ОБЪ УРАВНЕНІИ

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u.$$

П. С. Флорова.

I. Предварительныя замѣчанія.

Замѣчаніе 1. Если черезъ n и k обозначимъ цѣлыя положительныя числа, а черезъ θ функцію, опредѣляемую уравненіемъ

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{ki}{n}\right) = \theta(x) \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma\left(\frac{nx}{k}+\frac{ni}{k}\right),$$

и если измѣнимъ x въ $x+\frac{k}{n}$, то, на основаніи перваго свойства функціи гамма, получимъ

$$\theta\left(x+\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^k \theta(x),$$

и вмѣстѣ съ этимъ будемъ имѣть

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{ki}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^{nx} C_n{}^k \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma\left(\frac{nx}{k}+\frac{ni}{k}\right),$$

гдѣ C не зависитъ отъ x. Написавъ здѣсь kx вмѣсто nx и замѣнивъ потомъ n черезъ k, а k черезъ n, увидимъ, что C обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ:

$$C_n{}^k C_k{}^n = 1.$$

Если же измѣнимъ n въ $2n$ и k въ $2k$, то найдемъ:

$$C_{2n}{}^{2k} = \left(\frac{k}{n}\right)^{nk} (C_n{}^k)^2.$$

Положивъ для рѣшенія этого уравненія

$$C_n{}^k = n^{\alpha n+\beta k+\gamma nk}\, k^{\alpha' n+\beta' k+\gamma' nk} A^n B^k$$

и принявъ во вниманіе отношенія

$$C_n{}^k C_k{}^n = 1\,,\ C'_n = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

получимъ:

$$C_n{}^k = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{nk-n-k}{2}} (2\pi)^{\frac{n-k}{2}}.$$

На основаніи сказаннаго имѣемъ тождественно

$$\prod_{i=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{ki}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^{nx+\frac{nk-n-k}{2}} (2\pi)^{\frac{n-k}{2}} \prod_{i=0}^{k-1}\Gamma\left(\frac{nx}{k}+\frac{ni}{k}\right).$$

Замѣчаніе 2. Если α и β цѣлыя положительныя числа и если

$$\alpha = \nu n,\ \beta = \nu k,$$

гдѣ ν одинъ изъ общихъ дѣлителей между α и β, то отношеніе

$$\left(x^{\alpha-\frac{\alpha}{\beta}} D_x{}^\alpha\right)^k u = \left(z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^\beta\right)^n u\,,$$

$$k^\nu x^{\frac{1}{k}} = n^\nu z^{\frac{1}{n}}$$

тождественно имѣетъ мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ тождества, доказаннаго въ первомъ замѣчаніи, легко убѣдиться, что подстановка

$$u = x^m$$

удовлетворяетъ предыдущему отношенію при всякомъ m. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе, о которомъ идетъ рѣчь, имѣетъ болѣе νnk интеграловъ и потому есть тождество.

Такимъ же образомъ доказывается тождество

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha} z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u = z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha} u,$$

$$rx^{\frac{1}{k}} = sz^{\frac{1}{n}},$$

гдѣ r и s какія угодно числа.

Замѣчаніе 3. Пусть n, k и r будутъ цѣлыя положительныя числа, а m какое угодно не равное k. Покажемъ, что однократное дифференцированіе по x обѣихъ частей равенства

$$D_x^{r}\left(x^m D_x^{k}\right)^n u = \left(k - m\right)^{kn+r} z^{\mu_r}\left(z^p D_z^{n}\right)^{k-r}\left(z^{p+1} D_z^{n+1}\right)^r u,$$

въ которомъ для краткости положено

$$z = x^{k-m},\ (n-p)(k-m) = 1,\ \mu_r + n = (k-r)(n-p),$$

и измѣненіе r въ $r+1$ приводятъ къ одному и тому же результату. Дѣйствительно, сравнивая выраженія, полученныя указаннымъ путемъ, и полагая

$$(z^{p+1} D_z^{n+1})^r u = v,\ k - r = \varrho,$$

находимъ

$$Dz^{\mu_{k-\varrho}}\left(z^p D^n\right)^{\varrho} v = z^{\mu_{k-\varrho} - 1}\left(z^p D^n\right)^{\varrho} D^{-n} z D^{n+1} v,$$

гдѣ всѣ дифференцированія производятся по z. Предыдущее равенство, какъ въ этомъ легко убѣдиться посредствомъ отношенія

$$\left(z^p D^n\right)^\rho v = \sum_{i=0}^{n(\rho-1)} A_i^\rho \, z^{p\rho - i} D^{n\rho - i} v,$$

въ которомъ A не зависитъ отъ z, тождественно имѣетъ мѣсто. Отсюда слѣдуетъ, что k-кратное дифференцированіе по x обѣихъ частей отношенія

$$\left(x^m D_x{}^k\right)^n u = (k-m)^{kn} z^{-n+\frac{k}{k-m}} \left(z^{n-\frac{1}{k-m}} D_z{}^n\right)^k u$$

приводитъ къ отношенію

$$\left(x^m D_x{}^k\right)^{n+1} u =$$

$$= (k-m)^{k(n+1)} z^{-1-n+\frac{k}{k-m}} \left(z^{1+n-\frac{1}{k-m}} D_z{}^{n+1}\right)^k u.$$

Но первое изъ этихъ отношеній при $n=1$ обращается въ тождество; поэтому оно тождественно имѣетъ мѣсто при всякомъ n. Доказанное тождество при условіяхъ

$$k - m = r \quad z = 1 + r\xi$$

принимаетъ видъ

$$\left(x^{k-r} D_x{}^k\right)^n u = (1+r\xi)^{-k+\frac{k}{r}} \left((1+r\xi)^{n-\frac{1}{r}} D_\xi{}^n\right)^k u.$$

Положивъ здѣсь $r=0$, получимъ:

$$(x^k D_x{}^k)^n u = e^{k\xi} (e^{-\xi} D_\xi{}^n)^k u, \quad \xi = \lg x.$$

Это тождество показываетъ, что всякій интегралъ уравненія

$$D_\xi{}^n u = e^\xi u, \quad \xi = \lg x$$

удовлетворяетъ уравненію

$$(x^k D_x{}^k)^n u = x^k u.$$

Замѣчаніе 4. Если p и q положительныя или отрицательныя цѣлыя числа, то дѣйственные множители вида

$$x^p D^p, \quad D^q x^q$$

могутъ быть перемѣщаемы какъ угодно въ произведеніи, составленномъ изъ множителей того же вида. Эта мысль сама собою вытекаетъ изъ тождествъ:

$$x^p D^p . x^q D^q \omega(x) = x^q D^q . x^p D^p \omega(x),$$

$$D^p x^p . D^q x^q \vartheta(x) = D^q x^q . D^p x^p \vartheta(x),$$

$$D^p x^p . x^q D^q \varphi(x) = x^q D^q . D^p x^p \varphi(x),$$

доказанныхъ В. П. Алексѣевскимъ въ третьей книжкѣ «Сообщеній» за 1884 годъ. Мы изложимъ здѣсь свои соображенія по поводу тѣхъ-же тождествъ.

Первый случай. Пусть p и q одновременно отрицательны. Если p замѣнимъ черезъ $-p$, а q черезъ $-q$, то лѣвая часть отношенія для ω представится въ видѣ

$$\frac{x^{-p}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int (x-\alpha)^{p-1} \alpha^{-q} d\alpha \int (\alpha-\beta)^{q-1} \omega(\beta)\, d\beta,$$

гдѣ β, по совершеніи интегрированія по β, должно быть замѣнено черезъ α, а α, по совершеніи интегрированія по α, черезъ x. Написавъ въ предыдущемъ выраженіи $x\alpha\beta$ вмѣсто β и $x\alpha$ вмѣсто α, найдемъ:

$$\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int (1-\alpha)^{p-1} d\alpha \int (1-\beta)^{q-1} \omega(x\alpha\beta)\, d\beta.$$

Здѣсь α и β нужно положить равными единицѣ, и это можно сдѣлать по совершеніи обоихъ интегрированій. Отсюда слѣдуетъ, что предыдущее выраженіе симметрично относительно p и q и что отношеніе для ω тождественно имѣетъ мѣсто. Подобнымъ же образомъ доказывается тождество для ϑ. Что касается отношенія для φ, то лѣвая часть его по замѣнѣ p черезъ $-p$ и q черезъ $-q$ принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int(1-\alpha)^{p-1}\alpha^{-p}d\alpha\int(1-\beta)^{q-1}\varphi(x\alpha\beta)\,d\beta,$$

гдѣ β и α по совершеніи интегрированій должны быть положены равными единицѣ. И такъ какъ измѣненіе порядка интегрированій сообщаетъ предыдущему выраженію видъ:

$$\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int(1-\alpha)^{q-1}d\alpha\int(1-\beta)^{p-1}\beta^{-p}\varphi(x\alpha\beta)\,d\beta,$$

къ которому приводится правая часть отношенія для φ, то и это отношеніе тождественно имѣетъ мѣсто.

Второй случай. Назвавъ ту и другую часть каждаго изъ доказанныхъ тождествъ соотвѣтственно черезъ u, v, w и исключивъ изъ полученныхъ равенствъ ω, ϑ, φ, увидимъ, что тождества, о которыхъ идетъ рѣчь, имѣютъ мѣсто и для положительныхъ p и q.

Третій случай. Если сдѣлаемъ положенія:

$$x^p D^p \omega = u,\ x^q D^q \varphi = v,\ D^p x^p \varphi = w,$$

то получимъ такія тождества относительно u, v, w, которыя покажутъ намъ, что разсматриваемыя тождества имѣютъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда p положительно, а q отрицательно, или наоборотъ.

Всѣ видятъ, что идея изложеннаго доказательства заимствована у А. В. Лѣтникова.

II. Свойства уравненія $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$.

Опредѣленіе. Пусть α и β будутъ цѣлыя положительныя числа, имѣющія ν общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, и пусть

$$\alpha = \nu n, \quad \beta = \nu k.$$

Число α мы будемъ называть порядкомъ, а число β характеристикой уравненія

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = x^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta}} u.$$

Предложеніе 1. *Порядокъ можно сдѣлать характеристикой и одновременно характеристику порядкомъ.*

Тождество

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x{}^\alpha z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^\beta u = z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^\beta x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x{}^\alpha u,$$

$$k^\nu x^{\frac{1}{k}} = n^\nu z^{\frac{1}{n}}$$

показываетъ, что если u частный интегралъ уравненія

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x{}^\alpha u = u \qquad (\alpha)$$

не удовлетворяетъ уравненію

$$z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^\beta v = v, \qquad (\beta)$$

то посредствомъ формулы

$$z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z{}^\beta u = u_1$$

найдется другой его интегралъ, также не удовлетворяющій уравненію (β), какъ въ этомъ легко убѣдиться, принявъ во вниманіе тождество

$$\left(x^{\alpha-\frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha}\right)^k u = \left(z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta}\right)^n u.$$

Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ n интеграловъ уравненія (α), связанныхъ между собою отношеніями

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u = u_1,$$

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u_1 = u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} u_{n-1} = u,$$

и не удовлетворяющихъ уравненію (β).

Если сдѣлаемъ положеніе

$$U = u + u_1 + \ldots + u_{n-1},$$

то получимъ

$$x^{\alpha-\frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha} U = U,$$

$$z^{\beta-\frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} U = U.$$

Произведя здѣсь замѣну $x^{\frac{1}{k}}$ черезъ $\lambda^r x^{\frac{1}{k}}$ равносильную замѣнѣ $z^{\frac{1}{n}}$ черезъ $\lambda^r z^{\frac{1}{n}}$, гдѣ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$, а r одно изъ чиселъ ряда $1, 2, \ldots n-1$, и обозначивъ черезъ U_r ту функцію, въ которую обращается U послѣ этой замѣны, найдемъ

$$x^{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} D_x^{\alpha} U_r = U_r ,$$

$$z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta} U_r = \lambda^{rk} U_r .$$

Покажемъ теперь, что ни одна функція ряда

$$U, \ U_1, \ldots\ldots U_{n-1}$$

не выражается линейно въ другихъ. Дѣйствительно, если-бы мы допустили

$$CU + C_1 U_1 + \ldots + C_{n-1} U_{n-1} = 0,$$

то посредствомъ формулы

$$\left(z^{\beta - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\beta}\right)^i U_r = \lambda^{irk} U_r$$

для опредѣленія неизвѣстныхъ отношеній

$$\frac{C_1}{C}, \frac{C_2}{C}, \ldots\ldots \frac{C_{n-1}}{C}$$

получили бы n уравненій вида

$$CU + \lambda^{ik} C_1 U_1 + \ldots\ldots + \lambda^{(n-1)ik} C_{n-1} U_{n-1} = 0,$$

гдѣ i измѣняется отъ 0 до $n-1$. Детерминантъ этой системы уравненій долженъ быть нулемъ.

Поэтому, опустивъ множитель

$$U U_1 \ldots\ldots U_{n-1}$$

не равный нулю и положивъ $\lambda^{\rho k} = \delta_\rho$, получимъ:

$$\begin{vmatrix} 1, & \delta_0, & \delta_0^2 & \ldots & \delta_0^{n-1} \\ 1, & \delta_1, & \delta_1^2 & \ldots & \delta_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \delta_{n-1}, & \delta^2_{n-1} & \ldots & \delta_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Лѣвая часть этого равенства, равная произведенію множителей вида

$$(\delta_\varrho - \delta_0)(\delta_\varrho - \delta_1) \ldots\ldots (\delta_\varrho - \delta_{\varrho-1}),$$

гдѣ ϱ измѣняется отъ единицы до $n-1$, не можетъ быть нулемъ. Поэтому равенство, о которомъ идетъ рѣчь, нелѣпо, и допущеніе, изъ котораго оно выведено, несостоятельно. Допущеніе

$$CU + C_1 U_1 + \ldots\ldots + C_\varrho U_\varrho = 0,$$

гдѣ $\varrho < n-1$, и подавно не можетъ имѣть мѣста.

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$U, U_1, \ldots\ldots U_{n-1}$$

представляетъ n различныхъ между собою интеграловъ уравненія (α).

Подобнымъ же образомъ рядъ

$$V, V_1, \ldots\ldots V_{k-1},$$

въ которомъ V_i выведено изъ U посредствомъ замѣны $k^\nu x^{\frac{1}{k}}$ черезъ $\mu^i n^\nu z^{\frac{1}{n}}$, гдѣ μ первообразный корень уравненія $\mu^k = 1$, представляетъ k различныхъ между собою интеграловъ уравненія (β).

Очевидно, что зависимость между U_r и V_i выражается отношенiемъ

$$(k^\beta x)^n = (n^\alpha z)^k.$$

До сего времени мы разсматривали лишь одну группу интеграловъ уравненiя (α), состоящую изъ n интеграловъ; но число такихъ группъ есть ν и по отношенiю къ каждой изъ нихъ изложенныя разсужденiя имѣютъ мѣсто. Поэтому уравненiе (α) имѣетъ α такихъ интеграловъ, которые съ β интегралами уравненiя (β) связаны отношенiемъ:

$$(k^\beta x)^n = (n^\alpha z)^k;$$

это и нужно было доказать.

Примѣчанiе. Если-бы мы допустили

$$u = U + U_1 + \ldots.. + U_{n-1},$$

то безъ труда получили бы

$$u_r = U + \lambda^{rk} U_1 + \ldots + \lambda^{(n-1)rk} U_{n-1},$$

гдѣ r измѣняется отъ единицы до n. Легко убѣдиться послѣ этого, что ни одна функцiя ряда

$$u, u_1, \ldots.. u_{n-1}$$

не выражается линейно въ другихъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ

$$u_r = CU + C_1 U_1 + \ldots.. + C_{n-1} U_{n-1},$$

получимъ для опредѣленiя неизвѣстныхъ постоянныхъ

$$C, C_1, \ldots.. C_{n-1}$$

n уравненiй вида

$$u_{r+\varrho} = CU + \lambda^{\varrho k} C_1 U_1 + \ldots\ldots + \lambda^{(n-1)\varrho k} C_{n-1} U_{n-1},$$

гдѣ ϱ измѣняется отъ 0 до $n-1$. И такъ какъ линейныя уравненія имѣютъ единственныя рѣшенія, то непремѣнно

$$C_i = \lambda^{irk}.$$

Этимъ и подтверждается мысль о различіи интеграловъ

$$u,\ u_1, \ldots\ldots u_{n-1}.$$

Предложеніе 2. *Характеристику можно и увеличить и уменьшить на число кратное порядку.*

Если посредствомъ обозначенія

$$x^{p_1} D^{q_1} x^{p_2} D^{q_2} \ldots x^{p_n} D^{q_n} u = \prod_{i=1}^{n} \left(x^{p_i} D^{q_i} \right) u$$

распространимъ знакъ произведенія на дѣйственные множители, то уравненіе

$$z^{\alpha c - c} D_z^{\alpha c} u = u$$

можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\prod_{i=1}^{\alpha} \left(z^{(i-1)c} D_z^{ic} \right) u = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{(i-1)c} D_z^{ic} \right) u.$$

Назвавъ черезъ ω каждую часть этого уравненія, получимъ

$$(z^c D_z^c)^\alpha \omega = z^c \omega.$$

Отсюда слѣдуетъ, что исходное уравненіе удовлетворяется допущеніемъ:

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1}\left(z^{(i-1)c} D_z^{ic}\right) u,$$

гдѣ подъ ω можно разумѣть интегралъ уравненія

$$D_\zeta^\alpha \omega = e^\zeta \omega, \quad \zeta = \lg z.$$

Подобнымъ же образомъ, если v удовлетворяетъ уравненію

$$z^{\alpha c' - c'} D_z^{\alpha c'} v = v,$$

то непремѣнно

$$\omega = \prod_{i=1}^{\alpha-1}\left(z^{(i-1)c'} D_z^{ic'}\right) v.$$

На основаніи сказаннаго находимъ слѣдующую зависимость между u и v:

$$u = z^{(\alpha-1)c} \prod_{i=1}^{\alpha-1}\left(z^{i(c'-c)-c'} D_z^{i(c'-c)}\right) v.$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что связь между интегралами уравненій

$$x^{\alpha - \frac{1}{c}} D_x^\alpha u = u.$$

и

$$\xi^{\alpha - \frac{1}{c+r}} D_\xi^\alpha v = v$$

выражается формулами:

$$u = z^{(\alpha-1)c} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{(i-1)r-c} D_z^{\,ir} \right) v,$$

$$x = c^{-\alpha c} z^c, \quad \xi = (c+r)^{-\alpha(c+r)} z^{c+r},$$

гдѣ r положительное или отрицательное цѣлое число. И такъ какъ въ предыдущія формулы начертаніе c входитъ лишь въ качествѣ показателя степени независимаго перемѣннаго, то формулы эти имѣютъ мѣсто независимо отъ того, будетъ ли c цѣлымъ числомъ или какимъ угодно.

Поэтому, положивъ $\alpha c = \beta$, увидимъ, что интегралы уравненій

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = x^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta}} u$$

и

$$\frac{d^\alpha v}{d\xi^\alpha} = \xi^{-\alpha + \frac{\alpha}{\beta + r\alpha}} v$$

связаны между собою отношеніями

$$u = z^{\frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha}} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{(i-1)r - \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\,ir} \right) v,$$

$$\beta x^{\frac{1}{\beta}} = \alpha z^{\frac{1}{\alpha}} = (\beta + r\alpha)\, \xi^{\frac{1}{\beta + r\alpha}},$$

что и нужно было доказать.

Примѣчаніе. Зависимость между интегралами предыдущихъ уравненій можно выразить еще слѣдующею формулой:

$$u = \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(z^{-(i-1)r + \frac{\beta}{\alpha}} D_z^{\,-ir} \right) z^{\frac{(\alpha-1)(\beta+\alpha r)}{\alpha}} v.$$

Предложеніе 3. *Порядокъ и характеристику можно сдѣлать одновременно равными общему наибольшему дѣлителю между ними.*

Пусть α и β будутъ данные порядокъ и характеристика и пусть разложеніе отношенія β къ α въ непрерывную дробь будетъ

$$\frac{\beta}{\alpha}=a+\frac{1}{a_1}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{a_{r-1}+\frac{1}{1}}.$$

Уменьшивъ характеристику на число $a\alpha$ и сдѣлавъ ее порядкомъ, мы отъ даннаго уравненія перейдемъ къ такому, котораго порядокъ α_1 и характеристика β_1 опредѣляются равенствами:

$$\alpha_1=\beta-a\alpha,\ \ \beta_1=\alpha.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\alpha_2=\beta_1-a_1\alpha_1,\ \ \beta_2=\alpha_1,$$

и вообще будемъ имѣть:

$$\alpha_{i+1}=\beta_i-a_i\alpha_i,\ \ \beta_{i+1}=\alpha_i.$$

Эти равенства показываютъ, что общій наибольшій дѣлитель между числами α_i и β_i не зависитъ отъ i. Поэтому, назвавъ его черезъ ν, найдемъ:

$$\alpha_r=p\nu,\ \ \beta_r=q\nu,$$

гдѣ p и q первыя между собою.

Кромѣ того изъ отношенія

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i}=a_i+\frac{1}{a_{i+1}}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{a_{r-1}+\frac{1}{1}}$$

легко получить $\alpha_r = \beta_r$. Отсюда слѣдуетъ, что $p = q = 1$ и что $\alpha_r = \beta_r = \nu$. Такимъ образомъ отъ уравненія (α) можно перейти къ уравненію

$$\frac{d^\nu v}{d\xi^\nu} = \xi^{-\nu+1} v,$$

знаніе всѣхъ интеграловъ котораго вполнѣ достаточно для опредѣленія полнаго интеграла уравненія (α). Это и нужно было доказать.

Предложение 4. *Знакъ характеристики можно измѣнить на обратный.*

Если въ уравненіи (α) вмѣсто x за перемѣнное независимое возьмемъ z, опредѣляемое равенствомъ

$$xz = (-1)^\beta,$$

и если положимъ

$$v = z^{\alpha-1} u,$$

то найдемъ

$$\frac{d^\alpha v}{dz^\alpha} = z^{-\alpha - \frac{\alpha}{\beta}} v.$$

Это и нужно было доказать.

Слѣдствіе. Уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n \pm \frac{n}{k}} u$$

интегрируется конечною формой всякій разъ, когда дробь $\frac{n}{k}$ не сократима.

Примѣры. Изложенный анализъ показываетъ, что интегралы уравненій:

$$\frac{d^{kr+1}u}{dx^{kr+1}} = x^{(1-k)\left(r+\frac{1}{k}\right)}u,$$

$$\frac{d^k u}{dz^k} = z^{-\frac{k^2 r}{kr+1}}u$$

выражаются отношеніями:

$$u = \prod_{i=1}^{k-1}\left(x^{ir+\frac{1}{k}} D_x^{ir}\right) D_x e^{kx^{\frac{1}{k}}},$$

$$kx^{\frac{1}{k}} = (kr+1)\, z^{\frac{1}{kr+1}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^2u}{dz^2} = z^{-2+\frac{2}{3}}u$$

отношеніемъ:

$$u = \left(3z^{\frac{1}{3}} - 1\right)e^{3z^{\frac{1}{3}}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^3u}{dx^3} = x^{-3+\frac{3}{2}}u$$

отношеніемъ:

$$u = \left(2x^{\frac{1}{2}} - 1\right)e^{2x^{\frac{1}{2}}}.$$

III. Интегрированіе уравненія (α).

a) Строкой. Одна группа интеграловъ уравненія (α) легко находится интегрированіемъ этого уравненія строкой. Въ самомъ дѣлѣ, если количество A_p удовлетворяетъ условію

$$\Gamma\left(1-n+a+\frac{p+n}{k}\right)A_{p+n}=\Gamma\left(1-n+\frac{p+n}{k}\right)A_p$$

и если для всякаго p некратнаго съ k и меньшаго n оно есть нуль, то уравненіе (α) можно утождествить подстановкой:

$$u=\sum_{p=0}^{\infty}A_p x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}.$$

Эта мысль будетъ оправдана, когда убѣдимся, что второе изъ условій опредѣляющихъ A_p удовлетворяется одновременно съ первымъ.

Но первое условіе, представленное въ видѣ

$$\prod_{i=2}^{\beta+1}\Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)A_{p+n}=\prod_{i=1}^{\beta}\Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)A_p,$$

даетъ:

$$A_p=\frac{C+\lambda^p C_1+\ldots\lambda^{p(n-1)}C_{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{\beta}\Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)};$$

поэтому остается показать, что A_p, опредѣляемое предыдущимъ равенствомъ, есть нуль для всякаго p некратнаго съ k и меньшаго n.

Такъ какъ n и k суть числа взаимно простыя, то одно изъ чиселъ ряда

$$p+n,\ p+2n,\ \ldots\ldots p+(k-1)n,$$

гдѣ p некратно съ k и меньше n, непремѣнно раздѣлится на k; частное, полученное отъ этого дѣленія, будетъ цѣлымъ числомъ меньшимъ n. Отсюда слѣдуетъ, что для каждаго изъ перечисленныхъ значеній p въ правой части равенства, опредѣляющаго A_p, существуетъ гамма съ аргументомъ равнымъ нулю или отрицательному цѣлому числу. Это и нужно было показать.

И такъ, строка

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^{rp} x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}}{\prod\limits_{i=1}^{\beta} \Gamma\left(1-n+\frac{p+ni}{k}\right)}, \qquad (\gamma)$$

легко приводимая къ виду

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu p} \lambda^{rp} x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}}{\prod\limits_{i=1}^{\alpha} \Gamma\left(1-k+\frac{p+ki}{n}\right)},$$

есть интегралъ уравненія (α). По формулѣ, связывающей функціи, удовлетворяющія только уравненію (α), съ одновременными интегралами уравненій (α) и (β), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\prod\limits_{i=1}^{\beta} \Gamma\left(1-r+\frac{np+ni}{k}\right)} \\ u &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha p} x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\prod\limits_{i=1}^{\alpha} \Gamma\left(1+p+\frac{ki-kr}{n}\right)} \end{aligned}\right| \qquad (\delta)$$

Эти строки различны только по виду; ими, очевидно, выражается одинъ и тотъ-же интегралъ уравненія (α). Въ формулахъ (γ) и (δ) число r измѣняется отъ единицы до n.

b) Обобщенными производными. Строка (γ) при $r=n$ легко приводится къ виду

$$u=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\beta^{\nu p}\,x^{\frac{p}{k}+\alpha-n}}{\Gamma\left(1+\nu p\right)}\prod_{i=0}^{\beta-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu p-i}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-n+\frac{\nu p-i\alpha}{\beta}\right)}.$$

На основаніи извѣстной формулы А. В. Лѣтникова отношеніе

$$\Gamma\left(1+\frac{\nu p-i}{\beta}\right):\Gamma\left(1+\alpha-n+\frac{\nu p-i\alpha}{\beta}\right)$$

можно замѣнить выраженіемъ

$$x^{\frac{i\alpha-\nu p}{\beta}+n-\alpha}\,D_x^{\frac{(\alpha-1)i}{\beta}+n-\alpha}\,x^{\frac{\nu p-i}{\beta}},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $x=0$. Произведя эту замѣну на самомъ дѣлѣ, получимъ:

$$u=x^{\alpha-n-\frac{1}{\beta}}\prod_{i=0}^{\beta-1}\left(x^{\frac{(\alpha-1)i+1}{\beta}+n-\alpha}\,D_x^{\frac{(\alpha-1)i}{\beta}+n-\alpha}\right)x^{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\Phi\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right),$$

гдѣ для краткости положено:

$$\Phi\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)=e^{\beta x^{\frac{1}{\beta}}}+e^{g\beta x^{\frac{1}{\beta}}}+\ldots+e^{g^{r-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}},\quad g^r=1.$$

Если въ предыдущей формулѣ n замѣнимъ черезъ k, k черезъ n и x черезъ z, то получимъ интегралъ уртвненія (β). Поэтому интегралъ уравненія (α) можно выразить еще слѣдующимъ отношеніемъ:

$$u = z^{\beta-n-\frac{1}{\alpha}} \prod_{i=0}^{\alpha-1}\left(z^{\frac{(\beta-1)i+1}{\alpha}+k-\beta} D_z^{\frac{(\beta-1)i}{\alpha}+k-\beta}\right) z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \Phi\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

$$\alpha z^{\frac{1}{\alpha}} = \beta x^{\frac{1}{\beta}}.$$

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію строкъ (δ). Первая изъ нихъ, представленная въ видѣ

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha p} x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\Gamma(\alpha+\alpha p)} \prod_{i=1}^{\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha p+\alpha-i+1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1-r+\frac{\alpha p+\alpha i}{\beta}\right)},$$

выразится въ обобщенныхъ производныхъ слѣдующимъ образомъ:

$$u = x^{1-r+\alpha+\frac{1-\alpha}{\beta}} \prod_{i=0}^{\beta-1}\left(x^{\frac{(1-\alpha)i+1}{\beta}+r-1} D_x^{\frac{(1-\alpha)i}{\beta}+r-1}\right) \theta\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right),$$

вторая, представленная въ видѣ

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha p} x^{\frac{np}{k}+\alpha-r}}{\Gamma(\alpha+\alpha p)} \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{\Gamma\left(1+p+\frac{i-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+p+\frac{\beta i-\beta r}{\alpha}\right)},$$

слѣдующимъ:

$$u = z^{\beta+\frac{1-\beta r}{\alpha}} \prod_{i=0}^{\alpha} \left(z^{\frac{(1-\beta)i+\beta r-2}{\alpha}} D_z^{\frac{(1-\beta)i+\beta r-1}{\alpha}} \right) \theta\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

гдѣ для краткости положено:

$$\theta\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right) = e^{\beta x^{\frac{1}{\beta}}} + h e^{h\beta x^{\frac{1}{\beta}}} + \ldots + h^{\alpha-1} e^{h^{\alpha-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}},$$

$$az^{\frac{1}{\alpha}} = \beta x^{\frac{1}{\beta}}, \quad h^{\alpha} = 1.$$

Всѣ дифференцированія въ предыдущихъ формулахъ начинаются отъ нуля. Если въ упомянутыхъ формулахъ положимъ $r=1$ и если, перейдя по формуламъ А. В. Лѣтникова отъ обобщенныхъ производныхъ къ опредѣленнымъ интеграламъ, измѣнимъ перемѣнныя такъ, чтобы предѣлами каждаго интегрированія были нуль и единица, то, принявъ во вниманіе зависимость между функціями бета и гамма, возвратимся къ строкамъ (δ). Отсюда слѣдуетъ, что при $r=1$ строки (δ) могутъ быть выражены въ опредѣленныхъ интегралахъ независимо отъ понятія объ обобщенныхъ производныхъ.

Примѣчаніе. Не безполезно замѣтить, что строка

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{np} x^{\frac{np}{k}+n-r}}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+p+\frac{ki-kr}{n}\right)},$$

гдѣ k число положительное, а r одно изъ чиселъ ряда $1, 2 \ldots n$, и равносильная этой строкѣ формула

$$u = z^{k + \frac{1-kr}{n}} \prod_{i=1}^{n} \left(z^{\frac{(1-k)i+kr-2}{n}} D_z^{\frac{(1-k)i+kr-1}{n}} \right) \theta\left(z^{\frac{1}{n}} \right),$$

$$\theta\left(z^{\frac{1}{n}} \right) = e^{nz^{\frac{1}{n}}} + he^{hnz^{\frac{1}{n}}} + \ldots + h^{n-1} e^{h^{n-1} nz^{\frac{1}{n}}},$$

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}}, \; h^n = 1,$$

гдѣ каждое дифференцированіе начинается отъ $z = 0$, выражаютъ полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n + \frac{n}{k}} u$$

въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1) когда k цѣлое число первое съ n,

2) когда k несоизмѣримое число,

3) когда k равняется несократимой дроби $\frac{nl}{m}$, знаменатель которой m больше n.

Примѣры. Изложенный анализъ показываетъ, что интегралъ уравненія

$$\frac{d^{kr+1} u}{dx^{kr+1}} = x^{(1-k)\left(r + \frac{1}{k}\right)} u$$

выражается отношеніемъ:

$$u = \prod_{i=1}^{k-1} \left(x^{ri + \frac{1}{k}} D_x^{ri} \right) D_x e^{kx^{\frac{1}{k}}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x^{-2+\frac{1}{k}}u$$

отношеніемъ:

$$u = \int_0^z (z-\omega)^{k-\frac{3}{2}} \operatorname{snh} 2\omega^{\frac{1}{2}}\, d\omega\ ,\ z = k^2 x^{\frac{1}{k}};$$

интегралъ уравненія

$$\frac{d^{n}u}{dx^{2n}} = x^{-n}u$$

отношеніемъ:

$$u = \int_0^x (x-\omega)^{n-\frac{3}{2}} \operatorname{snh} 2\omega^{\frac{1}{2}}\, d\omega.$$

ОПЕЧАТКИ,

ЗАМѢЧЕННЫЯ ВЪ СТАТЬѢ Г. ФЛОРОВА.

Стран.	*Строк.*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ:*
144	5 *снизу*	$\xi^{\frac{1}{\beta+r^{\alpha}}}$	$\xi^{\frac{1}{\beta+r\alpha}}$
148	1 *сверху*	$\Gamma\left(1-n+a+\frac{p+n}{k}\right)$	$\Gamma\left(1-n+\alpha+\frac{p+n}{k}\right)$
150	1 *снизу*	$+e^{g^{r-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}},\ g^{r}=1$	$+e^{g^{\nu-1}\beta x^{\frac{1}{\beta}}},\ g^{\nu}=1$
151	9 *сверху*	$\Gamma\left(\frac{\alpha p+\alpha-i+1}{\beta}\right)$	$\Gamma\left(\frac{\alpha p+\alpha+i-1}{\beta}\right)$
152	1 —	$\prod\limits_{i=0}^{\alpha}$	$\prod\limits_{i=1}^{\alpha}$
152	4 —	$az^{\frac{1}{\alpha}}=$	$\alpha z^{\frac{1}{\alpha}}=$