

## РАЗНОСТЬ

*n*-ГО ПОРЯДКА ЛОГАРИТМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.

*М. А. Тихомандрицкаго.*

Пусть дана некоторая функция  $u_x$  отъ переменной  $x$ ; разность  $n$ -го порядка этой функции чрезъ члены ряда ея значений:

$$u_x, u_{x+h}, u_{x+2h} \dots u_{x+nh}, \quad (1)$$

соотвѣтствующихъ послѣдовательному увеличенію значений  $x$  на  $h$ , выражается, какъ извѣстно, такимъ образомъ:

$$\Delta^n u_x = u_{x+nh} - C_1^n u_{x+(n-1)h} + C_2^n u_{x+(n-2)h} - \dots + (-1)^n u_x, \quad (2)$$

гдѣ  $C_m^n$  обозначаетъ  $m$ -ый биноміальный коэффициентъ; разность  $n$ -го порядка отъ  $\log u_x$  выразится чрезъ члены ряда (1), если возьмемъ логаритмъ отъ дроби, числитель которой будетъ состоять изъ произведенія тѣхъ членовъ этого ряда, предъ которыми въ формулѣ (2) стоитъ знакъ  $+$ , знаменатель же изъ произведенія тѣхъ, предъ которыми стоитъ знакъ  $-$ , — возвышенныхъ каждый въ степень, показываемую его коэффициентомъ въ той же формулѣ (2), такимъ образомъ:

$$\Delta^n \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots} \right\} \quad (3)$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ послѣдовательно:

$$\Delta \log u_x = \log u_{x+h} - \log u_x = \log \frac{u_{x+h}}{u_x};$$

$$\Delta^2 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}} - \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2};$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 \log u_x &= \Delta \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2} = \log \frac{u_{x+3h} u_{x+h}}{(u_{x+2h})^2} - \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2} = \\ &= \log \frac{u_{x+3h} (u_{x+h})^3}{(u_{x+2h})^3 u_x}; \end{aligned}$$

и т. д. — результаты, которые получаются изъ (3), полагая въ ней  $n = 1, 2, 3$ , и т. д.; такъ что остается только показать, что наша формула, разъ она вѣрна до порядка  $n$ , будетъ вѣрна и для непосредственно слѣдующаго, а слѣдовательно и для всякаго порядка. Для этого беремъ разность отъ обѣихъ частей (3); будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} \log u_x &= \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n} \dots} \right\} - \\ &= \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_2^n} \cdot (u_{x+(n-4)h})^{C_4^n} \dots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_3^n} \dots} \right\} = \\ &= \log \left\{ \frac{u_{x+(n-1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^n + C_1^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4^n + C_3^n} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^n + 1} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^n + C_2^n} \dots} \right\}; \end{aligned}$$

но, по известнымъ свойствамъ биноміальныхъ коэффициентовъ,

$$C_1^{n+1} = C_1^{n+1}; C_2^n + C_1^n = C_2^{n+1}; C_3^n + C_2^n = C_3^{n+1}; C_4^n + C_3^n = C_4^{n+1},$$

и т. д.;

слѣд. мы получаемъ:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2^{n+1}} \cdot (u_{x+(n-3)h})^{C_4^{n+1}} \dots}{(u_{x+nh})^{C_1^{n+1}} (u_{x+(n-2)h})^{C_3^{n+1}} \dots} \right\},$$

— результатъ, который получается изъ (3) чрезъ перемѣну  $n$  на  $n + 1$ , что и доказываетъ справедливость нашей формулы для всякаго значенія  $n$ .

Такимъ образомъ формула (3) выводится непосредственно изъ самаго опредѣленія конечной разности; но ее можно получить еще скорѣе изъ формулы (2), перемѣнивъ въ послѣдней  $u_x$  на  $\log u_x$  и соединивъ затѣмъ всѣ члены въ одинъ на основаніи известныхъ свойствъ логарифма.