

Communications et procès-verbaux de la société
mathématique de Kharkow. Année 1886, 1-re livraison
(XV du commencement de l'édition).

С О О Б Щ Е Н І Я

И

П Р О Т О К О Л Ы З А С Ъ Д А Н І Й

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Г О О Б Щ Е С Т В А

П Р И

И М П Е Р А Т О Р С К О М Ъ Х А Р Ъ К О В С К О М Ъ У Н И В Е Р С И Т Е Т Ъ

1886 г о д а .

1.

Х А Р Ъ К О В Ъ .

Въ Университетской Типографіи.

1 8 8 6 .

Communications et procès-verbaux de la société
mathématique de Kharkow. Année 1880. 1-re livraison.
(XV. du commencement de l'édition.)

COOBYШEPIE

ПРOTOКОЛЫ ЗАСEДАНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ВЪ

УНИВЕРСИТЕТѢ ХАРЬКОВСКОМЪ

1880 ГОДА.

ХАРЬКОВЪ.

Отдельные оттиски изъ «Записокъ Императорскаго Харь-
ковскаго Университета».

СОДЕРЖАНІЕ.

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ:

	<i>Стран.</i>
14-го февраля 1886 года	1—2.
21-го марта — —	15—16.

СООБЩЕНІЯ:

1. П. С. Флорова, Приложение основныхъ формулъ теорій междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ.	3—14.
2. А. П. Грузинцева, О теоріи дисперсіи Фойхта.	17—30.
3. П. С. Флорова, Замѣтка о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференціального уравненія	31—32.
4. М. А. Тихомандрицкаго, Къ теоріи радіуса кривизны	33—41.
5. Ею-же, Разность n -го порядка логарифмической функціи	42—44.

TABLE DES MATIÈRES.

Extraits des procès-verbaux:

	<i>Стран.</i>
Séance du 14 février 1886.	1— 2.
Séance du 21 mars —	15—16.

Communications:

1. *P. S. Floroff*, Application des formules fondamentales de la théorie de la différentiation à indice quelconque à la sommation des séries infinies 3—14.
 2. *A. P. Grousintzeff*, Sur la théorie de la dispersion de Voigt 17—30.
 3. *P. S. Floroff*, Note sur les intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire. 31—32.
 4. *M. A. Tikhomandrisky*, Contribution à la théorie du rayon de courbure 33—41.
 5. *Le même*, Différence d'ordre n d'une fonction logarithmique 42—44.
-

ПРОТОКОЛЬ ЗАСЪДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТЪ,

14 февраля 1886 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, В. Л. Кирпичевъ, М. А. Тихомандрицкій, А. В. Гречаниновъ, А. С. Грицай, В. П. Алексѣевскій, А. М. Ляпуновъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. В. Маевскій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель сообщил о полученіи слѣдующихъ статей: 1) *Профес. Поссе* «О функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра», — доложить эту статью принялъ на себя М. А. Тихомандрицкій; 2) *Г. Флорова* «Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ», — ознакомить общество съ содержаніемъ этой статьи взялся В. П. Алексѣевскій.

2. М. А. Тихомандрицкій изложилъ содержаніе вышеупомянутой статьи профес. *Поссе*.

3. *А. В. Гречаниновъ* сообщилъ свою статью подъ заглавіемъ — «О треніи цапфъ о подшипники».

4. М. А. Тихомандрицкій предложилъ выписать журналъ «Школа математики», издаваемый г. Сениговымъ, въ С.-Петербургѣ. Постановлено: выписать.

5. Г. председатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ изданій:

- 1) Кіевскія университетскія извѣстія № 12, декабрь 1885.
- 2) Журналъ русскаго физико-химическаго общества № 9 за 1885 г. и № 1 за 1886 г.
- 3) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. № 2, 1885.
- 4) Журналъ элементарной математики. Т. 2-й, № 11 (1886).
- 5) *Weierstrass*, Zu Lindemann's Abhandlung: «Ueber die Ludolph'sche Zahl».
- 6) *Mathesis*, Janvier, 1886.
- 7) *Journal de mathématiques élémentaires*. №№ 1 et 2, 1886.
- 8) *Journal de mathématiques spéciales*. №№ 1 et 2, 1886.

П Р И Л О Ж Е Н І Е

ОСНОВНЫХЪ ФОРМУЛЬ ТЕОРИИ

МЕЖДУПРЕДѢЛЬНАГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЯ КЪ СУММОВАНІЮ
ВЕЗКОНЕЧНЫХЪ РЯДОВЪ.

П. С. Ф л о р о в а.

Въ этой замѣткѣ излагаются рѣшенія трехъ задачъ, относящихся къ суммованію безконечныхъ рядовъ, изъ которыхъ одинъ дается явно, а другіе посредствомъ дифференціальныхъ уравненій. Приѣмъ¹, помощью котораго рѣшаются эти задачи, основанъ на теоріи междупредѣльнаго дифференцированія и однажды (вторая книжка «Сообщеній» за 1885 годъ) былъ уже употребленъ нами для суммованія строки интегрирующей двучленное дифференціальное уравненіе.

З а д а ч а 1.

Выразить сумму безконечнаго ряда

$$\frac{1}{\Gamma(1)^n} + \frac{x}{\Gamma(2)^n} + \frac{x^2}{\Gamma(3)^n} + \frac{x^3}{\Gamma(4)^n} + \dots$$

въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Рѣшеніе. Обозначивъ эту сумму черезъ u и принявъ во вниманіе отношеніе

$$\Gamma(1 + np) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{np + \frac{1}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + p - \frac{i}{n}\right)$$

1*

получимъ

$$u = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{np+\frac{1}{2}} x^p}{\Gamma(1+np)} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma(1+p-\frac{i}{n})}{\Gamma(1+p)};$$

это равенство посредствомъ известной формулы А. В. Лѣтникова

$$x^{-p} D^{-\frac{i}{n}} x^{p-\frac{i}{n}} = \Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right) : \Gamma(1+p),$$

гдѣ дифференцирование начинается отъ $x=0$, легко приводится къ равенству

$$u = n^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(D^{-\frac{i}{n}} x^{-\frac{i}{n}} \right) \theta(x),$$

въ которомъ, обозначая черезъ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$, для краткости положено:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{np+\frac{1}{2}} x^p}{\Gamma(1+np)} = \theta(x) = \sum_{p=0}^{n-1} e^{n\lambda^p x^{\frac{1}{n}}}.$$

Употребивъ формулу А. В. Лѣтникова, выражающую переходъ отъ обобщенныхъ производныхъ къ опредѣленнымъ интеграламъ, и принявъ во вниманіе отношеніе

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

найдемъ:

$$u = (2\pi)^{1-n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_0^{\alpha_{i-1}} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)^{\frac{i}{n}-1} \alpha_i^{-\frac{i}{n}} d\alpha_i \right) \theta(\alpha_{n-1}),$$

гдѣ $\alpha_0 = x$. Это и есть искомое рѣшеніе задачи; оно легко повѣряется помощью слѣдующихъ разсужденій.

Повѣрка. Если переменныя, по которымъ производится интегрированія, измѣнимъ по формулѣ:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} \beta_i = x \beta_1 \beta_2 \dots \beta_i,$$

то будемъ имѣть

$$u = (2\pi)^{1-n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_0^1 (1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1} \beta_i^{-\frac{i}{n}} d\beta_i \right) \theta(x\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}).$$

Развернувъ функцію θ по степенямъ аргумента, получимъ:

$$u = (2\pi)^{1-n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{np+1} x^p}{\Gamma(1+np)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_0^1 (1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1} \beta_i^{p-\frac{i}{n}} d\beta_i \right).$$

Отсюда наконецъ посредствомъ формулы

$$\int_0^1 (1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1} \beta_i^{p-\frac{i}{n}} d\beta_i = \frac{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right) \Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma(1+p)}$$

найдемъ:

$$u = \frac{1}{\Gamma(1)^n} + \frac{x}{\Gamma(2)^n} + \frac{x^2}{\Gamma(3)^n} + \frac{x^3}{\Gamma(4)^n} + \dots$$

Это и нужно было показать.

З а д а ч а 2.

Выразить строку определяемую уравненіемъ

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

въ обобщенныхъ производныхъ.

Рѣшеніе. Если корни уравненія

$$[m]^n + \beta_1 [m]^{n-1} + \dots + \beta_k [m]^{n-k} = 0,$$

которые будемъ предполагать вещественными, обозначимъ черезъ

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-k+1 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k$$

и если положимъ

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \dots,$$

то будемъ имѣть

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(m_p - \alpha_1)(m_p - \alpha_2) \dots (m_p - \alpha_k) \Gamma(1 + m_p)}{(m_p - n + 1)(m_p - n + 2) \dots (m_p - n + k) \Gamma(1 + m_p - n)} A_p x^{m_p - n}.$$

Равенства правыхъ частей отношеній для u можно достигнуть положеніемъ

$$m_p = np + m,$$

гдѣ m одно изъ чиселъ ряда

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-k+1 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k,$$

и положеніемъ

$$(m+n-\alpha_1+np)\dots(m+n-\alpha_k+np)\Gamma(1+m+n+np)A_{p+1} = \\ = (1+m+np)(2+m+np)\dots(k+m+np)\Gamma(1+m+np)A_p,$$

рѣшеніе котораго относительно A_p въ связи съ окончательнымъ рѣшеніемъ предложенной задачи рассмотримъ въ слѣдующихъ случаяхъ.

Случай 1. Пусть m будетъ одно изъ чиселъ ряда

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n - k + 1;$$

при этомъ условіи интеграль уравненія опредѣляющаго A_p легко приводится къ виду

$$A_p = \frac{\text{Const}}{\Gamma(1+m+np)} \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left(\frac{m+i}{n} + p\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-\alpha_i}{n} + p\right)}.$$

Такъ какъ относительно m нами сдѣлано допущеніе $m+1 > 0$, то выраженіе

$$\Gamma\left(\frac{m+i}{n} + p\right) : \Gamma\left(\frac{m+n-\alpha_i}{n} + p\right)$$

можно замѣнить выраженіемъ

$$z^{\frac{\alpha_i-m}{n} - p} D_z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}} z^{\frac{m+i}{n} + p - 1},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $z = 0$. Сдѣлавъ эту замѣну самымъ дѣломъ и положивъ

$$\text{Const} = n, \quad z = x^n,$$

получимъ

$$A_p x^{np+m} = z \prod_{i=1}^k \left(z^{\frac{\alpha_i - n + i - 1}{n}} D_z^{\frac{\alpha_i - n + i}{n}} \right) \frac{n z^{\frac{m+k}{n} + p - 1}}{\Gamma(1+m+np)}$$

Взявъ сумму отъ обѣихъ частей этого равенства въ предѣлахъ отъ $p = 0$ до $p = \infty$ и принявъ во вниманіе тождество

$$\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{-mp} e^{\lambda^p x} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n x^{np+m}}{\Gamma(1+m+np)},$$

въ которомъ λ означаетъ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$, найдемъ:

$$u = z \prod_{i=1}^k \left(z^{\frac{\alpha_i - n + i - 1}{n}} D_z^{\frac{\alpha_i - n + i}{n}} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{-mp} e^{\lambda^p z^n}.$$

Случай 2. Если сдѣлаемъ положенія

$$m = \alpha_r \quad \alpha_i - n + i = n\delta_i$$

и если подъ δ_r будемъ разумѣть нуль или цѣлое положительное число, а подъ δ съ другими номерами какія угодно цѣлыя числа, то изъ уравненія опредѣляющаго A_p легко найдемъ

$$A_{p-\delta_r} = \frac{[q_1]^{\delta_1} [q_2]^{\delta_2} \dots [q_k]^{\delta_k}}{\Gamma(1+n-r+np) \text{Const}},$$

гдѣ при δ_i положительномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p,$$

а при δ_i отрицательномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p + 1.$$

Полученная формула посредством отношенія

$$\frac{z^{r-i}}{z^n} - p + \delta_i D_z^{\delta_i} \frac{z^{i-r}}{z^n} + p = [q_i]^{\delta_i}$$

и допущеній

$$n \text{Const} = 1, \quad z = x^n,$$

безъ труда преобразуется въ такую

$$A_{p-\delta_r} x^{np - n\delta_r + m} = z \prod_{i=1}^k \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) \frac{nz^{\frac{k-r}{n} + p}}{\Gamma(1 + n - r + np)}$$

Замѣтивъ, что $A_{p-\delta_r}$ при p равномъ любому числу ряда

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ \delta_r - 1$$

есть нуль, и взявъ сумму отъ обѣихъ частей предыдущаго равенства въ предѣлахъ отъ $p=0$ до $p=\infty$, получимъ

$$u = z \prod_{i=1}^k \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}},$$

гдѣ λ по прежнему означаетъ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$. При вычисленіи функции u по этой формулѣ не должно принимать во вниманіе тѣхъ постоянныхъ произвольныхъ, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{\delta_i}$ при δ_i отрицательномъ.

Случай 3. Если предположимъ теперь

$$m = \alpha_r \quad \alpha_i - n + i = -n\delta_i$$

и если подь δ_r условимся понимать цѣлое положительное число отличное отъ нуля, а подь δ съ другими нумерами какія угодно цѣлыя числа, то коэффициенты строки

$$A_0 x^m + A_1 x^{n+m} + A_2 x^{2n+m} + \dots$$

получать слѣдующія значенія

$$A_{p+\delta_r} = \frac{[q_1]^{-\delta_1} [q_2]^{-\delta_2} \dots [q_k]^{-\delta_k}}{\Gamma(1+n-r+np) \text{Const.}}$$

$$(k-r)! A_{\delta_r-1} = \\ = (n\delta_1 - r + 1)(n\delta_2 - r + 2) \dots (n\delta_k - r + k)(n-r)! A_{\delta_r}$$

$$A_{\delta_r-p} = \frac{\Gamma(r-n+np) \text{C'onst.} \cdot (-1)^{(n+1)p} \delta_r!}{[\rho_1]^{\delta_1} [\rho_2]^{\delta_2} \dots [\rho_k]^{\delta_k} (p-1)! (\delta_r-p)!}$$

Въ первомъ изъ этихъ равенствъ p измѣняется отъ нуля до ∞ , въ послѣднемъ отъ единицы до δ_r ; кромѣ того при δ_i положительномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p + 1$$

$$\rho_i = \frac{\delta_r - p + 1}{(i-r)!(r-i)!} + \frac{r-i}{n} + p - 1,$$

а при δ_i отрицательномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p$$

$$\rho_i = \frac{r-i}{n} + p.$$

Связь между постоянными Const и C'onst, изъ которыхъ одно произвольно, выражается отношеніемъ

$$\text{Const. C'onst} = n(-1)^{n+r+\delta_r+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_k}.$$

Если воспользуемся формулой

$$z^{\frac{r-i}{n} - p - \delta_i} D_z^{-\delta_i} z^{\frac{i-r}{n}} + p = [q_i]^{-\delta_i}$$

и если сделаемъ положенія

$$n \text{Const} = 1, \quad z = x^n,$$

то получимъ

$$u = z^{1 - \delta_r - \frac{r}{n}} (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_{\delta_r - 1} z^{\delta_r - 1}) + \\ + z \prod_{i=1}^k \left(z^{-\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{-\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^r p e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

Понятно, что функцию u можно вычислить и помощью отношения

$$u = z \prod_{i=1}^k \left(z^{-\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{-\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^r p e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}},$$

если условиться при этомъ вычисленіи — тѣ постоянныя произвольныя, которыя вводятся дѣйствиємъ $D_z^{-\delta_r}$, принимать во вниманіе, а тѣ, которыя вводятся дѣйствиємъ $D_z^{-\delta_i}$ при i отличномъ отъ r (буде δ_i положительное число), опускать.

Примѣчаніе 1. Сходимость разсмотрѣнныхъ нами строкъ весьма легко усматривается изъ тѣхъ значеній A_p , которыя мы нашли для этого коэффициента; вотъ причина, по которой мы обошли молчаніемъ вопросъ о сходимости.

Примѣчаніе 2. Изложенный выше анализъ показываетъ, что если имѣеть мѣсто отношеніе

$$\alpha_i - n + i = n\delta_i,$$

гдѣ δ_i какое угодно цѣлое число, и если условиться принимать во вниманіе всѣ постоянныя произвольныя вводимыя дѣйствіями $D_z^{\delta_i}$, то полный интеграль уравненія для u можно представить въ видѣ:

$$u = z \prod_{i=1}^k \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}},$$

гдѣ λ любой корень уравненія $\lambda^n = 1$, а $z = x^n$.

Мысль, которую мы сейчасъ высказали, можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ.

Если корни уравненія

$$[m]^n + \beta_1 [m]^{n-1} + \dots + \beta_k [m]^{n-k} = 0$$

по модулю n соответственно сравнимы съ числами ряда

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-1,$$

то полный интеграль уравненія

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

выражается конечною формою.

Для примѣра рассмотримъ уравненіе:

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \frac{n(r+k)}{x} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{nr(nk+1)}{x^2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} = u.$$

Если r и k цѣлыя числа, то интеграль его, безъ сомнѣнія, будетъ

$$u = z^{k + \frac{n-1}{n}} D_z^k z^{r - \frac{1}{n}} D_r^r z^{\frac{2-n}{n}} e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}}.$$

Примѣчаніе 3. Дифференціальное уравненіе

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

въ интегрируемыхъ случаяхъ было предметомъ изслѣдованій В. П. Алексѣевского (третья книжка «Сообщеній» за 1884 годъ). Мы рѣшились вновь говорить объ этомъ уравненіи потому, что употребленный нами способъ его интегрированія не только раскрылъ простѣйшую форму его интеграловъ въ интегрируемыхъ случаяхъ, но и оказался годнымъ для вычисленія $n - k$ частныхъ его рѣшеній въ неинтегрируемыхъ случаяхъ.

З а д а ч а 3.

Выразить строку опредѣляемую, уравненіемъ

$$x^k \frac{d^{n+k} u}{dx^{n+k}} = x^k \frac{d^k u}{dx^k} + \beta_1 x^{k-1} \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} + \dots + \beta_{k-1} x \frac{du}{dx} + \beta_k u,$$

въ обобщенныхъ производныхъ.

Рѣшеніе этой задачи мы рассмотримъ лишь въ томъ частномъ случаѣ, когда корни уравненія

$$[m]^k + \beta_1 [m]^{k-1} + \dots + \beta_{k-1} m + \beta_k = 0$$

вещественны и когда каждый изъ нихъ меньше k .

Если назовемъ эти корни черезъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$$

и если положимъ

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \dots,$$

то будемъ имѣть

$$x^k \frac{d^{n+k} u}{dx^{n+k}} = \sum_{p=0}^{\infty} m_p (m_p - 1) \dots (m_p - n - k + 1) A_p x^{m_p - n}$$

$$x^k \frac{d^{n+k} u}{dx^{n+k}} = \sum_{p=0}^{\infty} (m_p - \alpha_1) (m_p - \alpha_2) \dots (m_p - \alpha_k) A_p x^{m_p}.$$

Замѣтивъ, что правыя части этихъ отношеній при условіяхъ

$$m_p = p + k$$

$$A_p = \frac{\lambda^p}{\Gamma(1+p)} \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left(\frac{p+k-\alpha_i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p+k+n-i}{n}\right)},$$

гдѣ λ любой корень уравненія $\lambda^n = 1$, дѣлаются равными между собою, получимъ

$$u = \prod_{i=1}^k \left(D_z \frac{i-\alpha_i-n-1}{n} z \frac{i-\alpha_i-n}{n} \right) e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}}.$$

Таково рѣшеніе предложенной задачи; въ немъ $z = x^n$.

Изъ него же между прочимъ видно, что n интеграловъ уравненія для u выразятся конечною формой, если числа

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$$

по модулю n будутъ сравнимы съ числами ряда

$$1 \ 2 \ \dots \ k.$$

Красная Слобода.

5 Февраля 1886 года.

ПРОТОКОЛЬ ЗАСѢДАНІЯ 21 МАРТА.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, В. Л. Кирпичевъ, А. В. Гречаниновъ, А. С. Грицай, А. А. Блюшниковъ, М. А. Тихомандрицкій, М. О. Ковальскій, Н. Д. Пильчиковъ, В. П. Алексѣевскій, И. К. Шейдтъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. В. П. Алексѣевскій изложилъ содержаніе статьи П. С. Флорова — «Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ».

2. А. П. Грузинцевъ прочелъ свою статью подъ заглавіемъ — «О теоріи дисперсіи Фойхта».

3. М. А. Тихомандрицкій изложилъ свою замѣтку — «Къ теоріи радіуса кривизны».

4. В. П. Алексѣевскій сообщилъ — «Элементарный выводъ формулы маятника».

5. Г. предсѣдатель доложилъ о письмѣ г. Фролова изъ гор. Архангельска, въ коемъ авторъ излагаетъ свои соображенія по поводу статьи, напечатанной въ «Математическомъ листкѣ» о томъ, какъ древніе извлекали корни.

6. Онъ-же доложилъ о книгахъ, полученныхъ харьковскимъ математическимъ обществомъ:

- 1) Bulletin de la société mathématique de France. T. XIV, № 1 (1886).

- 2) Journal de sc. math. Vol. VI, № 6.
- 3) American Journal of Mathematics. Vol. VIII, № 2.
- 4) Математическій сборникъ. Т. 12, вып. 4.
- 5) Журналъ русскаго физико-химическаго общества. Т. XVIII, вып. 2.
- 6) Журналъ элементарной математики. Т. II, № 13.
- 7) Кіевскія университетскія извѣстія. № 1, 1886.
- 8) Mathesis. Fevrier, 1886.
- 9) Journal de mathématiques élémentaires, Mars. 1886.
- 10) Journal de mathématiques spéciales, Mars, 1886.
- 11) Физико-математическія науки. №№ 10, 11 и 12 за 1885 г. и № 1, 1886.
- 12) Школа математики. №№ 1, 2, 3 и 4 (1886).

7. Г. председатель доложилъ, что профессоръ Н. Я. Сонинъ прислалъ математическому обществу слѣдующія свои сочиненія:

- 1) Замѣтки о выводѣ уравненій распространенія теплоты въ кристаллахъ. Варшава. 1878.
- 2) Объ опредѣленіи максимума и минимума свойствъ плоскихъ кривыхъ. Варшава. 1886.
- 3) О числовыхъ тождествахъ. Варшава. 1885.
- 4) Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ. Варш. 1885.
- 5) Объ одной задачѣ вариационнаго исчисленія. 2 статьи.
- 6) Обобщеніе одной формулы Абеля.
- 7) Recherches sur les fonctions cylindriques.
- 8) Объ интегрируемости выраженій, содержащихъ неопредѣленные функціи. Статья I.
- 9) Обобщенія принципа послѣдняго множителя. 1875.
- 10) Объ интегрируемости уравненій съ частными производными 2-го порядка. 1874.

О ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ ФОЙХТА.

А. П. Грузинцева.

Въ 1883 году профессоръ Фойхтъ опубликовалъ въ *Анналахъ Видемана* двѣ работы по теоріи дисперсіи свѣта; въ одной изъ нихъ, именно въ первой, онъ разбираетъ теорію дисперсіи, данную Кеттелеромъ, въ другой — излагаетъ свою собственную. Относительно теоріи Кеттелера онъ приходитъ къ тому же выводу, къ которому пришелъ и я за годъ ранѣе его¹, именно, что теорія Кеттелера не состоятельна; поэтому здѣсь мы не будемъ заниматься первою статьей Фойхта, а обратимъ вниманіе только на вторую, въ которой Фойхтъ излагаетъ свою собственную теорію дисперсіи для прозрачныхъ срединъ; этою послѣднею мы и займемся здѣсь.

Фойхтъ, подобно другимъ физикамъ, занимавшимся теоріей дисперсіи, принимаетъ существованіе вліянія матерьяльныхъ частицъ тѣла на эфиръ и обратно — эфира на матерію. Основныя уравненія своей теоріи онъ пишетъ сначала въ слѣдующей формѣ:

¹ Сообщенія харьк. мат. общ. за 1882 г., вып. I, стр. 23 и 35, или также — «О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ». Харьковъ. 1882.

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = X' + X + A$$

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = Y' + Y + B$$

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} = Z' + Z + C$$

это для движенія эфирной частицы, причеиъ значеніе буквъ слѣдующее: m —масса колеблющейся эфирной частицы, u , v , w —составляющія ея колебанія; X' , Y' , Z' составляющія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эфиръ; X , Y , Z составляющія упругихъ силъ эфира и наконецъ A , B , C —составляющія силы взаимодѣйствія матерьяльныхъ частицъ на эфирную.

Для матерьяльной частицы уравненія будутъ:

$$\mu \frac{d^2 U}{dt^2} = \mathcal{X}' + \mathcal{X} + A$$

$$\mu \frac{d^2 V}{dt^2} = \mathcal{H}' + \mathcal{H} + B$$

$$\mu \frac{d^2 W}{dt^2} = \mathcal{Z}' + \mathcal{Z} + \Gamma.$$

Здѣсь значенія буквъ очевидны.

Фойхтъ, руководствуясь смысломъ закона дѣйствія и противо-дѣйствія, принимаетъ, что

$$A + A = 0, \quad B + B = 0, \quad C + \Gamma = 0. \quad (a)$$

Чтобы получить рѣшеніе написанныхъ здѣсь уравненій, надо знать выраженіе всѣхъ силъ въ функціи координатъ и составляющихъ колебаній частицъ, какъ эфирныхъ такъ и матерьяль-

ныхъ. Эти выраженія для силъ X, Z, \dots извѣстны изъ теоріи упругости; силы X', Z', \dots всегда можемъ предположить равными нулю, такъ что остается только вычислить силы A, B и C , ибо силы A, B и C найдутся тогда изъ уравненій (а), и въ этомъ—центръ тяжести вопроса. Эти силы A, B и C неизвѣстны и могутъ быть найдены при современныхъ нашихъ знаніяхъ только болѣе или менѣе гипотетически. Фойхтъ опредѣляетъ ихъ такими, чтобы онѣ удовлетворяли закону сохраненія энергіи, и даетъ для каждой изъ нихъ по 8—различныхъ выраженій, изъ которыхъ 6 имѣютъ видъ, встрѣчающійся въ другихъ физическихъ теоріяхъ; Фойхтъ ихъ и оставляетъ; изъ нихъ 4 формы необходимы, по мнѣнію Фойхта, для теоріи дисперсіи и двойного преломленія, и 2 остальные для теоріи круговой поляризаціи; при этомъ онъ замѣчаетъ, что другихъ формъ для силъ A, B и C не можетъ существовать, съ чѣмъ однако нельзя вполне согласиться, такъ какъ условію, которому должны подчиняться силы A, B и C , можно удовлетворить безчисленнымъ множествомъ рѣшеній; Фойхтъ выбралъ только простѣйшія. Но, какъ бы то ни было, всегда возможно допустить тѣ формы, которыя Фойхтъ приписываетъ силамъ A, B, \dots онѣ не противорѣчатъ ни закону сохраненія энергіи, ни тѣмъ взглядамъ, коихъ вообще держатся физики относительно силъ взаимодѣйствія между частицами тѣлъ.

Затѣмъ приступая къ нахожденію окончательныхъ рѣшеній уравненій, написанныхъ выше, Фойхтъ предполагаетъ, что колебанія матерьяльныхъ частицъ настолько малы, что ими можно пренебречь въ сравненіи съ колебаніями эфирныхъ частицъ; такимъ образомъ у Фойхта остается только первая система уравненій, относящихся къ эфирнымъ колебаніямъ. Подставляя въ эти уравненія значенія силъ A, B и C , можно получить связь между показателемъ преломленія и длиной волны, т. е. формулу, выражающую законъ дисперсіи.

Предположеніе Фойхта о неподвижности матерьяльныхъ частицъ¹ едва-ли можно принять, во-первыхъ, потому, что механическая теорія теплоты предполагаетъ и доказываетъ прямо противоположное, а, во-вторыхъ, предположеніе, что матерьяльныя частицы неподвижны, приводитъ къ математическому противорѣчію; дѣйствительно, если $U = V = W = 0$, тогда и $X = H = Z = 0$, а потому и $A = B = \Gamma = 0$, т. е., по уравненіямъ (а) и $A = B = C = 0$, слѣдовательно нѣтъ силъ взаимодѣйствія между эфиромъ и матеріей.

Такимъ образомъ основныя уравненія теоріи Фойхта едва-ли можно считать вполнѣ вѣрными съ теоретической точки зрѣнія.

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ выводы Фойхта подтверждаются данными опытами, что собственно и имѣетъ въ виду настоящая статья; такое сравненіе я считаю тѣмъ болѣе необходимымъ, что самъ авторъ не произвелъ его².

Для связи между показателемъ преломленія и длиной волны Фойхтъ даетъ формулу³, которую я привожу къ виду:

$$n^2 = \frac{\lambda^2(A - B\lambda^2)}{\lambda^2 - C}, \quad (1)$$

причемъ A , B , C суть нѣкоторые постоянные коэффициенты, характеризующіе данную прозрачную среду; n показатель преломленія луча, λ длина волны для того-же луча въ пустотѣ (т. е. въ міровомъ эфирѣ); это количество у Фойхта обозначено буквой λ_0 . Эта формула должна имѣть мѣсто для всѣхъ лучей спектра. Относительно коэффициента B Фойхтъ замѣчаетъ, что онъ по всей вѣроятности равенъ нулю, но теорія не показываетъ это-

¹ Такое предположеніе было сдѣлано еще Коши, но, какъ показалъ Брю, оно приводитъ къ противорѣчію съ опытомъ.

² Необходимо напомнить, что рѣчь идетъ о прозрачныхъ срединахъ, такъ какъ для срединъ, поглощающихъ свѣтъ, такое сравненіе произведено самимъ Фойхтомъ.

³ Wied. Ann. Bd. XIX, S. 885, und Bd. XX, S. 452.

го, почему мы его пока сохранимъ.

Формулу подобную (1) предлагалъ еще Нейманъ-отецъ на своихъ лекціяхъ (въ 1858 г.); но эти лекціи изданы только въ прошломъ году¹.

Изслѣдуемъ формулу² (1).

Прежде всего видимъ, что n можетъ быть дважды нулемъ: во-первыхъ, когда

$$\lambda = 0$$

и, во-вторыхъ, когда

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Первый случай показываетъ, что для очень короткихъ волнъ показатель преломленія очень малъ, что противорѣчитъ опыту.

Обратимся затѣмъ ко второму. Количество A , какъ показываетъ сравненіе формулы (1) съ данными опыта, для всѣхъ прозрачныхъ срединъ положительно; что-же касается B , то оно можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ; въ первомъ случаѣ λ послѣдней формулы дѣйствительное количество, а во второмъ мнимое. Первый случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для воды, а второй для флинтгласса. Вычисленныя ниже значенія A и B даютъ въ случаѣ воды:

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{B}} = 123^{\mu\mu}, 323,$$

гдѣ знакъ $\mu\mu$ есть знакъ 0,0001 миллиметра.

Такія волны должны лежать далеко въ области инфра-красныхъ лучей, но опытъ такъ далеко не шелъ, наибольшія изъ наблюденныхъ λ въ за-красномъ концѣ солнечнаго спектра дости-

¹ Vorlesungen über die Theorie der Elasticität etc. S. 296.

² Формулу Фойхта Кеттелеръ (Theoretische Optik, S. 36) ошибочно считаетъ формулой съ 4-мя постоянными коэффициентами.

гали только до $27^{\mu\mu}, 0'$; наблюдений же n для воды въ этой области не было произведено.

Такимъ образомъ опытъ здѣсь ничего не даетъ для непосредственнаго сравненія съ формулой.

Кромѣ нулевыхъ значеній n существуютъ еще безконечныя. При

$$\lambda = \sqrt{C}$$

показатель преломленія n обращается въ безконечность. Количество C можно опредѣлить изъ опыта; ниже приведены значенія C для воды и одного сорта флинтгласса, вычисляя по нимъ λ_{∞} , получимъ:

для воды

$$\lambda_{\infty} = 0^{\mu\mu}, 6311$$

для флинтгласса

$$\lambda_{\infty} = 1^{\mu\mu}, 0691.$$

Такія волны лежатъ въ области ультра-фіолетовыхъ лучей, но наблюдение такъ далеко еще не доведено; наименьшее изъ наблюденныхъ λ для ультра-фіолетовыхъ лучей есть

$$\lambda = 1^{\mu\mu}, 856 \text{ (крайняя изъ алюминіевыхъ линій),}$$

какъ показали наблюденія Саразена.

Такимъ образомъ и здѣсь на границѣ значеній n наблюдение ничего не даетъ для прямой и непосредственной повѣрки теоріи.

Обратимся къ промежуточнымъ значеніямъ n .

Найдемъ наибольшія и наименьшія значенія n отличныя отъ 0 и ∞ . Такъ-какъ n количество положительное, то maximum и minimum n наступаютъ одновременно съ max. и min. n^2 , поэтому условіе для max. и min. n будетъ слѣдующее:

$$\frac{d(n^2)}{d\lambda} = 0.$$

Но

$$\frac{d(n^2)}{d\lambda} = - \frac{\lambda(B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC)}{(\lambda^2 - C)^2}. \quad (2)$$

Слѣдовательно для того, чтобы $\frac{d(n^2)}{d\lambda}$ было нуль, необходимо, чтобы

$$\lambda(B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC) = 0,$$

а это даетъ:

$$B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC = 0.$$

Отсюда находимъ:

$$\lambda_m^2 = C \pm \sqrt{C^2 - \frac{AC}{B}},$$

обозначивъ это частное значеніе λ знакомъ λ_m .

Но λ_m^2 количество дѣйствительное и положительное, поэтому, если

$$A > 0, \quad C > 0,$$

что имѣеть мѣсто для всѣхъ прозрачныхъ срединъ, то если

1) $B < 0$, то передъ радикаломъ надо брать знакъ +, тогда

$$\lambda_m^2 = C + \sqrt{C^2 - \frac{AC}{B}}. \quad (3)$$

Такой случай имѣеть мѣсто для флинтгласса.

2) $B > 0$ (что имѣеть мѣсто для воды), но очень мало, какъ показываетъ вычисленіе; тогда

$$C < \frac{A^*}{B}.$$

* Если-бы $C > \frac{A}{B}$, тогда λ_m имѣло бы два значенія; но, кажется, такихъ прозрачныхъ срединъ нѣтъ.

Въ этомъ случаѣ λ_m количество воображаемое, слѣдовательно нѣтъ ни max., ни min. n (въ физическомъ смыслѣ).

Посмотримъ теперь, будетъ ли n при $\lambda = \lambda_m$, максимум или minimum.

Возьмемъ вторую производную n^2 (изъ форм. 2) и подставимъ въ ея значеніе величину λ_m вмѣсто λ ; найдемъ:

$$\frac{d^2(n^2)}{d\lambda^2} = -\frac{4B\lambda_m^2}{\lambda_m^2 - C}. \quad (4)$$

Это равенство показываетъ, что если $B < 0$, то

$$\frac{d^2(n^2)}{d\lambda^2} > 0,$$

ибо въ этомъ случаѣ

$$\lambda_m^2 > C \text{ (по форм. (3)).}$$

И такъ, для тѣхъ срединъ, для которыхъ $B < 0$, показатель преломленія n при $\lambda = \lambda_m$ пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе.

Такого результата опытъ не подтверждаетъ, даже напротивъ, для прозрачныхъ срединъ n увеличивается непрерывно при уменьшеніи λ , такъ-что въ этомъ случаѣ формула Фойхта противорѣчитъ дѣйствительности.

Это заключеніе будетъ еще рѣшительнѣе, если мы вычислимъ значеніе λ_m для какого нибудь тѣла. По вычисленнымъ значеніямъ A , B и C для флинтгласса (von Rosette) найдемъ:

$$\lambda_m = 11^{\mu\mu}, 19 \text{ (это лучи инфра-красные).}$$

Значитъ, для лучей, длина волны которыхъ равна $11^{\mu\mu}, 19$, флинтгласъ обладаетъ наименьшимъ показателемъ преломленія; найдемъ числовое значеніе этого показателя преломленія. Подставляя въ формулу (1) значеніе λ_m изъ формулы (3), получимъ:

$$n^2 = -\frac{B\lambda_m^4}{C}.$$

Подставивъ сюда числовое значеніе B , C и λ_m , найдемъ:

$$n = 1,62380,$$

а это показатель преломленія лучей, лежащихъ между ффраунгоферовыми линиями D ($n = 1,61929$) и E ($n = 1,62569$).

И такъ, общее заключеніе то, что формула Фойхта

$$n^2 = \frac{\lambda^2(A - B\lambda^2)}{\lambda - C}$$

противорѣчитъ опыту въ этомъ случаѣ ($B < 0$).

Всѣ предыдущіе числовые выводы основывались на знаніи значеній коэффициентовъ A , B и C . Займемся теперь ихъ вычисленіемъ. Вычислимъ эти коэффициенты для одного сорта ффлинт-гласса (von Rosette) и для воды по даннымъ λ и n , кои мы заимствуемъ у Вюльнера¹ и для ихъ опредѣленія напомнимъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$A - \lambda^2 B + \frac{n^2}{\lambda^2} C = n^2.$$

Опредѣлимъ сначала A , B и C для ффлинтгласса. Возьмемъ n и λ для лучей B , E и H . Найдемъ¹:

$$A = 2,528927; \quad B = -0,0001876716; \quad C = 1,143004$$

$$\lg A = 0,4029363; \quad \lg B = 6,2733987 - 10; \quad \lg C = 0,0580477.$$

Этими значеніями A , B , C мы и пользовались выше.

¹ Exp. Ph. Bd. 2, S. 159 und 163, 4 Aufl.

² Вычисленіе производилось съ семизначными таблицами въ-видахъ сравненія съ вычисленіями Вюльнера по формуль Гельмгольца.

Зная эти коэффициенты, можно вычислить обратно по данным λ значения показателей преломления n для других лучей. Результаты вычислений помещены в таблицу (I). В этой таблице рядом с нашими результатами помещены вычисления Вюльнера по формуле Гельмгольца с тремя же постоянными коэффициентами по тем же данным.

Т а б л и ц а I.

Флинтгласъ (von Rosette).

	Лучъ и наблюденное.	Наб.—выч.	Наб.—выч.
<i>B</i>	1,61268	± 0	± 0
<i>C</i>	1,61443	+ 9	+10
<i>D</i>	1,61929	+11	+ 7
<i>E</i>	1,62569	± 0	± 0
<i>F</i>	1,63148	—11	— 4
<i>G</i>	1,64269	—13	— 4
<i>H</i>	1,65268	± 0	± 0.

Здѣсь въ 3-мъ столбцѣ помѣщены разности между наблюдениемъ и вычислениемъ по формуле Фойхта, и въ 4-мъ по формуле Гельмгольца с тремя же коэффициентами, именно по формуле:

$$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + \frac{Q\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

въ которой P , Q и λ_m ¹ суть постоянные коэффициенты.

Таблица (I) показываетъ, что формула Фойхта нѣсколько менѣе удовлетворяетъ наблюдениямъ, чѣмъ формула Гельмгольца.

Примѣнимъ теперь формулу Фойхта къ водѣ. Вычислимъ A , B и C для линий B , D и F . Найдемъ:

¹ Это λ_m отлично отъ вышеприведеннаго λ_m Фойхтовой формулы.

$$A = 1,760716; \quad B = +0,0001157719; \quad C = 0,3982556$$

$$\lg A = 0,2456893; \quad \lg B = 6,0636033 - 10; \quad \lg C = 9,6001619 - 10.$$

Этими значеніями A , B , C мы и пользовались выше.

Обратно, по даннымъ A , B , C можно вычислить n , результаты чего помѣщены въ таблицѣ II.

Таблица II.

В о д а п р и 19°,5 С.

Лучъ n наблюденное.	Наб.—выч.	Наб.—выч.
B 1,33048	± 0	± 0
C 1,33122	+ 2	+ 5
D 1,33307	± 0	± 0
E 1,33527	— 4	— 5
F 1,33720	± 0	± 0
G 1,34063	+ 14	— 1
H 1,34350	+ 6	— 4.

Видимъ, что сравненіе здѣсь даетъ то-же самое.

Займемся теперь повѣркой формулы Фойхта въ предположеніи, что $B = 0$.

Въ этомъ случаѣ формула Фойхта обращается въ слѣдующую:

$$n^2 = \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - C} \quad (5)$$

съ двумя постоянными A и C ¹.

Формула (5) показываетъ, что n измѣняется въ одномъ направленіи при измѣненіи λ отъ 0 до \sqrt{C} , слѣдовательно между

¹ Значеніе этихъ постоянныхъ приведены передъ таблицами III и IV.

$\lambda = 0$ и $\lambda = \sqrt{C}$ количество n не имѣетъ ни *max.*, ни *min.* и остается все время воображаемымъ количествомъ.

При $\lambda = \sqrt{C}$ показатель n обращается въ ∞ ; затѣмъ при измѣненіи λ отъ \sqrt{C} до ∞ показатель n величина дѣйстви- тельная и постепенно уменьшающаяся до значенія равнаго \sqrt{A} , когда λ , увеличиваясь, стремится къ ∞ .

Примѣняя формулу (5), къ водѣ, найдемъ

$$\sqrt{C} = 0^{\mu\mu}, 6751$$

такихъ малыхъ волнъ еще не наблюдали.

Для флинтгласса

$$\sqrt{C} = 1^{\mu\mu}, 0388$$

и здѣсь тоже нѣтъ наблюденій.

Значенія нижнихъ предѣловъ n суть: $\sqrt{A} = 1,59415$ для флинтгласса и $\sqrt{A} = 1,32405$ для воды.

Опредѣленіе постоянныхъ A и C въ обоихъ этихъ случаяхъ производилось по даннымъ для ффраунгоферовыхъ линій B и G .

Для дальнѣйшаго изученія формулы (5) я вычислилъ по ней обратно показатели n для данныхъ λ и для сравненія произ- вель вычисленіе по упрощенной (съ двумя коэффициентами) фор- мулѣ Гельмгольца ($P = Q$, какъ показали вычисленія Вюльнера), которую можно тогда написать въ видѣ:

$$n^2 - 1 = \frac{H\lambda^2}{\lambda^2 - h}. \quad (6)$$

Такой-же видъ имѣетъ и упрощенная формула Ломмеля.

Значеніе λ для $n = \infty$ суть:

для воды $\sqrt{h} = 1^{\mu\mu}, 0075$

въ флинтгласса $\sqrt{h} = 1^{\mu\mu}, 3007.$

Въ таблицѣ (III) помѣщены разности между вычисленіемъ и наблюденіемъ по формуламъ Фойхта (5) и Гельмгольца (Ломмеля) (6) для флинтгласса; въ таблицѣ (IV) тоже для воды; причемъ постоянныя были слѣдующія:

для флинтгласса	$A = 2,541307$;	$C = 1,079145$
	$H = 1,543394$;	$h = 1,691747$
а для воды	$A = 1,753097$;	$C = 0,455693$
	$H = 0,753625$;	$h = 1,014975$

Т а б л и ц а III.

Флинтглассъ.

	Ф.	Г.(Л.)
Лучъ	<i>B.—H.</i>	<i>B.—H.</i>
<i>B</i>	± 0	± 0
<i>C</i>	+ 5	+ 1
<i>D</i>	+ 22	+ 10
<i>E</i>	+ 35	+ 18
<i>F</i>	+ 35	+ 19
<i>G</i>	± 0	± 0
<i>H</i>	— 55	— 27

Т а б л и ц а IV.

Вода.

	Ф.	Г.(Л.)
Лучъ	<i>B.—H.</i>	<i>B.—H.</i>
<i>B</i>	± 0	± 0
<i>C</i>	— 12	— 13
<i>D</i>	— 25	— 29
<i>E</i>	— 23	— 28
<i>F</i>	— 20	— 25
<i>G</i>	± 0	± 0
<i>H</i>	+ 25	+ 34.

Таблицы эти показываютъ, что для флинтгласса формула Гельмгольца (Ломмеля) лучше удовлетворяетъ, чѣмъ Фойхта, а для воды, какъ будто, Фойхтова нѣсколько лучше, чѣмъ Гельмгольцева¹.

Теперь можно сдѣлать общій выводъ изъ всего предыдущаго:

1. Формула Фойхта съ тремя постоянными коэффициентами для нѣкоторыхъ тѣлъ противорѣчитъ даннымъ опыта.

2. Формула Фойхта съ двумя коэффициентами, хотя и не противорѣчитъ даннымъ опыта (за отсутствіемъ впрочемъ предѣль-

¹ Вычисляя тѣ-же наблюденія по упрощенной формулѣ Кеттелера: $n^2 - 1 = \frac{K}{\lambda^2 - k}$, получаемъ крайне большія разности, такъ для линіи *C* наблюденіе даетъ $k = 1,61443$, а вычисленіе $1,61784$; причемъ было $K = 798,451$; $k = -450,539072$ (флинтглассъ).

ныхъ наблюдений), но удовлетворяетъ имъ вообще слабѣе подобной-же формулы Гельмгольца (Ломмеля).

Прибавленіе. Изслѣдуя формулу Гельмгольца съ тремя коэффициентами такимъ-же образомъ, какимъ мы изслѣдовали формулу Фойхта, найдемъ, что если $Q > P$ (что имѣетъ мѣсто для флинт-гласса (von Rosette)¹ и нѣкоторыхъ другихъ тѣлъ), то при

$$\lambda^2 = \lambda_m^2 \left(1 + \sqrt{\frac{Q}{Q-P}} \right)$$

показатель n пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Это значеніе можетъ быть вычислено по формулѣ

$$n^2 - 1 = \lambda_m^2 (2Q - P + 2\sqrt{Q(Q-P)}).$$

Пользуясь данными λ_m , P и Q , вычисленными Вюльнеромъ для флинтгласса (von Rosette), найдемъ, что n будетъ минимумъ при

$$= 13^{\mu\mu} 196$$

и значеніе n min. будетъ:

$$n = 1,6027.$$

Но такой результатъ вполне противорѣчитъ опыту, какъ показываютъ измѣренія Мутона (1879) и Ланглея (1884). Такимъ образомъ и о формулѣ Гельмгольца съ тремя коэффициентами должно сказать то-же, что сказано выше о подобной же формулѣ Фойхта.

¹ Для другого сорта флинтгласса $Q < P$, какъ нашелъ Вюльнеръ же (Wied. Ann. Bd. XXIII, S. 311).

ЗАМѢТКА

О ЧАСТНЫХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ ОДНОГО ЛИНЕЙНАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ.

П. С. Флорова.

Обозначимъ чрезъ

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2n}$$

частные интегралы уравненія

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \varphi(x^2)u \quad (1)$$

и положимъ

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} u_1 & , & u_2 & , & u_3 & , & \dots & , & u_{2n} \\ u_1' & , & u_2' & , & u_3' & , & \dots & , & u_{2n}' \\ u_1'' & , & u_2'' & , & u_3'' & , & \dots & , & u_{2n}'' \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ u_1^{(2n-1)} & , & u_2^{(2n-1)} & , & u_3^{(2n-1)} & , & \dots & , & u_{2n}^{(2n-1)} \end{vmatrix} .$$

Продифференцировавъ это равенство $(2n + 1)$ разъ, получимъ, принимая во вниманіе данное уравненіе (1),

$$\frac{d^{2n+1}\omega(x)}{dx^{2n+1}} = \begin{vmatrix} u_1' & , & u_2' & , & u_3' & , & \dots & u_{2n}' \\ u_1'' & , & u_2'' & , & u_3'' & , & \dots & u_{2n}'' \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ u_1^{(2n-1)} & , & u_2^{(2n-1)} & , & u_3^{(2n-1)} & , & \dots & u_{2n}^{(2n-1)} \\ u_1^{(2n+1)} & , & u_2^{(2n+1)} & , & u_3^{(2n+1)} & , & \dots & u_{2n}^{(2n+1)} \end{vmatrix}$$

или

$$\frac{d^{2n+1}\omega(x)}{dx^{2n+1}} = -\varphi(x^2)\omega(x). \quad (2)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\omega(-x)$ есть также интеграль даннаго уравненія (1).

КЪ ТЕОРИИ РАДІУСА КРИВИЗНЫ.

М. Тихомандрицкаго.

Во II. томѣ «Analytische Geometrie des Raumes» Сальмонъ-Фидлера въ § 105 на стр. 140 находимъ формулу:

$$\frac{\sin^2 \omega}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2 \cos \omega}{rr'}, \quad (1)$$

въ которой ρ обозначаетъ радіусъ кривизны линіи пересѣченія двухъ поверхностей, r и r' радіусы кривизны сѣченій тѣхъ же поверхностей нормальными плоскостями, проходящими чрезъ касательную къ линіи ихъ пересѣченія въ разсматриваемой точкѣ; ω уголъ между внѣшними нормальми поверхностей въ той же точкѣ. Въ указанномъ § эта формула доказывается только для случая $\omega = \frac{\pi}{2}$, когда, слѣд., поверхности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, при помощи теоремы Мённе; общая же формула, данная безъ доказательства, употребляется для вывода выраженія $\frac{1}{\rho^2}$ чрезъ частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ отъ функций U и V , представляющихъ первыя части уравненій $U=0$ и $V=0$ поверхностей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ разсматриваемую кривую, причемъ берется въ помощь выраженіе радіуса кривизны нормального сѣченія поверхности, выве-

денное въ § 35, и преобразование знаменателя этого выраженія въ опредѣлитель изъ § 100.

Между тѣмъ формулу (1) можно получить, какъ мнѣ удалось замѣтить это еще 16 лѣтъ тому назадъ, прямо изъ опредѣленія угла смежности съ помощію довольно простыхъ вычисленій, причемъ теорема Мёнье и выраженіе радиуса кривизны плоскаго нормальнаго сѣченія данной поверхности получаются само собою, чрезъ что пріобрѣтается естественный переходъ отъ теории линій двоякой кривизны къ теории кривыхъ поверхностей. Такъ какъ этотъ выводъ ни мною, ни кѣмъ другимъ, сколько мнѣ извѣстно, не былъ еще опубликованъ, то я беру смѣлость предложить его вниманію Математическаго Общества.

1. Пусть

$$\left. \begin{aligned} U = f(x, y, z) = 0 \\ V = F(x, y, z) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будутъ уравненія поверхностей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ кривую линію. Частныя производныя функцій U и V по переменнымъ x, y, z , мы будемъ по Сальмону-Фидлеру обозначать тою-же буквою, приписывая внизу нумера 1, 2, 3, причемъ 1 будетъ указывать на x , 2 на y , 3 на z . Означая чрезъ α, β, γ углы касательной прямой къ линіи пересѣченія поверхностей (1), мы будемъ имѣть для опредѣленія ихъ косинусовъ, какъ извѣстно, такую систему уравненій:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \beta + U_3 \cos \gamma = 0 \\ V_1 \cos \alpha + V_2 \cos \beta + V_3 \cos \gamma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Изъ послѣднихъ двухъ на основаніи извѣстнаго свойства пропорцій, при помощи (2), найдемъ:

$$\frac{\cos \alpha}{\left| \begin{smallmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{smallmatrix} \right|} = \frac{\cos \beta}{\left| \begin{smallmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{smallmatrix} \right|} = \frac{\cos \gamma}{\left| \begin{smallmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{smallmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{\left| \begin{smallmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{smallmatrix} \right|^2}}. \quad (4)$$

Входящая сюда въ четвертый членъ сумма квадратовъ определителей изъ частныхъ производныхъ можетъ быть по известной теоремѣ объ умноженіи определителей представлена такъ:

$$\left| \begin{array}{cc} U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 & U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 \\ V_1 U_1 + V_2 U_2 + V_3 U_3 & V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 \end{array} \right|; \quad (5)$$

раздѣляя теперь первую строку и столбецъ на

$$\Delta_1 U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}, \quad (6)$$

а послѣднія строку и столбецъ на

$$\Delta_1 V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}, \quad (7)$$

и имѣя въ виду, что

$$U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = \Delta_1 U \cdot \Delta_1 V \cos \omega, \quad (8)$$

гдѣ ω уголъ между внѣшними нормальми къ поверхностямъ (1), мы (5) дадимъ такой видъ:

$$(\Delta_1 U)^2 \cdot (\Delta_1 V)^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{vmatrix} = (\Delta_1 U)^2 \cdot (\Delta_1 V)^2 \sin^2 \omega. \quad (9)$$

Такимъ образомъ окончательно получимъ:

$$\sqrt{\left| \begin{smallmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{smallmatrix} \right|^2 + \left| \begin{smallmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{smallmatrix} \right|^2} = \Delta_1 U \cdot \Delta_1 V \sin \omega. \quad (10)$$

2. Угол смежности $d\sigma$ этой кривой по формуль Серре выразится такъ:

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}; \quad (1)$$

чтобы найти входящія сюда $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ и $d\cos\gamma$, мы продифференцируемъ уравненія (2) и (3), что доставитъ намъ такую систему трехъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha d\cos\alpha + \cos\beta d\cos\beta + \cos\gamma d\cos\gamma &= 0 \\ U_1 d\cos\alpha + U_2 d\cos\beta + U_3 d\cos\gamma &= A \\ V_1 d\cos\alpha + V_2 d\cos\beta + V_3 d\cos\gamma &= B, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

гдѣ для краткости положено:

$$\left. \begin{aligned} -\cos\alpha dU_1 - \cos\beta dU_2 - \cos\gamma dU_3 &= A, \\ -\cos\alpha dV_1 - \cos\beta dV_2 - \cos\gamma dV_3 &= B. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рѣшая уравненія (6) по искомымъ дифференціаламъ косинусовъ, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} d\cos\alpha &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & \cos\beta & \cos\gamma \\ A & U_2 & U_3 \\ B & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\ d\cos\beta &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ U_1 & A & U_3 \\ V_1 & B & V_3 \end{vmatrix} \\ d\cos\gamma &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ U_1 & U_2 & A \\ V_1 & V_2 & B \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Если вставить сюда вмѣсто $\cos \alpha$ и проч. ихъ выраженія изъ формуль (4) § 1, то легко найдемъ:

$$D = \sqrt{\left| \frac{U_2 U_3}{V_2 V_3} \right|^2 + \left| \frac{U_3 U_1}{V_3 V_1} \right|^2 + \left| \frac{U_1 U_2}{V_1 V_2} \right|^2} = \Delta_1 U \cdot \Delta_1 V \sin \omega. \quad (6)$$

3. Раскрывая опредѣлители въ (4) пред. § будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} d \cos \alpha &= \frac{1}{D} \left\{ A(V_2 \cos \gamma - V_3 \cos \beta) - B(U_2 \cos \gamma - U_3 \cos \beta) \right\} \\ d \cos \beta &= \frac{1}{D} \left\{ A(V_3 \cos \alpha - V_1 \cos \gamma) - B(U_3 \cos \alpha - U_1 \cos \gamma) \right\} \\ d \cos \gamma &= \frac{1}{D} \left\{ A(V_1 \cos \beta - V_2 \cos \alpha) - B(U_1 \cos \beta - U_2 \cos \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Взявъ сумму квадратовъ этихъ выраженій и имѣя въ виду, что по извѣстной теоремѣ теоріи опредѣлителей

$$\begin{aligned} (U_2 \cos \gamma - U_3 \cos \beta)^2 + (U_3 \cos \alpha - U_1 \cos \gamma)^2 + (U_1 \cos \beta - U_2 \cos \alpha)^2 &= \\ = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma & U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \beta + U_3 \cos \gamma \\ U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \beta + U_3 \cos \gamma & U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 \end{vmatrix} &= \\ = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = (\Delta_1 U)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (V_2 \cos \gamma - V_3 \cos \beta)^2 + (V_3 \cos \alpha - V_1 \cos \gamma)^2 + (V_1 \cos \beta - V_2 \cos \alpha)^2 &= \\ = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = (\Delta_1 V)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_2 \cos \gamma - U_3 \cos \beta)(V_2 \cos \gamma - V_3 \cos \beta) + (U_3 \cos \alpha - U_1 \cos \gamma) \times \\ \times (V_3 \cos \alpha - V_1 \cos \gamma) + (U_1 \cos \beta - U_2 \cos \alpha)(V_1 \cos \beta - V_2 \cos \alpha) &= \\ = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma & U_1 \cos \alpha + U_2 \cos \beta + U_3 \cos \gamma \\ V_1 \cos \alpha + V_2 \cos \beta + V_3 \cos \gamma & U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 \end{vmatrix} &= \\ = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = \Delta_1 U \cdot \Delta_1 V \cos \omega, \end{aligned}$$

а также принимая во вниманіе и (1) и (6) § 2, мы получимъ по сокращеніи и умноженіи на $\sin^2 \omega$:

$$\sin^2 \omega d\sigma^2 = \left(\frac{A}{\Delta_1 U} \right)^2 - 2 \left(\frac{A}{\Delta_1 U} \right) \cdot \left(\frac{B}{\Delta_1 V} \right) \cos \omega + \left(\frac{B}{\Delta_1 V} \right)^2. \quad (2)$$

4. Раздѣляя это на ds , и полагая для краткости

$$-\frac{A}{ds} = M, \quad -\frac{B}{ds} = N, \quad (1)$$

мы получимъ, имѣя въ виду, что

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad (2)$$

слѣдующее выраженіе для радиуса кривизны ρ :

$$\left(\frac{\sin \omega}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{M}{\Delta_1 U}\right)^2 - 2\left(\frac{M}{\Delta_1 U}\right) \cdot \left(\frac{N}{\Delta_1 V}\right) \cos \omega + \left(\frac{N}{\Delta_1 V}\right)^2 \quad (3)$$

здѣсь по (1) этого § и (2) § 2, на основаніи того, что

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}, \quad (4)$$

будетъ:

$$\left. \begin{aligned} M &= U_{11} \cos^2 \alpha + U_{22} \cos^2 \beta + U_{33} \cos^2 \gamma + 2U_{23} \cos \beta \cos \gamma + \\ &\quad + 2U_{31} \cos \gamma \cos \alpha + 2U_{12} \cos \alpha \cos \beta \\ N &= V_{11} \cos^2 \alpha + V_{22} \cos^2 \beta + V_{33} \cos^2 \gamma + 2V_{23} \cos \beta \cos \gamma + \\ &\quad + 2V_{31} \cos \gamma \cos \alpha + 2V_{12} \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \right\} (5)$$

5. Если $V=0$ будетъ представлять плоскость, то всѣ V_{ik} ($i, k=1, 2, 3$), а слѣд. и N равны нулю, а потому формула (3) по извлеченіи квадратнаго корня приметъ такой видъ:

$$\frac{\sin \omega}{\rho} = \pm \frac{M}{\Delta_1 U}, \quad (1)$$

или внося вмѣсто M и $\Delta_1 U$ ихъ значенія:

$$\frac{\sin \omega}{\rho} = \frac{U_{11} \cos^2 \alpha + U_{22} \cos^2 \beta + U_{33} \cos^2 \gamma + 2U_{23} \cos \beta \cos \gamma + 2U_{31} \cos \gamma \cos \alpha + 2U_{12} \cos \alpha \cos \beta}{\pm \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}} \quad (2)$$

Въ этой формулѣ вторая часть зависитъ лишь отъ направленія касательной къ линіи пересѣченія поверхности $U=0$ плоскостью $V=0$, направленія, опредѣляемаго углами α, β, γ , но не зависитъ отъ угла наклоненія сѣкущей плоскости $V=0$ къ касательной плоскости къ поверхности $U=0$; слѣд. она сохранится и тогда, когда будетъ $\omega = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда сѣкущая плоскость будетъ нормальная къ $U=0$; но тогда первая часть (2) обратится въ $\frac{1}{r}$, обозначая чрезъ r радіусъ нормального сѣченія поверхности $U=0$; слѣд. мы получаемъ, во-первыхъ, выраженіе этого радіуса:

$$\frac{1}{r} = \frac{U_{11} \cos^2 \alpha + U_{22} \cos^2 \beta + U_{33} \cos^2 \gamma + 2U_{23} \cos \beta \cos \gamma + 2U_{31} \cos \gamma \cos \alpha + 2U_{12} \cos \alpha \cos \beta}{\pm \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}} \quad (3)$$

и, во-вторыхъ, равенство:

$$\frac{\sin \omega}{\rho} = \frac{1}{r}, \quad (4)$$

которое выражаетъ теорему Мёнье. Оно приметъ обычную форму, если ввести вмѣсто угла ω между нормалью къ поверхности и нормалью къ сѣкущей плоскости, уголъ θ между самою сѣкущей плоскостью и нормалью къ поверхности; тогда $\theta = 90 - \omega$, и слѣд. $\sin \omega = \cos \theta$ и равенство (4) приводится къ слѣдующему:

$$\rho = r \cos \theta. \quad (5)$$

6. И такъ, по (1) и (4) пред. §:

$$\pm \frac{M}{\Delta_1 U} = \frac{1}{r}; \quad (1)$$

и точно такъ-же

$$\pm \frac{N}{\Delta_1 V} = \frac{1}{r'}; \quad (2)$$

означая чрезъ r' радіусъ нормального сѣченія поверхности $V=0$; внося это въ (3) § 4, получимъ:

$$\left(\frac{\sin \omega}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2 \cos \omega}{rr'} + \frac{1}{r'^2}, \quad (3)$$

т. е. ту самую формулу, которая послужила Фидлеру для вывода выраженія кривизны чрезъ производныя функций U и V , но приведена имъ безъ доказательства. Эта формула говоритъ намъ, что, складывая кривизны сѣченій обѣихъ поверхностей нормальными плоскостями, проходящими чрезъ касательную къ линіи пересѣченія поверхностей, по закону параллелограмма силъ, представляя для этого кривизны отрѣзками прямыхъ, отложенными по соотвѣтственнымъ нормалямъ къ поверхностямъ, мы получимъ въ діагоналѣ его величину $\frac{\sin \omega}{\rho}$, изъ которой получается кривизна линіи пересѣченія поверхностей, чрезъ раздѣленіе на \sin угла между ихъ нормалями.

7. Изъ формулы (3) можно вывести другую болѣе изящную. Если означимъ чрезъ r радіусъ кривизны сѣченія поверхности $U=0$ плоскостью касательною къ поверхности $V=0$, а чрезъ r' радіусъ кривизны сѣченія этой послѣдней поверхности (т. е. $V=0$), плоскостью касательною въ первой (т. е. $U=0$), то, имѣя въ виду, что каждая изъ касательныхъ плоскостей дѣлаетъ съ нормалью къ другой уголъ, дополняющій уголъ ω внѣшнихъ нормалей поверхностей до прямого, мы по теоремѣ Мёнье (формула (4) § 5) будемъ имѣть:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \omega}{r'}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \omega}{r'}; \quad (2)$$

вставляя это въ формулу (3) предыдущаго § будемъ имѣть по сокращеніи на $\sin^2 \omega$:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2 \cos \omega}{rr'} + \frac{1}{r'^2}, \quad (3)$$

— формула, которая говоритъ, что кривизна линіи пересѣченія двухъ поверхностей есть сложная по закону параллелограмма силъ изъ кривизны сѣченій каждой поверхности плоскостью, касательною къ другой.

18⁸/_v86.

РАЗНОСТЬ

n-ГО ПОРЯДКА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

М. А. Тихомандрицкого.

Пусть дана некоторая функция u_x от переменной x ; разность n -го порядка этой функции через члены ряда ее значений:

$$u_x, u_{x+h}, u_{x+2h} \dots u_{x+nh}, \quad (1)$$

соответствующих последовательному увеличению значений x на h , выражается, какъ известно, такимъ образомъ:

$$\Delta^n u_x = u_{x+nh} - C_1^n u_{x+(n-1)h} + C_2^n u_{x+(n-2)h} - \dots + (-1)^n u_x, \quad (2)$$

гдѣ C_m^n обозначаетъ m -ый биноміальный коэффициентъ; разность n -го порядка отъ $\log u_x$ выразится через члены ряда (1), если возьмемъ логарифмъ отъ дроби, числитель которой будетъ состоять изъ произведенія тѣхъ членовъ этого ряда, предъ которыми въ формулѣ (2) стоитъ знакъ $+$, знаменатель же изъ произведенія тѣхъ, предъ которыми стоитъ знакъ $-$, — возвышенныхъ каждый въ степень, показываемую его коэффициентомъ въ той же формулѣ (2), такимъ образомъ:

$$\Delta^n \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots} \right\} \quad (3)$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ послѣдовательно:

$$\Delta \log u_x = \log u_{x+h} - \log u_x = \log \frac{u_{x+h}}{u_x};$$

$$\Delta^2 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}} - \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2};$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 \log u_x &= \Delta \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2} = \log \frac{u_{x+3h} u_{x+h}}{(u_{x+2h})^2} - \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2} = \\ &= \log \frac{u_{x+3h} (u_{x+h})^3}{(u_{x+2h})^3 u_x}; \end{aligned}$$

и т. д. — результаты, которые получаются изъ (3), полагая въ ней $n = 1, 2, 3,$ и т. д.; такъ что остается только показать, что наша формула, разъ она вѣрна до порядка $n,$ будетъ вѣрна и для непосредственно слѣдующаго, а слѣдовательно и для всякаго порядка. Для этого беремъ разность отъ обѣихъ частей (3); будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} \log u_x &= \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots} \right\} - \\ &= \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2^n} \cdot (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_3^n} \dots} \right\} = \\ &= \log \left\{ \frac{u_{x+(n-1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n + C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n + C_3^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n + 1} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n + C_2^n} \dots} \right\}; \end{aligned}$$

но, по известнымъ свойствамъ биноміальныхъ коэффициентовъ,

$$C_1^{n+1} = C_1^{n+1}; C_2^n + C_1^n = C_2^{n+1}; C_3^n + C_2^n = C_3^{n+1}; C_4^n + C_3^n = C_4^{n+1},$$

и т. д.;

слѣд. мы получаемъ:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^{n+1}} \cdot (u_{x+(n-3)h})^{C_4^{n+1}} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^{n+1}} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^{n+1}} \dots} \right\},$$

— результатъ, который получается изъ (3) чрезъ перемѣну n на $n + 1$, что и доказываетъ справедливость нашей формулы для всякаго значенія n .

Такимъ образомъ формула (3) выводится непосредственно изъ самаго опредѣленія конечной разности; но ее можно получить еще скорѣе изъ формулы (2), перемѣнивъ въ послѣдней u_x на $\log u_x$ и соединивъ затѣмъ все члены въ одинъ на основаніи известныхъ свойствъ логарифма.