}{\sqrt{R - A^2}},$$

а отсюда уже нетрудно заключить о справедливости теоремы.

Если кривая $MN$, входящая въ составъ пути интегрированія, удовлетворяетъ упомянутому условію, то для $V$ получится слѣдующее выраженіе:

$$V = 2ABC \int_0 \frac{H(\lambda)\,d\lambda}{D(\lambda)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi. \qquad (11)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему результату.

Теорема 6. Если $A$ есть наибольшая изъ полу-осей эллипсоида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

и если $F(s + ti)$ есть синектическая функція внутри круга радіуса $k > 2A$, то для потенціальной функціи

$$V=\int\frac{F(r)}{r}d\tau$$

этого эллипсоида на внутреннюю точку будетъ справедливо выраженіе (11), въ которомъ интегрированіе по $\lambda$ производится по замкнутому контуру: начинаясь въ точкѣ $\lambda=0$, оно ведется по положительному направленію вещественной оси, затѣмъ — въ положительномъ направленіи по всей окружности, описанной изъ точки $\lambda=0$ радіусомъ $R$, удовлетворяющимъ условію (10), и наконецъ — въ отрицательномъ направленіи по вещественной оси до точки $\lambda=0$, причемъ начальныя значенія функцій $D(\lambda)$, $\sqrt{\lambda H(\lambda)}$ должны быть положительны.

*Примѣчаніе 1.* За путь интегрированія въ выраженіи (11) можетъ быть принята всякая замкнутая кривая, проходящая черезъ точку $\lambda=0$, для которой эта точка не есть кратная, для которой во всѣхъ точкахъ $\operatorname{mod}\sqrt{\lambda H(\lambda)}<k$, и которая непрерывнымъ измѣненіемъ, при условіи никогда не проходить черезъ особенныя точки функцій $D(\lambda)$ и $\sqrt{H(\lambda)}$, можетъ быть приведена въ совпаденіе съ контуромъ, опредѣленнымъ въ теоремѣ 6.

*Примѣчаніе 2.* Изъ выраженія (11) для потенціальной функціи можетъ быть найдено слѣдующее выраженіе для проекціи притяженія на ось $x$-овъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-2\,ABCx\int_0\frac{d\lambda}{(A^2+\lambda)\,D(\lambda)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}F\left(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi\right)d\varphi.$$

*Примѣчаніе 3.* Притяженіе эллипсоидомъ внѣшней точки по теоремѣ Айвори можетъ быть найдено, коль скоро извѣстно притяженіе внутренней точки. Но чтобы перейдти къ этому случаю отъ предыдущихъ формулъ, необходимо расширить область синектичности функціи $F(s+ti)$.