КЪ ТЕОРІИ РАДІУСА КРИВИЗНЫ.

М. Тихомандрицкаго.

Во II. томѣ «Analytische Geometrie des Raumes» Сальмонъ-Фидлера въ § 105 на стр. 140 находимъ формулу:

$$\frac{\sin^2\omega}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2\cos\omega}{rr'}, \qquad (1)$$

въ которой ϱ обозначаетъ радіусъ кривизны линіи пересѣченія двухъ поверхностей, r и r' радіусы кривизны сѣченій тѣхъ же поверхностей нормальными плоскостями, проходящими чрезъ касательную къ линіи ихъ пересѣченія въ разсматриваемой точкѣ; ω уголъ между внѣшними нормалями поверхностей въ той же точкѣ. Въ указанномъ § эта формула доказывается только для случая $\omega = \frac{\pi}{2}$, когда, слѣд., поверхности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, при помощи теоремы Мёнье; общая же формула, данная безъ доказательства, употребляется для вывода выраженія $\frac{1}{\rho^2}$ чрезъ частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ отъ функцій U и V, представляющихъ первыя части уравненій $U = 0$ и $V = 0$ поверхностей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ разсматриваемую кривую, причемъ берется въ помощь выраженіе радіуса кривизны нормальнаго сѣченія поверхности, выведенное въ § 35, и преобразованіе знаменателя этого выраженія въ опредѣлитель изъ § 100.

Между тѣмъ формулу (1) можно получить, какъ мнѣ удалось замѣтить это еще 16 лѣтъ тому назадъ, прямо изъ опредѣленія угла смежности съ помощію довольно простыхъ вычисленій, причемъ теорема Мёнье и выраженіе радіуса кривизны плоскаго нормальнаго сѣченія данной поверхности получаются само собою, чрезъ что пріобрѣтается естественный переходъ отъ теоріи линій двоякой кривизны къ теоріи кривыхъ поверхностей. Такъ какъ этотъ выводъ ни мною, ни кѣмъ другимъ, сколько мнѣ извѣстно, не былъ еще опубликованъ, то я беру смѣлость предложить его вниманію Математическаго Общества.

1. Пусть

$$\left.\begin{aligned} U &= f(x, y, z) = 0 \\ V &= F(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

будутъ уравненія поверхностей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ кривую линію. Частныя производныя функцій U и V по перемѣннымъ x, y, z, мы будемъ по Сальмону-Фидлеру обозначать тою-же буквою, приписывая внизу нумера 1, 2, 3, причемъ 1 будетъ указывать на x, 2 на y, 3 на z. Означая чрезъ α, β, γ углы касательной прямой къ линіи пересѣченія поверхностей (1), мы будемъ имѣть для опредѣленія ихъ косинусовъ, какъ извѣстно, такую систему уравненій:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} U_1\cos\alpha + U_2\cos\beta + U_3\cos\gamma = 0 \\ V_1\cos\alpha + V_2\cos\beta + V_3\cos\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Изъ послѣднихъ двухъ на основаніи извѣстнаго свойства пропорцій, при помощи (2), найдемъ:

$$\frac{\cos\alpha}{\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}} = \frac{\cos\beta}{\begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos\gamma}{\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}^2}}. \qquad (4)$$

Входящая сюда въ четвертый членъ сумма квадратовъ опредѣлителей изъ частныхъ производныхъ можетъ быть по извѣстной теоремѣ объ умноженіи опредѣлителей представлена такъ:

$$\begin{vmatrix} U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 & U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 \\ V_1U_1 + V_2U_2 + V_3U_3 & V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 \end{vmatrix}; \qquad (5)$$

раздѣляя теперь первыя строку и столбецъ на

$$\Delta_1 U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}\,, \qquad (6)$$

а послѣднія строку и столбецъ на

$$\Delta_1 V = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}\,, \qquad (7)$$

и имѣя въ виду, что

$$U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 = \Delta_1 U . \Delta_1 V \cos\omega, \qquad (8)$$

гдѣ ω уголъ между внѣшними нормалями къ поверхностямъ (1), мы (5) дадимъ такой видъ:

$$(\Delta_1 U)^2 . (\Delta V)^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{vmatrix} = (\Delta_1 U)^2 . (\Delta_1 V)^2 \sin^2\omega. \qquad (9)$$

Такимъ образомъ окончательно получимъ:

$$\sqrt{\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}^2} = \Delta_1 U . \Delta_1 V \sin\omega. \qquad (10)$$

2. Уголъ смежности $d\sigma$ этой кривой по формулѣ Серре выразится такъ:

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}\,; \qquad (1)$$

чтобы найти входящія сюда $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ и $d\cos\gamma$, мы продифференцируемъ уравненія (2) и (3), что доставитъ намъ такую систему трехъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta d\cos\beta + \cos\gamma d\cos\gamma = 0 \\ &U_1 d\cos\alpha + U_2 d\cos\beta + U_3 d\cos\gamma = A \\ &V_1 d\cos\alpha + V_2 d\cos\beta + V_3 d\cos\gamma = B, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ для краткости положено:

$$\left.\begin{aligned} &-\cos\alpha dU_1 - \cos\beta dU_2 - \cos\gamma dU_3 = A, \\ &-\cos\alpha dV_1 - \cos\beta dV_2 - \cos\gamma dV_3 = B. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Рѣшая уравненія (6) по искомымъ дифференціаламъ косинусовъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & \cos\beta & \cos\gamma \\ A & U_2 & U_3 \\ B & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\ d\cos\beta &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ U_1 & A & U_3 \\ V_1 & B & V_3 \end{vmatrix} \\ d\cos\gamma &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ U_1 & U_2 & A \\ V_1 & V_2 & B \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Если вставить сюда вмѣсто $\cos\alpha$ и проч. ихъ выраженія изъ формулъ (4) § 1, то легко найдемъ:

$$D=\sqrt{\begin{vmatrix}U_2 & U_3\\ V_2 & V_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}U_3 & U_1\\ V_3 & V_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{vmatrix}^2}=\Delta_1 U.\Delta_1 V\sin\omega. \quad (6)$$

3. Раскрывая опредѣлители въ (4) пред. § будемъ имѣть:

$$d\cos\alpha=\frac{1}{D}\Big\{A(V_2\cos\gamma-V_3\cos\beta)-B(U_2\cos\gamma-U_3\cos\beta)\Big\}$$
$$d\cos\beta=\frac{1}{D}\Big\{A(V_3\cos\alpha-V_1\cos\gamma)-B(U_3\cos\alpha-U_1\cos\gamma)\Big\}$$
$$d\cos\gamma=\frac{1}{D}\Big\{A(V_1\cos\beta-V_2\cos\alpha)-B(U_1\cos\beta-U_2\cos\alpha)\Big\}.$$

Взявъ сумму квадратовъ этихъ выраженій и имѣя въ виду, что по извѣстной теоремѣ теоріи опредѣлителей

$$(U_2\cos\gamma-U_3\cos\beta)^2+(U_3\cos\alpha-U_1\cos\gamma)^2+(U_1\cos\beta-U_2\cos\alpha)^2=$$
$$=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma & U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma\\ U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma & U_1{}^2+U_2{}^2+U_3{}^2\end{vmatrix}=$$
$$=U_1{}^2+U_2{}^2+U_3{}^2=(\Delta_1 U)^2;$$

$$(V_2\cos\gamma-V_3\cos\beta)^2+(V_3\cos\alpha-V_1\cos\gamma)^2+(V_1\cos\beta-V_2\cos\alpha)^2=$$
$$=V_1{}^2+V_2{}^2+V_3{}^2=(\Delta_1 V)^2;$$

$$(U_2\cos\gamma-U_3\cos\beta)(V_2\cos\gamma-V_3\cos\beta)+(U_3\cos\alpha-U_1\cos\gamma)\times$$
$$\times(V_3\cos\alpha-V_1\cos\gamma)+(U_1\cos\beta-U_2\cos\alpha)(V_1\cos\beta-V_2\cos\alpha)=$$
$$=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma & U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma\\ V_1\cos\alpha+V_2\cos\beta+V_3\cos\gamma & U_1V_1+U_2V_2+U_3V_3\end{vmatrix}=$$
$$=U_1V_1+U_2V_2+U_3V_3=\Delta_1 U.\Delta V_1\cos\omega,$$

а также принимая во вниманіе (1) и (6) § 2, мы получимъ по сокращеніи и умноженіи на $\sin^2\omega$:

$$\sin^2\omega d\sigma^2=\left(\frac{A}{\Delta_1 U}\right)^2-2\left(\frac{A}{\Delta_1 U}\right)\cdot\left(\frac{B}{\Delta_1 V}\right)\cos\omega+\left(\frac{B}{\Delta_1 V}\right)^2. \quad (2)$$

4. Раздѣляя это на ds, и полагая для краткости

$$-\frac{A}{ds}=M, \quad -\frac{B}{ds}=N, \tag{1}$$

мы получимъ, имѣя въ виду, что

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

слѣдующее выраженіе для радіуса кривизны ϱ:

$$\left(\frac{\sin\omega}{\rho^2}\right)^2=\left(\frac{M}{\Delta_1 U}\right)^2-2\left(\frac{M}{\Delta_1 U}\right)\cdot\left(\frac{N}{\Delta_1 V}\right)^2\cos\omega+\left(\frac{N}{\Delta_1 V}\right)^2 \tag{3}$$

здѣсь по (1) этого § и (2) § 2, на основаніи того, что

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{4}$$

будетъ:

$$\left.\begin{aligned} M=U_{11}\cos^2\alpha+U_{22}\cos^2\beta+U_{33}\cos^2\gamma+2U_{23}\cos\beta\cos\gamma+\\ +2U_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2U_{12}\cos\alpha\cos\beta\\ N=V_{11}\cos^2\alpha+V_{22}\cos^2\beta+V_{33}\cos^2\gamma+2V_{23}\cos\beta\cos\gamma+\\ +2V_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2V_{12}\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

5. Если $V=0$ будетъ представлять плоскость, то всѣ V_{ik} $(i,k=1,2,3)$, а слѣд. и N равны нулю, а потому формула (3) по извлеченіи квадратнаго корня приметъ такой видъ:

$$\frac{\sin\omega}{\rho}=\pm\frac{M}{\Delta_1 U}, \tag{1}$$

или внося вмѣсто M и $\Delta_1 U$ ихъ значенія:

$$\frac{\sin\omega}{\rho}=$$

$$=\frac{U_{11}\cos^2\alpha+U_{22}\cos^2\beta+U_{33}\cos^2\gamma+2U_{23}\cos\beta\cos\gamma+2U_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2U_{12}\cos\alpha\cos\beta}{\pm\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}} \tag{2}$$

Въ этой формулѣ вторая часть зависитъ лишь отъ направленія касательной къ линіи пересѣченія поверхности $U=0$ плоскостью $V=0$, направленія, опредѣляемаго углами α, β, γ, но не зависитъ отъ угла наклоненія сѣкущей плоскости $V=0$ къ касательной плоскости къ поверхности $U=0$; слѣд. она сохранится и тогда, когда будетъ $\omega=\frac{\pi}{2}$, т. е. когда сѣкущая плоскость будетъ нормальная къ $U=0$; но тогда первая часть (2) обратится въ $\frac{1}{r}$, обозначая чрезъ r радіусъ нормальнаго сѣченія поверхности $U=0$; слѣд. мы получаемъ, во-первыхъ, выраженіе этого радіуса:

$$\frac{1}{r}=$$

$$=\frac{U_{11}\cos^2\alpha+U_{22}\cos^2\beta+U_{33}\cos^2\gamma+2U_{23}\cos\beta\cos\gamma+2U_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2U_{12}\cos\alpha\cos\beta}{\pm\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}} \tag{3}$$

и, во-вторыхъ, равенство:

$$\frac{\sin\omega}{\rho}=\frac{1}{r}, \tag{4}$$

которое выражаетъ теорему Мёнье. Оно приметъ обычную форму, если ввести вмѣсто угла ω между нормалью къ поверхности и нормалью къ сѣкущей плоскости, уголъ θ между самою сѣкущей плоскостью и нормалью къ поверхности; тогда $\theta=90-\omega$, и слѣд. $\sin\omega=\cos\theta$ и равенство (4) приводится къ слѣдующему:

$$\varrho=r\cos\theta. \tag{5}$$

6. И такъ, по (1) и (4) пред. §:

$$\pm\frac{M}{\Delta_1 U}=\frac{1}{r}; \tag{1}$$

и точно такъ-же

$$\pm \frac{N}{\Delta_1 V} = \frac{1}{r'}; \qquad (2)$$

означая чрезъ r' радіусъ нормальнаго сѣченія поверхности $V=0$; внося это въ (3) § 4, получимъ:

$$\left(\frac{\sin\omega}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\omega}{rr'} + \frac{1}{r'^2}, \qquad (3)$$

т. е. ту самую формулу, которая послужила Фидлеру для вывода выраженія кривизны чрезъ производныя функцій U и V, но приведена имъ безъ доказательства. Эта формула говоритъ намъ, что, складывая кривизны сѣченій обѣихъ поверхностей нормальными плоскостями, проходящими чрезъ касательную къ линіи пересѣченія поверхностей, по закону параллелограма силъ, представляя для этого кривизны отрѣзками прямыхъ, отложенными по соотвѣтственнымъ нормалямъ къ поверхностямъ, мы получимъ въ діагоналѣ его величину $\dfrac{\sin\omega}{\rho}$, изъ которой получается кривизна линіи пересѣченія поверхностей, чрезъ раздѣленіе на sin угла между ихъ нормалями.

7. Изъ формулы (3) можно вывести другую болѣе изящную. Если означимъ чрезъ $\mathfrak{r}$ радіусъ кривизны сѣченія поверхности $U=0$ плоскостью касательною къ поверхности $V=0$, а чрезъ $\mathfrak{r}'$ радіусъ кривизны сѣченія этой послѣдней поверхности (т. е. $V=0$), плоскостью касательною въ первой (т. е. $U=0$), то, имѣя въ виду, что каждая изъ касательныхъ плоскостей дѣлаетъ съ нормалью къ другой уголъ, дополняющій уголъ ω внѣшнихъ нормалей поверхностей до прямого, мы по теоремѣ Мёнье (формула (4) § 5) будемъ имѣть:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin\omega}{\mathfrak{r}}; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{\sin\omega}{\mathfrak{r}'}; \qquad (2)$$

вставляя это въ формулу (3) предыдущаго § будемъ имѣть по сокращеніи на $\sin^2\omega$:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\mathfrak{r}^2}-\frac{2\cos\omega}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'}+\frac{1}{\mathfrak{r}'^2}, \qquad (3)$$

—формула, которая говоритъ, что кривизна линіи пересѣченія двухъ поверхностей есть сложная по закону параллелограма силъ изъ кривизны сѣченій каждой поверхности плоскостью, касательною къ другой.

18$\frac{8}{\text{v}}$86.

—