ПРИЛОЖЕНІЕ
ОСНОВНЫХЪ ФОРМУЛЪ ТЕОРІИ
МЕЖДУПРЕДѢЛЬНАГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЯ КЪ СУММОВАНІЮ
БЕЗКОНЕЧНЫХЪ РЯДОВЪ.

П. С. Флорова.

Въ этой замѣткѣ излагаются рѣшенія трехъ задачъ, относящихся къ суммованію безконечныхъ рядовъ, изъ которыхъ одинъ дается явно, а другіе посредствомъ дифференціальныхъ уравненій. Пріемъ[1], помощью котораго рѣшаются эти задачи, основанъ на теоріи междупредѣльнаго дифференцированія и однажды (вторая книжка «Сообщеній» за 1885 годъ) былъ уже употребленъ нами для суммованія строки интегрирующей двучленное дифференціальное уравненіе.

Задача 1.

Выразить сумму безконечнаго ряда

$$\frac{1}{\Gamma(1)^n}+\frac{x}{\Gamma(2)^n}+\frac{x^2}{\Gamma(3)^n}+\frac{x^3}{\Gamma(4)^n}+\ldots\ldots$$

въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Рѣшеніе. Обозначивъ эту сумму черезъ u и принявъ во вниманіе отношеніе

$$\Gamma(1+np)=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\, n^{np+\frac{1}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)$$

получимъ

$$u=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+\frac{1}{2}}x^p}{\Gamma(1+np)}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma(1+p)};$$

это равенство посредствомъ извѣстной формулы А. В. Лѣтникова

$$x^{-p}D^{-\frac{i}{n}}x^{p-\frac{i}{n}}=\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right):\Gamma(1+p),$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $x=0$, легко приводится къ равенству

$$u=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(D^{-\frac{i}{n}}x^{-\frac{i}{n}}\right)\theta(x),$$

въ которомъ, обозначая черезъ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n=1$, для краткости положено:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+1}x^p}{\Gamma(1+np)}=\theta(x)=\sum_{p=0}^{n-1}e^{n\lambda^p x^{\frac{1}{n}}}.$$

Употребивъ формулу А. В. Лѣтникова, выражающую переходъ отъ обобщенныхъ производныхъ къ опредѣленнымъ интеграламъ, и принявъ во вниманіе отношеніе

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

найдемъ:

$$u=(2\pi)^{1-n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^{\alpha_{i-1}}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{i}{n}-1}\alpha_i^{-\frac{i}{n}}d\alpha_i\right)\theta(\alpha_{n-1}),$$

гдѣ $\alpha_0=x$. Это и есть искомое рѣшеніе задачи; оно легко повѣряется помощью слѣдующихъ разсужденій.

Повѣрка. Если перемѣнныя, по которымъ производятся интегрированія, измѣнимъ по формулѣ:

$$\alpha_i=\alpha_{i-1}\beta_i=x\beta_1\beta_2\ldots\beta_i,$$

то будемъ имѣть

$$u=(2\pi)^{1-n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^1(1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1}\beta_i^{-\frac{i}{n}}d\beta_i\right)\theta(x\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}).$$

Развернувъ функцію θ по степенямъ аргумента, получимъ:

$$u=(2\pi)^{1-n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+1}x^p}{\Gamma(1+np)}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^1(1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1}\beta_i^{p-\frac{i}{n}}d\beta_i\right).$$

Отсюда наконецъ посредствомъ формулы

$$\int_0^1(1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1}\beta_i^{p-\frac{i}{n}}d\beta_i=\frac{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma(1+p)}$$

найдемъ:

$$u=\frac{1}{\Gamma(1)^n}+\frac{x}{\Gamma(2)^n}+\frac{x^2}{\Gamma(3)^n}+\frac{x^3}{\Gamma(4)^n}+\ldots.$$

Это и нужно было показать.

Задача 2.

Выразить строку опредѣляемую уравненіемъ

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

въ обобщенныхъ производныхъ.

Рѣшеніе. Если корни уравненія

$$[m]^n + \beta_1 [m]^{n-1} + \ldots + \beta_k [m]^{n-k} = 0,$$

которые будемъ предполагать вещественными, обозначимъ черезъ

$$0 \;\; 1 \;\; 2 \ldots\ldots n-k+1 \;\; \alpha_1 \;\; \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k$$

и если положимъ

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \ldots\ldots,$$

то будемъ имѣть

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(m_p - \alpha_1)(m_p - \alpha_2)\ldots(m_p - \alpha_k)\,\Gamma(1+m_p)}{(m_p - n+1)(m_p - n+2)\ldots(m_p - n+k)\,\Gamma(1+m_p - n)} A_p x^{m_p - n}.$$

Равенства правыхъ частей отношеній для u можно достигнуть положеніемъ

$$m_p = np + m,$$

гдѣ m одно изъ чиселъ ряда

$$0 \;\; 1 \;\; 2 \ldots\ldots n-k+1 \;\; \alpha_1 \;\; \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k,$$

и положеніемъ

$$(m+n-\alpha_1+np)\ldots(m+n-\alpha_k+np)\Gamma(1+m+n+np)A_{p+1}=$$
$$=(1+m+np)(2+m+np)\ldots(k+m+np)\Gamma(1+m+np)A_p,$$

рѣшеніе котораго относительно A_p въ связи съ окончательнымъ рѣшеніемъ предложенной задачи разсмотримъ въ слѣдующихъ случаяхъ.

Случай 1. Пусть m будетъ одно изъ чиселъ ряда

$$0\ 1\ 2\ldots\ldots n-k+1;$$

при этомъ условіи интегралъ уравненія опредѣляющаго A_p легко приводится къ виду

$$A_p=\frac{\mathrm{Const}}{\Gamma(1+m+np)}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\frac{m+i}{n}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-\alpha_i}{n}+p\right)}.$$

Такъ какъ относительно m нами сдѣлано допущеніе $m+1>0$, то выраженіе

$$\Gamma\left(\frac{m+i}{n}+p\right):\Gamma\left(\frac{m+n-\alpha_i}{n}+p\right)$$

можно замѣнить выраженіемъ

$$z^{\frac{\alpha_i-m}{n}-p}D_z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}}z^{\frac{m+i}{n}+p-1},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $z=0$. Сдѣлавъ эту замѣну самымъ дѣломъ и положивъ

$$\mathrm{Const}=n,\quad z=x^n,$$

получимъ

$$A_p x^{np+m} = z\prod_{i=1}^{k}\left(z^{\frac{\alpha_i-n+i-1}{n}} D_z z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}}\right)\frac{nz^{\frac{m+k}{n}+p-1}}{\Gamma(1+m+np)}$$

Взявъ сумму отъ обѣихъ частей этого равенства въ предѣлахъ отъ $p=0$ до $p=\infty$ и принявъ во вниманіе тождество

$$\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^{-mp} e^{\lambda^p x} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{nx^{np+m}}{\Gamma(1+m+np)},$$

въ которомъ λ означаетъ первообразный корень уравненія $\lambda^n=1$, найдемъ:

$$u = z\prod_{i=1}^{k}\left(z^{\frac{\alpha_i-n+i-1}{n}} D_z z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}}\right) z^{\frac{k-n}{n}}\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^{-mp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

Случай 2. Если сдѣлаемъ положенія

$$m=\alpha_r \quad \alpha_i - n + i = n\delta_i$$

и если подъ δ_r будемъ разумѣть нуль или цѣлое положительное число, а подъ δ съ другими нумерами какія угодно цѣлыя числа, то изъ уравненія опредѣляющаго A_p легко найдемъ

$$A_{p-\delta_r} = \frac{[q_1]^{\delta_1}[q_2]^{\delta_2}\ldots[q_k]^{\delta_k}}{\Gamma(1+n-r+np)\,\mathrm{Const}},$$

гдѣ при δ_i положительномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p,$$

а при δ_i отрицательномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p + 1.$$

Полученная формула посредствомъ отношенія

$$z^{\frac{r-i}{n} - p + \delta_i} D_z^{\delta_i} z^{\frac{i-r}{n} + p} = [q_i]^{\delta_i}$$

и допущеній

$$n\,\mathrm{Const} = 1, \quad z = x^n,$$

безъ труда преобразуется въ такую

$$A_{p-\delta_r} x^{np-n\delta_r+m} = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) \frac{nz^{\frac{k-r}{n}+p}}{\Gamma(1+n-r+np)}$$

Замѣтивъ, что $A_{p-\delta_r}$ при p равномъ любому числу ряда

$$0 \; 1 \; 2 \ldots\ldots \delta_r - 1$$

есть нуль, и взявъ сумму отъ обѣихъ частей предыдущаго равенства въ предѣлахъ отъ $p=0$ до $p=\infty$, получимъ

$$u = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}},$$

гдѣ λ по прежнему означаетъ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$. При вычисленіи функціи u по этой формулѣ не должно принимать во вниманіе тѣхъ постоянныхъ произвольныхъ, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{\delta_i}$ при δ_i отрицательномъ.

Случай 3. Если предположимъ теперь

$$m = \alpha_r \quad \alpha_i - n + i = -n\delta_i$$

и если подъ δ_r условимся понимать цѣлое положительное число отличное отъ нуля, а подъ δ съ другими нумерами какія угодно цѣлыя числа, то коэффиціенты строки

$$A_0x^m + A_1x^{n+m} + A_2x^{2n+m} + \ldots .$$

получатъ слѣдующія значенія

$$A_{p+\delta_r} = \frac{[q_1]^{-\delta_1}[q_2]^{-\delta_2}\ldots .[q_k]^{-\delta_k}}{\Gamma(1+n-r+np)\,\mathrm{Const.}}$$

$$(k-r)!\,A_{\delta_r-1} =$$

$$=(n\delta_1-r+1)(n\delta_2-r+2)\ldots(n\delta_k-r+k)(n-r)!\,A_{\delta_r}$$

$$A_{\delta_r-p} = \frac{\Gamma(r-n+np)\,\mathrm{C'onst.}}{[\rho_1]^{\delta_1}[\rho_2]^{\delta_2}\ldots[\rho_k]^{\delta_k}}\cdot\frac{(-1)^{(n+1)p}\,\delta_r!}{(p-1)!\,(\delta_r-p)!}.$$

Въ первомъ изъ этихъ равенствъ p измѣняется отъ нуля до ∞, въ послѣднемъ отъ единицы до δ_r; кромѣ того при δ_i положительномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p + 1$$

$$\varrho_i = \frac{\delta_r - p + 1}{(i-r)!\,(r-i)!} + \frac{r-i}{n} + p - 1,$$

а при δ_i отрицательномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p$$

$$\varrho_i = \frac{r-i}{n} + p.$$

Связь между постоянными Const и C'onst, изъ которыхъ одно произвольно, выражается отношеніемъ

$$\mathrm{Const.}\ \mathrm{C'onst} = n(-1)^{n+r+\delta_r+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k}.$$

Если воспользуемся формулой

$$z^{\frac{r-i}{n}-p-\delta_i} D_z^{-\delta_i} z^{\frac{i-r}{n}+p} = [q_i]^{-\delta_i}$$

и если сдѣлаемъ положенія

$$n\mathrm{Const} = 1, \quad z = x^n,$$

то получимъ

$$u = z^{1-\delta_r-\frac{r}{n}} (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{\delta_r - 1} z^{\delta_r - 1}) +$$

$$+ z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{-\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{-\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

Понятно, что функцію u можно вычислить и помощью отношенія

$$u = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{-\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{-\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}},$$

если условиться при этомъ вычисленіи—тѣ постоянныя произвольныя, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{-\delta_r}$, принимать во вниманіе, а тѣ, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{-\delta_i}$ при i отличномъ отъ r (буде δ_i положительное число), опускать.

Примѣчаніе 1. Сходимость разсмотрѣнныхъ нами строкъ весьма легко усматривается изъ тѣхъ значеній A_p, которыя мы нашли для этого коэффиціента; вотъ причина, по которой мы обошли молчаніемъ вопросъ о сходимости.

Примѣчаніе 2. Изложенный выше анализъ показываетъ, что если имѣетъ мѣсто отношеніе

$$\alpha_i - n + i = n\delta_i,$$

гдѣ δ_i какое угодно цѣлое число, и если условиться принимать во вниманіе всѣ постоянныя произвольныя вводимыя дѣйствіями $D_z^{\delta_i}$, то полный интегралъ уравненія для u можно представить въ видѣ:

$$u = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}},$$

гдѣ λ любой корень уравненія $\lambda^n = 1$, а $z = x^n$.

Мысль, которую мы сейчасъ высказали, можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ.

Если корни уравненія

$$[m]^n + \beta_i [m]^{n-1} + \ldots + \beta_k [m]^{n-k} = 0$$

по модулю n соотвѣтственно сравнимы съ числами ряда

$$0 \ 1 \ 2 \ldots . n-1,$$

то полный интегралъ уравненія

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

выражается конечною формой.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе:

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \frac{n(r+k)}{x} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{nr(nk+1)}{x^2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} = u.$$

Если r и k цѣлыя числа, то интегралъ его, безъ сомнѣнія, будетъ

$$u = z^{k + \frac{n-1}{n}} D_z^k z^{r - \frac{1}{n}} D_r^r z^{\frac{2-n}{n}} e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}}.$$

Примѣчаніе 3. Дифференціальное уравненіе

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

въ интегрируемыхъ случаяхъ было предметомъ изслѣдованій В. П. Алексѣевскаго (третья книжка «Сообщеній» за 1884 годъ). Мы рѣшились вновь говорить объ этомъ уравненіи потому, что употребленный нами способъ его интегрированія не только раскрылъ простѣйшую форму его интеграловъ въ интегрируемыхъ случаяхъ, но и оказался годнымъ для вычисленія $n-k$ частныхъ его рѣшеній въ неинтегрируемыхъ случаяхъ.

Задача 3.

Выразить строку опредѣляемую, уравненіемъ

$$x^k \frac{d^{n+k} u}{dx^{n+k}} = x^k \frac{d^k u}{dx^k} + \beta_1 x^{k-1} \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} + \ldots + \beta_{k-1} x \frac{du}{dx} + \beta_k u,$$

въ обобщенныхъ производныхъ.

Рѣшеніе этой задачи мы разсмотримъ лишь въ томъ частномъ случаѣ, когда корни уравненія

$$[m]^k + \beta_1 [m]^{k-1} + \ldots + \beta_{k-1} m + \beta_k = 0$$

вещественны и когда каждый изъ нихъ меньше k.

Если назовемъ эти корни черезъ

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k$$

и если положимъ

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \ldots,$$

то будемъ имѣть

$$x^k \frac{d^{n+k}u}{dx^{n+k}} = \sum_{p=0}^{\infty} m_p(m_p-1)\ldots(m_p-n-k+1)A_p x^{m_p-n}$$

$$x^k \frac{d^{n+k}u}{dx^{n+k}} = \sum_{p=0}^{\infty} (m_p-\alpha_1)(m_p-\alpha_2)\ldots(m_p-\alpha_k)A_p x^{m_p}.$$

Замѣтивъ, что правыя части этихъ отношеній при условіяхъ

$$m_p = p+k$$

$$A_p = \frac{\lambda^p}{\Gamma(1+p)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\frac{p+k-\alpha_i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p+k+n-i}{n}\right)},$$

гдѣ λ любой корень уравненія $\lambda^n = 1$, дѣлаются равными между собою, получимъ

$$u = \prod_{i=1}^{k}\left(D_z^{\frac{i-\alpha_i-n-1}{n}} z^{\frac{i-\alpha_i-n}{n}}\right) e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}}.$$

Таково рѣшеніе предложенной задачи; въ немъ $z = x^n$.

Изъ него же между прочимъ видно, что n интеграловъ уравненія для u выразятся конечною формой, если числа

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k$$

по модулю n будутъ сравнимы съ числами ряда

$$1 \; 2 \ldots\ldots k.$$

Красная Слобода.
5 Февраля 1886 года.