О ТЕОРІИ ДИСПЕРСІИ ФОЙХТА.

А. П. Грузинцева.

Въ 1883 году профессоръ Фойхтъ опубликовалъ въ Анналахъ Видемана двѣ работы по теоріи дисперсіи свѣта; въ одной изъ нихъ, именно въ первой, онъ разбираетъ теорію дисперсіи, данную Кеттелеромъ, въ другой — излагаетъ свою собственную. Относительно теоріи Кеттелера онъ приходитъ къ тому же выводу, къ которому пришелъ и я за годъ ранѣе его[1], именно, что теорія Кеттелера не состоятельна; поэтому здѣсь мы не будемъ заниматься первою статьей Фойхта, а обратимъ вниманіе только на вторую, въ которой Фойхтъ излагаетъ свою собственную теорію дисперсіи для прозрачныхъ срединъ; этою послѣднею мы и займемся здѣсь.

Фойхтъ, подобно другимъ физикамъ, занимавшимся теоріей дисперсіи, принимаетъ существованіе вліянія матерьяльныхъ частицъ тѣла на эфиръ и обратно — эфира на матерію. Основныя уравненія своей теоріи онъ пишетъ сначала въ слѣдующей формѣ:

[1] Сообщенія харьк. мат. общц. за 1882 г., вып. I, стр. 23 и 35, или также — «О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ». Харьковъ. 1882.

$$m\frac{d^2u}{dt^2}=X'+X+A$$

$$m\frac{d^2v}{dt^2}=Y'+Y+B$$

$$m\frac{d^2w}{dt^2}=Z'+Z+C$$

это для движенія эфирной частицы, причемъ значеніе буквъ слѣдующее: m—масса колеблющейся эфирной частицы, u, v, w—составляющія ея колебанія; X', Y', Z' составляющія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эфиръ; X, Y, Z составляющія упругихъ силъ эфира и наконецъ A, B, C—составляющія силы взаимодѣйствія матерьяльныхъ частицъ на эфирную.

Для матерьяльной частицы уравненія будутъ:

$$\mu\frac{d^2U}{dt^2}=\Xi'+\Xi+\mathrm{A}$$

$$\mu\frac{d^2V}{dt^2}=\mathrm{H}'+\mathrm{H}+\mathrm{B}$$

$$\mu\frac{d^2W}{dt^2}=\mathrm{Z}'+\mathrm{Z}+\Gamma.$$

Здѣсь значенія буквъ очевидны.

Фойхтъ, руководствуясь смысломъ закона дѣйствія и противодѣйствія, принимаетъ, что

$$A+\mathrm{A}=0,\quad B+\mathrm{B}=0,\quad C+\Gamma=0.\qquad\text{(a)}$$

Чтобы получить рѣшеніе написанныхъ здѣсь уравненій, надо знать выраженіе всѣхъ силъ въ функціи координатъ и составляющихъ колебаній частицъ, какъ эфирныхъ такъ и матерьяльныхъ. Эти выраженія для силъ X, $\Xi, \ldots$ извѣстны изъ теоріи упругости; силы X', $\Xi', \ldots$ всегда можемъ предположить равными нулю, такъ что остается только вычислить силы A, B и C, ибо силы А, В и Г найдутся тогда изъ уравненій (а), и въ этомъ—центръ тяжести вопроса. Эти силы A, B и C неизвѣстны и могутъ быть найдены при современныхъ нашихъ знаніяхъ только болѣе или менѣе гипотетически. Фойхтъ опредѣляетъ ихъ такими, чтобы онѣ удовлетворяли закону сохраненія энергіи, и даетъ для каждой изъ нихъ по *8*—различныхъ выраженій, изъ которыхъ *6* имѣютъ видъ, встрѣчающійся въ другихъ физическихъ теоріяхъ; Фойхтъ ихъ и оставляетъ; изъ нихъ 4 формы необходимы, по мнѣнію Фойхта, для теоріи дисперсіи и двойного преломленія, и *2* остальныя для теоріи круговой поляризаціи; при этомъ онъ замѣчаетъ, что другихъ формъ для силъ A, B и C не можетъ существовать, съ чѣмъ однако нельзя вполнѣ согласиться, такъ какъ условію, которому должны подчиняться силы A, B и C, можно удовлетворить безчисленнымъ множествомъ рѣшеній; Фойхтъ выбралъ только простѣйшія. Но, какъ бы то ни было, всегда возможно допустить тѣ формы, которыя Фойхтъ приписываетъ силамъ A, $B, \ldots$ онѣ не противорѣчатъ ни закону сохраненія энергіи, ни тѣмъ взглядамъ, коихъ вообще держатся физики относительно силъ взаимодѣйствія между частицами тѣлъ.

Затѣмъ приступая къ нахожденію окончательныхъ рѣшеній уравненій, написанныхъ выше, Фойхтъ предполагаетъ, что колебанія матерьяльныхъ частицъ настолько малы, что ими можно пренебречь въ сравненіи съ колебаніями эфирныхъ частицъ; такимъ образомъ у Фойхта остается только первая система уравненій, относящихся къ эфирнымъ колебаніямъ. Подставляя въ эти уравненія значенія силъ A, B и C, можно получить связь между показателемъ преломленія и длиной волны, т. е. формулу, выражающую законъ дисперсіи.

Предположеніе Фойхта о неподвижности матерьяльныхъ частицъ[1] едва-ли можно принять, во-первыхъ, потому, что механическая теорія теплоты предполагаетъ и доказываетъ прямо противоположное, а, во-вторыхъ, предположеніе, что матерьяльныя частицы неподвижны, приводитъ къ математическому противорѣчію; дѣйствительно, если $U = V = W = 0$, тогда и $\Xi = \mathrm{H} = \mathrm{Z} = 0$, а потому и $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \Gamma = 0$, т. е., по уравненіямъ (a) и $A = B = C = 0$, слѣдовательно нѣтъ силъ взаимодѣйствія между эфиромъ и матеріей.

Такимъ образомъ основныя уравненія теоріи Фойхта едва-ли можно считать вполнѣ вѣрными съ теоретической точки зрѣнія.

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ выводы Фойхта подтверждаются данными опытами, что собственно и имѣетъ въ виду настоящая статья; такое сравненіе я считаю тѣмъ болѣе необходимымъ, что самъ авторъ не произвелъ его[2].

Для связи между показателемъ преломленія и длиной волны Фойхтъ даетъ формулу[3], которую я привожу къ виду:

$$n^2 = \frac{\lambda^2(A - B\lambda^2)}{\lambda^2 - C}, \qquad \textbf{(1)}$$

причемъ A, B, C суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, характеризующіе данную прозрачную средину; n показатель преломленія луча, λ длина волны для того-же луча въ пустотѣ (т. е. въ міровомъ эфирѣ); это количество у Фойхта обозначено буквой λ_0. Эта формула должна имѣть мѣсто для всѣхъ лучей спектра. Относительно коэффиціента B Фойхтъ замѣчаетъ, что онъ по всей вѣроятности равенъ нулю, но теорія не показываетъ это-

---

[1] Такое предположеніе было сдѣлано еще Коши, но, какъ показалъ Бріо, оно приводитъ къ противорѣчію съ опытомъ.

[2] Необходимо напомнить, что рѣчь идетъ о прозрачныхъ срединахъ, такъ какъ для срединъ, поглощающихъ свѣтъ, такое сравненіе произведено самимъ Фойхтомъ.

[3] Wied. Ann. Bd. XIX, S. 885, und Bd. XX, S. 452.

го, почему мы его пока сохранимъ.

Формулу подобную (1) предлагалъ еще Нейманъ-отецъ на своихъ лекціяхъ (въ 1858 г.), но эти лекціи изданы только въ прошломъ году[1].

Изслѣдуемъ формулу[2] (1).

Прежде всего видимъ, что n можетъ быть дважды нулемъ: во-первыхъ, когда

$$\lambda = 0$$

и, во-вторыхъ, когда

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{B}}\,.$$

Первый случай показываетъ, что для очень короткихъ волнъ показатель преломленія очень малъ, что̀ противорѣчитъ опыту.

Обратимся затѣмъ ко второму. Количество A, какъ показываетъ сравненіе формулы (1) съ данными опыта, для всѣхъ прозрачныхъ срединъ положительно; что-же касается B, то оно можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ; въ первомъ случаѣ λ послѣдней формулы дѣйствительное количество, а во второмъ мнимое. Первый случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для воды, а второй для флинтгласса. Вычисленныя ниже значенія A и B даютъ въ случаѣ воды:

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{B}} = 123^{\mu\mu},323,$$

гдѣ знакъ $\mu\mu$ есть знакъ 0,0001 миллиметра.

Такія волны должны лежать далеко въ области инфра-красныхъ лучей, но опытъ такъ далеко не шелъ, наибольшія изъ наблюденныхъ λ въ за-красномъ концѣ солнечнаго спектра дости-

[1] Vorlesungen über die Theorie der Elasticität etc. S. 296.

[2] Формулу Фойхта Кеттелеръ (Theoretische Optik, S. 36) ошибочно считаетъ формулой съ 4-мя постоянными коэффиціентами.

гали только до $27^{\mu\mu},0$[1]; наблюденій же n для воды въ этой области не было произведено.

Такимъ образомъ опытъ здѣсь ничего недаетъ для непосредственнаго сравненія съ формулой.

Кромѣ нулевыхъ значеній n существуютъ еще безконечныя. При

$$\lambda = \sqrt{C}$$

показатель преломленія n обращается въ безконечность. Количество C можно опредѣлить изъ опыта; ниже приведены значенія C для воды и одного сорта флинтгласса, вычисляя по нимъ λ_∞, получимъ:

для воды

$$\lambda_\infty = 0^{\mu\mu},6311$$

для флинтгласса

$$\lambda_\infty = 1^{\mu\mu},0691.$$

Такія волны лежатъ въ области ультра-фіолетовыхъ лучей, но наблюденіе такъ далеко еще не доведено; наименьшее изъ наблюденныхъ λ для ультра-фіолетовыхъ лучей есть

$$\lambda = 1^{\mu\mu},856 \text{ (крайняя изъ алюминіевыхъ линій),}$$

какъ показали наблюденія Саразена.

Такимъ образомъ и здѣсь на границѣ значеній n наблюденіе ничего не даетъ для прямой и непосредственной повѣрки теоріи.

Обратимся къ промежуточнымъ значеніямъ n.

Найдемъ наибольшія и наименьшія значенія n отличныя отъ 0 и ∞. Такъ-какъ n количество положительное, то maximum и minimum n наступаютъ одновременно съ max. и min. n^2, поэтому условіе для max. и min. n будетъ слѣдующее:

$$\frac{d(n^2)}{d\lambda} = 0.$$

---

[1] *Langley*, Wied. Ann. Bd. XXII, 1884. S. 607.

Но

$$\frac{d(n^2)}{d\lambda} = -\frac{\lambda(B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC)}{(\lambda^2 - C)^2}. \quad (2)$$

Слѣдовательно для того, чтобы $\frac{d(n^2)}{d\lambda}$ было нуль, необходимо, чтобы

$$\lambda(B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC) = 0,$$

а это даетъ:

$$B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC = 0.$$

Отсюда находимъ:

$$\lambda_m{}^2 = C \pm \sqrt{C^2 - \frac{AC}{B}},$$

обозначивъ это частное значеніе λ знакомъ λ_m.

Но $\lambda_m{}^2$ количество дѣйствительное и положительное, поэтому, если

$$A > 0, \quad C > 0,$$

чтó имѣетъ мѣсто для всѣхъ прозрачныхъ срединъ, то если 1) $B < 0$, то передъ радикаломъ надо брать знакъ $+$, тогда

$$\lambda_m{}^2 = C + \sqrt{C^2 - \frac{AC}{B}}. \quad (3)$$

Такой случай имѣетъ мѣсто для флинтгласса.

2) $B > 0$ (что имѣетъ мѣсто для воды), но очень мало, какъ показываетъ вычисленіе; тогда

$$C < \frac{A}{B}^*.$$

* Если-бы $C > \frac{A}{B}$, тогда λ_m имѣло бы два значенія; но, кажется, такихъ прозрачныхъ срединъ нѣтъ.

Въ этомъ случаѣ λ_m количество воображаемое, слѣдовательно нѣтъ ни max., ни min. n (въ физическомъ смыслѣ).

Посмотримъ теперь, будетъ ли n при $\lambda = \lambda_m$, maximum или minimum.

Возьмемъ вторую производную n^2 (изъ форм. 2) и подставимъ въ ея значеніе величину λ_m вмѣсто λ; найдемъ:

$$\frac{d^2(n^2)}{d\lambda^2} = -\frac{4B\lambda_m{}^2}{\lambda_m{}^2 - C}. \tag{4}$$

Это равенство показываетъ, что если $B < 0$, то

$$\frac{d^2(n^2)}{d\lambda^2} > 0,$$

ибо въ этомъ случаѣ

$$\lambda_m{}^2 > C \text{ (по форм. (3))}.$$

И такъ, для тѣхъ срединъ, для которыхъ $B < 0$, показатель преломленія n при $\lambda = \lambda_m$ пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе.

Такого результата опытъ не подтверждаетъ, даже напротивъ, для прозрачныхъ срединъ n увеличивается непрерывно при уменьшеніи λ, такъ-что въ этомъ случаѣ формула Фойхта противорѣчитъ дѣйствительности.

Это заключеніе будетъ еще рѣшительнѣе, если мы вычислимъ значеніе λ_m для какого нибудь тѣла. По вычисленнымъ значеніямъ A, B и C для флинтгласса (von Rosette) найдемъ:

$$\lambda_m = 11^{\mu\mu},19 \text{ (это лучи инфра-красные)}.$$

Значитъ, для лучей, длина волны которыхъ равна $11^{\mu\mu}19$, флинтглассъ обладаетъ наименьшимъ показателемъ преломленія; найдемъ числовое значеніе этого показателя преломленія. Подставляя въ формулу (1) значеніе λ_m изъ формулы (3), получимъ:

$$n^2 = -\frac{B\lambda_m^4}{C}.$$

Подставивъ сюда числовое значеніе B, C и λ_m, найдемъ:

$$n = 1{,}62380,$$

а это показатель преломленія лучей, лежащихъ между фраунгоферовыми линіями D ($n = 1{,}61929$) и E ($n = 1{,}62569$).

И такъ, общее заключеніе то, что формула Фойхта

$$n^2 = \frac{\lambda^2(A - B\lambda^2)}{\lambda - C}$$

противорѣчитъ опыту въ этомъ случаѣ ($B < 0$).

Всѣ предыдущіе числовые выводы основывались на знаніи значеній коэффиціентовъ A, B и C. Займемся теперь ихъ вычисленіемъ. Вычислимъ эти коэффиціенты для одного сорта флинтгласса (von Rosette) и для воды по даннымъ λ и n, кои мы заимствуемъ у Вюльнера[1] и для ихъ опредѣленія напишемъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$A - \lambda^2 B + \frac{n^2}{\lambda^2} C = n^2.$$

Опредѣлимъ сначала A, B и C для флинтгласса. Возьмемъ n и λ для лучей B, E и H. Найдемъ[2]:

$$A = 2{,}528927;\quad B = -0{,}0001876716;\quad C = 1{,}143004$$

$$\lg A = 0{,}4029363;\quad \lg B = 6{,}2733987 - 10;\quad \lg C = 0{,}0580477.$$

Этими значеніями A, B, C мы и пользовались выше.

---

[1] Exp. Ph. Bd. 2, S, 159 und 163, 4 Aufl.

[2] Вычисленіе производилось съ семизначными таблицами въ видахъ сравненія съ вычисленіями Вюльнера по формулѣ Гельмгольца.

Зная эти коэффиціенты, можно вычислить обратно по даннымъ λ значенія показателей преломленія n для другихъ лучей. Результаты вычисленій помѣщены въ таблицѣ (I). Въ этой таблицѣ рядомъ съ нашими результатами помѣщены вычисленія Вюльнера по формулѣ Гельмгольца съ тремя же постоянными коэффиціентами по тѣмъ-же даннымъ.

Таблица I.

Флинтглассъ (von Rosette).

Лучъ	n наблюденное.	Наб.—выч.	Наб.—выч.
B	1,61268	± 0	± 0
C	1,61443	+ 9	+10
D	1,61929	+11	+ 7
E	1,62569	± 0	± 0
F	1,63148	—11	— 4
G	1,64269	—13	— 4
H	1,65268	± 0	± 0.

Здѣсь въ 3-мъ столбцѣ помѣщены разности между наблюденіемъ и вычисленіемъ по формулѣ Фойхта, и въ 4-мъ по формулѣ Гельмгольца съ тремя-же коэффиціентами, именно по формулѣ:

$$n^2 - 1 = - P\lambda^2 + \frac{Q\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m{}^2},$$

въ которой P, Q и λ_m [1] суть постоянные коэффиціенты.

Таблица (I) показываетъ, что формула Фойхта нѣсколько менѣе удовлетворяетъ наблюденіямъ, чѣмъ формула Гельмгольца.

Примѣнимъ теперь формулу Фойхта къ водѣ. Вычислимъ A, B и C для линій B, D и F. Найдемъ:

---

[1] Это λ_m отлично отъ вышеприведеннаго λ_m Фойхтовой формулы.

$A = 1{,}760716$; $B = +0{,}0001157719$; $C = 0{,}3982556$

$\lg A = 0{,}2456893$; $\lg B = 6{,}0636033 - 10$; $\lg C = 9{,}6001619 - 10$.

Этими значеніями A, B, C мы и пользовались выше.

Обратно, по даннымъ A, B, C можно вычислить n, результаты чего помѣщены въ таблицѣ II.

Таблица II.

Вода при 19°,5C.

Лучъ	n наблюденное.	Наб.—выч.	Наб.—выч.
B	1,33048	± 0	± 0
C	1,33122	+ 2	+ 5
D	1,33307	± 0	± 0
E	1,33527	— 4	— 5
F	1,33720	± 0	± 0
G	1,34063	+14	— 1
H	1,34350	+ 6	— 4.

Видимъ, что сравненіе здѣсь даетъ то-же самое.

Займемся теперь повѣркой формулы Фойхта въ предположеніи, что $B = 0$.

Въ этомъ случаѣ формула Фойхта обращается въ слѣдующую:

$$n^2 = \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - C} \qquad (5)$$

съ двумя постоянными A и C[1].

Формула (5) показываетъ, что n измѣняется въ одномъ направленіи при измѣненіи λ отъ 0 до $\sqrt{C}$, слѣдовательно между

[1] Значеніе этихъ постоянныхъ приведены передъ таблицами III и IV.

$\lambda = 0$ и $\lambda = \sqrt{C}$ количество n не имѣетъ ни max., ни min. и остается все время воображаемымъ количествомъ.

При $\lambda = \sqrt{C}$ показатель n обращается въ ∞; затѣмъ при измѣненіи λ отъ $\sqrt{C}$ до ∞ показатель n величина дѣйствительная и постепенно уменьшающаяся до значенія равнаго $\sqrt{A}$, когда λ, увеличиваясь, стремится къ ∞.

Примѣняя формулу (5), къ водѣ, найдемъ

$$\sqrt{C} = 0^{\mu\mu},6751$$

такихъ малыхъ волнъ еще не наблюдали.

Для флинтгласса

$$\sqrt{0} = 1^{\mu\mu},0388$$

и здѣсь тоже нѣтъ наблюденій.

Значенія нижнихъ предѣловъ n суть: $\sqrt{A} = 1,59415$ для флинтгласса и $\sqrt{A} = 1,32405$ для воды.

Опредѣленіе постоянныхъ A и C въ обоихъ этихъ случаяхъ производилось по даннымъ для фраунгоферовыхъ линій B и G.

Для дальнѣйшаго изученія формулы (5) я вычислилъ по ней обратно показатели n для данныхъ λ и для сравненія произвелъ вычисленіе по упрощенной (съ двумя коэффиціентами) формулѣ Гельмгольца ($P = Q$, какъ показали вычисленія Вюльнера), которую можно тогда написать въ видѣ:

$$n^2 - 1 = \frac{H\lambda^2}{\lambda^2 - h}. \tag{6}$$

Такой-же видъ имѣетъ и упрощенная формула Ломмеля.

Значеніе λ для $n = \infty$ суть:

для воды $\sqrt{h} = 1^{\mu\mu},0075$

въ флинтгласса $\sqrt{h} = 1^{\mu\mu},3007$.

Въ таблицѣ (III) помѣщены разности между вычисленіемъ и наблюденіемъ по формуламъ Фойхта (5) и Гельмгольца (Ломмеля) (6) для флинтгласса; въ таблицѣ (IV) тоже для воды; причемъ постоянныя были слѣдующія:

для флинтгласса $A = 2{,}541307$; $C = 1{,}079145$
$H = 1{,}543394$; $h = 1{,}691747$

а для воды $A = 1{,}753097$; $C = 0{,}455693$
$H = 0{,}753625$; $h = 1{,}014975$

Таблица III.

Флинтглассъ.

Лучъ	Ф. В.—Н.	Г.(Л.) В.—Н.
B	± 0	± 0
C	+ 5	+ 1
D	+ 22	+ 10
E	+ 35	+ 18
F	+ 35	+ 19
G	± 0	± 0
H	— 55	— 27

Таблица IV.

Вода.

Лучъ	Ф. В.—Н.	Г.(Л.) В.—Н.
B	± 0	± 0
C	— 12	— 13
D	— 25	— 29
E	— 23	— 28
F	— 20	— 25
G	± 0	± 0
H	+ 25	+ 34.

Таблицы эти показываютъ, что для флинтгласса формула Гельмгольца (Ломмеля) лучше удовлетворяетъ, чѣмъ Фойхта, а для воды, какъ будто, Фойхтова нѣсколько лучше, чѣмъ Гельмгольцева[1].

Теперь можно сдѣлать общій выводъ изъ всего предыдущаго:

1. Формула Фойхта съ тремя постоянными коэффиціентами для нѣкоторыхъ тѣлъ противорѣчитъ даннымъ опыта.

2. Формула Фойхта съ двумя коэффиціентами, хотя и не противорѣчитъ даннымъ опыта (за отсутствіемъ впрочемъ предѣль-

[1] Вычисляя тѣ-же наблюденія по упрощенной формулѣ Кеттелера: $n^2 - 1 = \frac{K}{\lambda^2 - k}$, получаемъ крайне большія разности, такъ для линіи C наблюденіе даетъ $k = 1{,}61443$, а вычисленіе $1{,}61784$; причемъ было $K = 798{,}451$; $k = -450{,}539072$ (флинтглассъ).

ныхъ наблюденій), но удовлетворяетъ имъ вообще слабѣе подобной-же формулы Гельмгольца (Ломмеля).

Прибавленіе. Изслѣдуя формулу Гельмгольца съ тремя коэффиціентами такимъ-же образомъ, какимъ мы изслѣдовали формулу Фойхта, найдемъ, что если $Q > P$ (что имѣетъ мѣсто для флинтгласса (von Rosette)[1] и нѣкоторыхъ другихъ тѣлъ), то при

$$\lambda^2 = \lambda_m{}^2\left(1+\sqrt{\frac{Q}{Q-P}}\right)$$

показатель n пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Это значеніе можетъ быть вычислено по формулѣ

$$n^2 - 1 = \lambda_m{}^2(2Q - P + 2\sqrt{Q(Q-P)}).$$

Пользуясь данными λ_m, P и Q, вычисленными Вюльнеромъ для флинтгласса (von Rosette), найдемъ, что n будетъ minimum при

$$= 13^{\mu\mu}196$$

и значеніе n min. будетъ:

$$n = 1{,}6027.$$

Но такой результатъ вполнѣ противорѣчитъ опыту, какъ показываютъ измѣренія Мутона (1879) и Ланглея (1884). Такимъ образомъ и о формулѣ Гельмгольца съ тремя коэффиціентами должно сказать то-же, что сказано выше о подобной же формулѣ Фойхта.

[1] Для другого сорта флинтгласса $Q < P$, какъ нашелъ Вюльнеръ же (Wied. Ann. Bd. XXIII, S. 311).