О ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМЪ

УРАВНЕНІИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАГО РЯДА.

А. А. Маркова.

Эта замѣтка посвящена опредѣленію всѣхъ случаевъ, когда произведеніе двухъ какихъ нибудь рѣшеній дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \qquad (1)$$

равно цѣлой функціи отъ x.

Для рѣшенія нашего вопроса составимъ сначала по извѣстнымъ правиламъ дифференціальное уравненіе 3-го порядка, которому удовлетворяетъ произведеніе

$$z=y_1 y_2 \qquad (2)$$

двухъ какихъ нибудь рѣшеній (y_1 и y_2) уравненія (1).

Полагая для краткости

$$x(1-x)=p,\ \gamma-(\alpha+\beta+1)x=q,\ -\alpha\beta=r, \qquad (3)$$

находимъ:

$$z = y_1 y_2 ,$$

$$\frac{dz}{dx} = y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx} ,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = y_1 \frac{d^2y_2}{dx^2} + y_2 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} ,$$

$$p \frac{d^2z}{dx^2} = -y_1\left(q \frac{dy_2}{dx} + ry_2 \right) - y_2\left(q \frac{dy_1}{dx} + ry_1 \right) + 2p \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} =$$

$$= 2p \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} - q \frac{dz}{dx} - 2rz ,$$

$$p \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{dp}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} = 2p \frac{dy_1}{dx} \frac{d^2y_2}{dx^2} + 2p \frac{dy_2}{dx} \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dp}{dx} \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} -$$

$$- q \frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx} + 2r \right) \frac{dz}{dx} = 2\left(\frac{dp}{dx} - 2q \right) \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} - q \frac{d^2z}{dx^2} -$$

$$- \left(\frac{dq}{dx} + 4r \right) \frac{dz}{dx} ,$$

и наконецъ, по исключеніи $\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx}$,

$$p^2 \frac{d^3z}{dx^3} + 3pq \frac{d^2z}{dx^2} + \left(2q^2 + p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} + 4rp \right) \frac{dz}{dx} +$$

$$+ 2r\left(2q - \frac{dp}{dx} \right) z = 0. \qquad (4)$$

Подставляя затѣмъ вмѣсто p, q и r ихъ выраженія (3), получаемъ

$$x^2 (1-x)^2 \frac{d^3z}{dx^3} + 3x(1-x)(ax+b) \frac{d^2z}{dx^2} + (cx^2 + \partial x + e) \frac{dz}{dx} +$$

$$+ (fx + g) z = 0, \qquad (4)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a &= -(\alpha+\beta+1)\\
b &= \gamma\\
c &= 2\alpha^2+8\alpha\beta+2\beta^2+3\alpha+3\beta+1\\
d &= -2\gamma(2\alpha+2\beta+1)-4\alpha\beta\\
e &= 2\gamma^2-\gamma\\
f &= 4\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
g &= -2\alpha\beta(2\gamma-1).
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

При какихъ же условіяхъ уравненіе (4) допускаетъ рѣшеніе

$z =$ цѣлой функціи x?

Пусть

$$z = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \ldots + L_{n-1}x^{n-1} + L_nx^n, \qquad (6)$$

гдѣ

$$L_0,\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{n-1},\ L_n$$

нѣкоторыя постоянныя и притомъ L_n не нуль.

Подставляя выраженіе (6) вмѣсто z въ лѣвую часть уравненія (4), получаемъ цѣлую функцію $n+1$-ой степени относительно x

$$P_0 + P_1x + P_2x^2 + \ldots + P_{n-1}x^{n-1} + P_nx^n + P_{n+1}x^{n+1}, \qquad (7)$$

которая, согласно нашимъ требованіямъ, должна тождественно обращаться въ нуль.

Коэффиціенты

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n,\ P_{n+1}$$

опредѣляются равенствами

$$\left.\begin{aligned}
&P_0 = \qquad\qquad R_0 L_0 + S_0 L_1 \\
&P_1 = Q_1 L_0 + R_1 L_1 + S_1 L_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_{m+1} = Q_{m+1} L_m + R_{m+1} L_{m+1} + S_{m+1} L_{m+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_n = Q_n L_{n-1} + R_n L_n \\
&P_{n+1} = Q_{n+1} L_n,
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

гдѣ вообще

$$\left.\begin{aligned}
&Q_{m+1} = m(m-1)(m-2) + 3(\alpha+\beta+1)m(m-1) + \\
&\quad + (2\alpha^2 + 8\alpha\beta + 2\beta^2 + 3\alpha + 3\beta + 1)m + 4\alpha\beta(\alpha+\beta) = \\
&\quad = (m+2\alpha)(m+2\beta)(m+\alpha+\beta) \\
&R_{m+1} = -2(m+1)m(m-1) - 3(\gamma+\alpha+\beta+1)(m+1)m - \\
&\quad - (2\gamma(2\alpha+2\beta+1) + 4\alpha\beta)(m+1) - 2\alpha\beta(2\gamma-1) \\
&S_{m+1} = (m+2)(m+1)m + 3\gamma(m+2)(m+1) + \\
&\quad + (2\gamma^2-\gamma)(m+2) = (m+2)(m+\gamma+1)(m+2\gamma).
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Остается подобрать числа

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ n,\ L_0,\ L_1,\ L_2, \ldots,\ L_{n-1},\ L_n$$

такъ, чтобы всѣ выраженія

$$P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n,\ P_{n+1}$$

обратились въ нуль.

Условіе

$$P_{n+1} = 0$$

даетъ намъ

$$n = -2\alpha \text{ или } -2\beta \text{ или } -(\alpha+\beta).$$

Что же касается остальныхъ уравненій

$$P_0=0,\ P_1=0,\ldots,\ P_n=0,$$

то они навѣрно будутъ удовлетворены при нѣкоторой системѣ значеній чиселъ

$$L_0,\ L_1,\ldots,\ L_n,$$

между которыми встрѣчаются не равныя нулю, если только приводится къ нулю опредѣлитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} R_0, & S_0, & 0, & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & , & 0 \\ Q_1, & R_1, & S_1, & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & . & 0 \\ 0, & Q_2, & R_2, & S_2 & \ldots\ldots\ldots & 0 & , & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & Q_{n-1}, & R_{n-1}, & S_{n-1} \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & , Q_n & , R_n \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Такимъ образомъ вопросъ нашъ сводится къ рѣшенію уравненія

$$\Delta_n=0 \qquad (11)$$

при условіи

$$n=-2\alpha \text{ или } -2\beta \text{ или } -(\alpha+\beta). \qquad (12)$$

Это рѣшеніе заключается въ нижеслѣдующихъ предложеніяхъ.

Соотношеніе между Δ_{m+1}, Δ_m и Δ_{m-1}

$$\Delta_{m+1}=R_{m+1}\ \Delta_m-Q_{m+1}\ S_m\ \Delta_{m-1} \qquad (13)$$

представляетъ простое слѣдствіе извѣстной теоремы о разложеніи опредѣлителя по элементамъ какой нибудь строки или какого нибудь столбца.

Лемма 1.

При n четномъ и $\alpha = -\frac{n}{2}$ или $\beta = -\frac{n}{2}$ опредѣлитель Δ_n тождественно обращается въ нуль.

Для доказательства достаточно вспомнить, что при n четномъ и $\alpha = -\frac{n}{2}$ или $\beta = -\frac{n}{2}$ уравненіе (1) допускаетъ рѣшеніе $y =$ цѣлой функціи $\frac{n}{2}$ степени отъ x, квадратъ же этой цѣлой функціи долженъ удовлетворять уравненію (4).

Лемма 2.

Если наши уравненія (11) и (12) удовлетворены при нѣкоторой системѣ значеній чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, n,$$

то они не нарушатся и по замѣнѣ γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma$.

Для доказательства достаточно замѣтить, что замѣна γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ соотвѣтствуетъ тому преобразованію дифференціальнаго уравненія (1), когда x замѣняютъ на $(1 - x)$.

Теорема 1.

$$\Delta_{2k} = \alpha\beta(\alpha + 1)(\beta + 1)\ldots$$
$$\ldots(\alpha + k)(\beta + k)\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\ldots\left(\gamma + \frac{2k-1}{2}\right)\Phi_{2k}$$

$$\Delta_{2k+1} = \alpha\beta(\alpha + 1)(\beta + 1)\ldots \tag{14}$$
$$\ldots(\alpha + k)(\beta + k)\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\gamma + \frac{2k-1}{2}\right)\Phi_{2k+1},$$

гдѣ Φ_{2k} и Φ_{2k+1} цѣлыя функціи отъ α, β, γ, обращающіяся въ нуль:

первая

при
$$\alpha+\beta=-k-s,$$
$$\gamma=-\frac{2k+1}{2},-\frac{2k+3}{2},\ldots,-\frac{2k+2s-1}{2}$$
$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k),$$

вторая

при
$$\alpha+\beta=-k-s,$$
$$\gamma=-\frac{2k+1}{2},-\frac{2k+3}{2},\ldots,-\frac{2k+2s-1}{2}$$
$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k+1).$$

Доказательство.

Непосредственныя вычисленія даютъ:

$$\Delta_0=-2\alpha\beta(2\gamma-1),$$
$$\Delta_1=\quad 4\alpha\beta(2\gamma-1)\left[\gamma(2\alpha\beta+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta\right],$$

откуда нетрудно убѣдиться въ справедливости теоремы въ случаѣ $k=0$.

Допуская затѣмъ, что наша теорема справедлива при $k=k'$, получаемъ

$$\Delta_{2k'+2}=\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+k')(\beta+k')\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\gamma+\frac{2k'-1}{2}\right)\left\{R_{2k'+2}\Phi_{2k'+1}-Q_{2k'+2}S_{2k'+1}\Phi_{2k'}\right\},$$

гдѣ

$$Q_{2k'+2}=(2\alpha+2k'+1)(2\beta+2k'+1)(\alpha+\beta+2k'+1).$$

По леммѣ (1) выраженіе

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1}-Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}$$

должно дѣлиться на произведеніе

$$(\alpha+k'+1)\,(\beta+k'+1).$$

Кромѣ того, согласно сдѣланному нами допущенію, это выраженіе должно обращаться въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha+\beta=-k'-s,\ \ \gamma=-\frac{2k'+1}{2},-\frac{2k'+3}{2},\ldots,-\frac{2k'+2s-1}{2}$$

$$(s=1,\ 2,\ldots k'+1).$$

Если же

$$\alpha+\beta=-(2k'+2),$$

то, принимая во вниманіе, что $\Delta_{2k'+2}$ обращается въ нуль при

$$\gamma=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots-\frac{2k'-1}{2},$$

на основаніи леммы (2) можемъ указать еще $k'+1$ значеній γ

$$\gamma=-\frac{2k'+3}{2},-\frac{2k'+5}{2},\ldots,-\frac{4k'+3}{2},$$

обращающихъ $\Delta_{2k'+2}$ въ нуль.

Поэтому при

$$\alpha+\beta=-(2k'+2)$$

уравненіе

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1}-Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}=0$$

$k'+2$ степени относительно γ допускаетъ слѣдующія $k'+1$ рѣшеній

$$\gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \ldots, -\frac{4k'+3}{2}.$$

Остается найти еще одно рѣшеніе того же уравненія.

И нетрудно понять, что это рѣшеніе не должно мѣняться отъ замѣны γ на $\alpha+\beta+1-\gamma=-(2k'+1-\gamma)$ и потому оно будетъ

$$\gamma = -\frac{2k'+1}{2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ предыдущими, заключаемъ, что при $\gamma = -\frac{2k'+1}{2}$ функція

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}$$

$k'+2$ степени относительно α обращается въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha = -\beta - k' - 1,\ -\beta - k' - 2, \ldots,\ -\beta - 2k' - 2,\ -k' - 1.$$

Такой результатъ показываетъ, что наше выраженіе

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}$$

при $\gamma = -\frac{2k'+1}{2}$ тождественно обращается въ нуль.

Отсюда нетрудно уже вывести равенство

$$\Delta_{2k'+2} = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots$$
$$\ldots(\alpha+k'+1)(\beta+k'+1)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\gamma+\frac{2k'+1}{2}\right)\Phi_{2k'+2},$$

гдѣ $\Phi_{2k'+2}$ цѣлая функція отъ α, β, γ и обладаетъ указаннымъ выше свойствомъ обращаться въ нуль при

$$\alpha+\beta=-(k'+1+s)$$

$$\text{и } \gamma=-\frac{2k'+3}{2},\ -\frac{2k'+5}{2},\ldots,-\frac{2k'+2s+1}{2}$$

$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k'+1).$$

Переходя къ выраженію $\Delta_{2k'+3}$, получаемъ

$$\Delta_{2k'+3}=\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots$$

$$\ldots(\alpha+k'+1)(\beta+k'+1)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\gamma+\frac{2k'+1}{2}\right)\Phi_{2k'+3},$$

гдѣ

$$\Phi_{2k'+3}=R_{2k'+3}\ \Phi_{2k'+2}-$$

$$-8(\alpha+\beta+2k'+2)(2k'+3)(\gamma+2k'+2)\ \Phi_{2k'+1}.$$

На основаніи предыдущаго $\Phi_{2k'+3}$ обращается въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha+\beta=-(k'+1+s),$$

$$\gamma=-\frac{2k'+3}{2},\ -\frac{2k'+5}{2},\ldots,\ -\frac{2k'+2s+1}{2}$$

$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k'+1).$$

Кромѣ того по леммѣ (2) тотъ же полиномъ $\Phi_{2k'+3}$ долженъ обращаться въ нуль при

$$\alpha+\beta=-(2k'+3),\ \gamma=-\frac{2k'+3}{2},\ -\frac{2k'+5}{2},\ldots,-\frac{4k'+5}{2}.$$

Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ справедливости нашей теоремы при

$$k = k' + 1,$$

если только она справедлива при

$$k = k'.$$

Съ другой стороны, мы знаемъ, что она справедлива при $k = 0$; слѣдовательно, она должна быть справедлива и при

$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

т. е. при всякомъ k.

Теорема 2.

При

$$\alpha = -\frac{2k+1}{2}$$

уравненіе

$$\Phi_{2k+1} = 0$$

$k+1$-ой степени относительно буквы γ имѣетъ слѣдующіе корни

$$\gamma = \beta,\ \beta - 1,\ \beta - 2, \ldots,\ \beta - k.$$

Для доказательства достаточно замѣтить, что Δ_{2k+1} обращается въ нуль при

$$\gamma = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}, \ldots,\ -\frac{2k-1}{2}$$

и потому согласно леммѣ (2) этотъ опредѣлитель долженъ обращаться въ нуль также и при

$$\gamma = -\frac{2k+1}{2} + \beta + \frac{1}{2},\ -\frac{2k+1}{2} + \beta + \frac{3}{2}, \ldots$$

$$\ldots,\ -\frac{2k+1}{2} + \beta + \frac{2k+1}{2},$$

$$= \beta - k,\ \beta - k + 1, \ldots,\ \beta,$$

если только

$$\alpha = -\frac{2k+1}{2}.$$

Заключеніе.

Произведеніе нѣкоторыхъ двухъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія гипергеометрическаго ряда равно цѣлой функціи отъ независимой перемѣнной только въ слѣдующихъ случаяхъ:

a) при n четномъ,

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2}$,

3) $\alpha + \beta = -n$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -\frac{2n-1}{2}$;

b) при n нечетномъ,

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$,

$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{n-2}{2}, \beta, \beta-1, \beta-2, \ldots, \beta-\frac{n-1}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2}$,

$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{n-2}{2}, \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \ldots, \alpha-\frac{n-1}{2}$,

3) $\alpha + \beta = -n$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -\frac{2n-1}{2}$.

—