О ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМЪ УРАВНЕНІИ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАГО РЯДА.

(Вторая замѣтка).

А. А. Маркова.

Цѣль настоящей замѣтки состоитъ въ опредѣленіи всѣхъ случаевъ, когда дифференціальное уравненіе

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

гипергеометрическаго ряда допускаетъ интегралъ вида:

$$Xy' + Yy = 0 \quad (2)$$

или

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0, \quad (3)$$

гдѣ

$$X, Y, Z$$

раціональныя функціи отъ x.

При рѣшеніи нашего вопроса можемъ предполагать

$$X, Y, Z$$

цѣлыми функціями отъ x.

4*

Можемъ предполагать также, что эти цѣлыя функціи не имѣютъ общаго дѣлителя.

Такія предположенія помогутъ намъ установить нѣкоторыя условія для опредѣленія нашихъ функцій

$$X, Y, Z.$$

Однако, на нѣкоторыя условія, соединенныя съ предыдущими предположеніями, мы не будемъ обращать вниманія.

Поэтому въ окончательныхъ результатахъ между функціями

$$X, Y, Z$$

будутъ встрѣчаться и дробныя.

§ 1. Остановимся сначала на опредѣленіи тѣхъ случаевъ, когда уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2).

Полагая

$$Xy' + Yy = \Omega, \tag{4}$$

по дифференцированіи выводимъ на основаніи уравненія (1)

$$p\Omega' = \{p(X' + Y) - qX\}y' + (pY' - rX)y.$$

Здѣсь

$$p = x(1-x), \ \ q = \gamma - (\alpha + \beta + 1)x, \ \ r = -\alpha\beta.$$

Если $\Omega = 0$, то и $\Omega' = 0$.

Отсюда заключаемъ, что въ разбираемыхъ нами случаяхъ уравненія

$$Xy' + Yy = 0$$

и

$$\{p(X' + Y) - qX\}y' + (pY' - rX)y = 0$$

должны быть тождественны одно другому и потому

$$\frac{p(X'+Y)-qX}{X}=\frac{pY'-rX}{Y}=\omega. \tag{5}$$

Относительно ω нетрудно убѣдиться, что оно должно быть цѣлою функціею первой степени отъ x,

$$\omega=\lambda_0+\lambda_1 x. \tag{6}$$

Съ другой стороны при соблюденіи условій (5) и (6) имѣемъ:

$$\frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{l}{x}-\frac{l'}{1-x},$$

откуда

$$\Omega=Cx^l(1-x)^{l'},$$

гдѣ

$$l=\lambda_0\,,\ \ l'=-(\lambda_0+\lambda_1),$$

C постоянное произвольное.

Таковъ общій интегралъ перваго порядка для уравненія (1); если же положимъ $C=0$, получимъ уравненіе вида (2)

$$Xy'+Yy=0. \tag{2}$$

Итакъ все сводится къ рѣшенію уравненій (8):

$$\left.\begin{aligned} p(X'+Y)&=(\omega+q)X\\ pY'-rX&=\omega Y\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Приступая къ рѣшенію уравненій (8), прежде всего замѣтимъ, что X не дѣлится ни на x^2, ни на $(1-x)^2$; такъ какъ въ противномъ случаѣ Y и X имѣли бы общій дѣлитель x или $1-x$. Затѣмъ различимъ слѣдующія четыре предположенія:

1) X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p;

2) общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ x;

3) общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ $1-x$;

4) X дѣлится на p.

Разсмотримъ каждое изъ этихъ предположеній въ отдѣльности.

1) X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p.

Тогда

$$\omega = -q\,,\quad Y = -X',$$

$$pX'' + qX' + rX = 0.$$

Послѣднее уравненіе какъ разъ совпадаетъ съ уравненіемъ (1) и допускаетъ интегралъ

$$X = \text{цѣлой функціи отъ } x$$

только въ тѣхъ случаяхъ, когда α или β цѣлое отрицательное число.

2) Общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ x.

Тогда

$$X = xX_0\,,\quad \omega + q = B(1-x)\,,\quad \omega = Ax,$$

$$q = B - (A+B)x\,,\quad B = \gamma\,,\quad A = \alpha + \beta + 1 - \gamma,$$

$$Y = (\gamma - 1)X_0 - xX'_0\,,\quad Y' = (\gamma - 2)X'_0 - xX''_0\,,$$

$$x(1-x)X''_0 + (2 - \gamma - (3 + \alpha + \beta - 2\gamma)x)X'_0 -$$

$$-(\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)X_0 = 0.$$

Послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

$$X_0 = \text{цѣлой функціи отъ } x$$

только въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha + 1 - \gamma$ или $\beta + 1 - \gamma$ цѣлое отрицательное число.

3) Общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ $1-x$.

Въ этомъ случаѣ

$$X=(1-x)X_0\,,\quad \omega+q=Ax\,,\quad \omega=B(1-x),$$

$$q=-B+(A+B)x\,,\quad B=-\gamma\,,\quad A=\gamma-\alpha-\beta-1\,,$$

$$Y=(\gamma-\alpha-\beta)X_0-(1-x)X'_0\,,$$

$$Y'=(\gamma-\alpha-\beta+1)X'_0-(1-x)X''_0\,,$$

$$x(1-x)X''_0+(\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)x)X'_0-$$

$$-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)X_0=0.$$

Послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

$X_0=$ цѣлой функціи отъ x

только въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha-\gamma$ или $\beta-\gamma$ цѣлое положительное число.

4) X дѣлится на p.

Въ этомъ случаѣ

$$X=pX_0\,,\quad \omega=0\,,\quad Y=(q-p')X_0-pX'_0\,,$$

$$x(1-x)X''_0+(2-\gamma-(3-\alpha-\beta)x)X'_0-$$

$$-(1-\alpha)(1-\beta)X_0=0.$$

Послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

$X_0=$ цѣлой функціи отъ x

только въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha-1$ или $\beta-1$ цѣлое положительное число.

Итакъ, уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2) только въ тѣхъ случаяхъ, когда одно изъ выраженій

$$\alpha, \ \beta, \ \alpha-\gamma, \ \beta-\gamma$$

число цѣлое.

§ 2. Обращаясь къ опредѣленію тѣхъ случаевъ, когда наше уравненіе допускаетъ интегралъ вида (3), полагаемъ

$$Xy'y'+Yy'y+Zyy=\Omega. \tag{9}$$

Отсюда на основаніи уравненія (1) выводимъ

$$p\Omega'=\{p(X'+Y)-2qX\}y'y'+$$
$$+\{p(Y'+2Z)-qY-2rX\}y'y+(pZ'-rY)yy.$$

Если $\Omega=0$, то и $\Omega'=0$, и мы имѣемъ два уравненія

$$\Omega=0 \text{ и } \Omega'=0.$$

Уравненія наши будутъ тождественны одно другому въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\frac{p(X'+Y)-2qX}{X}=\frac{p(Y'+2Z)-qY-2rX}{Y}=\frac{pZ'-rY}{Z}=\omega. \tag{10}$$

Относительно ω нетрудно убѣдиться, что оно должно быть цѣлою функціей первой степени отъ x,

$$\omega=\lambda_0+\lambda_1 x. \tag{11}$$

Если же уравненія

$$\Omega=0 \text{ и } \Omega'=0$$

не тождественны, можемъ исключить изъ нихъ $y'y'$, послѣ чего получимъ уравненіе вида (2).

Слѣдовательно, если условіе (10) не соблюдено, вопросъ нашъ сводится къ только что разобранному.

Съ другой стороны, при соблюденіи условія (10) имѣемъ:

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{l}{x} - \frac{l'}{l-x},$$

откуда

$$\Omega = Cx^l(1-x)^{l'},$$

гдѣ

$l = \lambda_0$, $l' = -(\lambda_0 + \lambda_1)$, C постоянное произвольное.

Таковъ общій интегралъ перваго порядка для уравненія (1) полагая затѣмъ $C = 0$, получаемъ уравненіе вида (3)

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0. \qquad (3)$$

Итакъ, все сводится къ рѣшенію системы уравненій

$$\left.\begin{aligned} p(X' + Y) &= (\omega + 2q)X \\ p(Y' + 2Z) - 2rX &= (\omega + q)Y \\ pZ' - rY &= \omega Z \end{aligned}\right\}. \qquad (12)$$

Пусть степень X равна n; тогда нетрудно убѣдиться, что Y функція $n-1$-й степени, а Z функція $n-2$-й степени и мы можемъ положить

$$\left.\begin{aligned} X &= E_n x^n + E_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + E_1 x + E_0 \\ Y &= F_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + F_1 x + F_0 \\ Z &= G_{n-2}x^{n-2} + \ldots + G_1 x + G_0 \end{aligned}\right\}, \; (13)$$

гдѣ всѣ E, F и G нѣкоторыя постоянныя и притомъ E_n не нуль.

Приступая къ рѣшенію уравненій (12), прежде всего замѣтимъ, что X не дѣлится ни на x^3, ни на $(1-x)^3$; такъ какъ въ противномъ случаѣ всѣ три функціи

$$X, Y, Z$$

имѣютъ общій дѣлитель x или $1-x$.

Затѣмъ различимъ слѣдующія шесть предположеній:

1) X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p^2;

2) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x или $1-x$;

3) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ p;

4) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x^2 или $(1-x)^2$;

5) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ px или $p(1-x)$;

6) X дѣлится на p^2.

§ 3. Для упрощенія дальнѣйшихъ разсужденій обратимся къ извѣстнымъ формуламъ преобразованія дифференціальнаго уравненія (1).

Преобразованіе 1.

Полагая

$$y = x^{1-\gamma} u,$$

получаемъ

$$y' = x^{1-\gamma} u' + (1-\gamma) x^{-\gamma} u,$$

$$y'' = x^{-\gamma} u'' + 2(1-\gamma) x^{-\gamma} u' - \gamma(1-\gamma) x^{-\gamma-1} u,$$

$$x(1-x)u'' + (2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x)u' -$$
$$-(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)u = 0,$$

$$\Omega = x^{-2\gamma}\{Xx^2u'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)xu'u +$$
$$+((1-\gamma)^2 X + (1-\gamma)Yx + Zx^2)uu\}.$$

Мы будемъ пользоваться этимъ преобразованіемъ въ тѣхъ случаяхъ, когда X или вовсе не дѣлится на x или дѣлится только на x, но не дѣлится на x^2.

Если X вовсе не дѣлится на x, то при γ не $=1$ послѣ преобразованія вмѣсто Ω будемъ имѣть выраженіе

$$Xx^2u'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)xu'u +$$
$$+((1-\gamma)^2 X + (1-\gamma)Yx + Zx^2)uu,$$

гдѣ множитель при $u'u'$ дѣлится на x^2.

Въ томъ же случаѣ, когда X дѣлится на x, но не дѣлится на x^2, послѣ нашего преобразованія вмѣсто Ω получимъ выраженіе

$$Xxu'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)u'u +$$
$$+((1-\gamma)^2 \frac{X}{x} + (1-\gamma)Y + Zx)uu,$$

если только

$$\gamma \text{ не } = 1 \text{ и } (1-\gamma)E_1 + F_0 \text{ не } = 0.$$

А при $\gamma=1$, равно какъ и при $(1-\gamma)E_1 + F_0=0$, имѣемъ

$$\lambda_0 + \gamma = 0 ,$$

такъ какъ уравненія (12) даютъ

$$F_0 = (\lambda_0 + 2\gamma - 1)E_1$$

$$(\lambda_0 + \gamma)F_0 = 0$$

и потому

$$(1-\gamma)E_1 + F_0 = (\lambda_0 + \gamma)E_1,$$
$$(\lambda_0 + \gamma)(\lambda_0 + 2\gamma - 1)E_1 = 0.$$

Преобразованіе 2.

Если замѣнимъ x на $1-x$, то α и β останутся безъ измѣненія, а γ перейдетъ въ $\alpha + \beta + 1 - \gamma$.

Въ то же время ω преобразуется въ слѣдующее выраженіе

$$-\lambda_0-\lambda_1(1-x)=-(\lambda_0+\lambda_1)+\lambda_1 x.$$

Преобразованіе 3.

Полагая

$$x=\frac{1}{\xi},\ \ y=\xi^{\alpha}\eta,$$

получаемъ

$$\frac{dy}{dx}=-\xi^{\alpha+2}\frac{d\eta}{d\xi}-\alpha\,\xi^{\alpha+1}\eta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\xi^{\alpha+4}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+2(\alpha+1)\xi^{\alpha+3}\frac{d\eta}{d\xi}+\alpha(\alpha+1)\xi^{\alpha+2}\eta,$$

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(\alpha-\beta+1-(2\alpha-\gamma+2)\xi)\frac{d\eta}{d\xi}-$$

$$-\alpha(\alpha-\gamma+1)\eta=0,$$

$$\Omega=\xi^{2\alpha-n+2}\left\{X\xi^{n+2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2+(2\alpha X\xi^n-Y\xi^{n-1})\xi\frac{d\eta}{d\xi}\eta+\right.$$

$$\left.+(\alpha^2X\xi^n-\alpha Y\xi^{n-1}+Z\xi^{n-2})\eta^2\right\}.$$

Здѣсь

$$X\xi^{n+2},\ \ (2\alpha X\xi^n-Y\xi^{n-1})\xi,\ \ \alpha^2X\xi^n-\alpha Y\xi^{n-1}+Z\xi^{n-2}$$

цѣлыя функціи отъ ξ.

Первая изъ нихъ дѣлится на ξ^2 и вторая на ξ; въ послѣдней же членъ свободный отъ ξ равенъ

$$E_n\alpha^2-F_{n-1}\alpha+G_{n-2}.$$

Замѣтимъ, что α можно замѣнить на β.

При помощи разсматриваемаго нами преобразованія мы всегда можемъ достигнуть того, что X будетъ дѣлиться на x^2, если только не имѣемъ одновременно двухъ равенствъ

$$E_n\alpha^2-F_{n-1}\alpha+G_{n-2}=0\,,$$

$$E_n\beta^2-F_{n-1}\beta+G_{n-2}=0.$$

Если же оба эти равенства имѣютъ мѣсто, то

$$F_{n-1}=(\alpha+\beta)E_n,\quad G_{n-2}=\alpha\beta E_n$$

или

$$\alpha=\beta.$$

Съ другой стороны, уравненія (12) даютъ

$$F_{n-1}=(2\alpha+2\beta-n-\lambda_1+2)E_n\,,$$

$$2G_{n-2}=\{(\alpha+\beta-n-\lambda_1+2)(2\alpha+2\beta-n-\lambda_1+2)+2\alpha\beta\}E_n,$$

$$(\alpha+\beta-n-\lambda_1+2)(2\alpha-n-\lambda_1+2)(2\beta-n-\lambda_1+2)=0.$$

Сопоставляя послѣднія равенства съ предыдущими, находимъ

$$\alpha+\beta-n-\lambda_1+2=0.$$

§ 4. Обратимся къ разбору вышеуказанныхъ шести случаевъ.

1. X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p^2.

Тогда

$$\omega+2q=0\,,\quad \omega=-2q,$$

$$X'+Y=0\,,\quad Y=-X',$$

$$p(Y'+2Z)-2rX=-qY,$$

$$pZ'-rY=-2qZ\,,$$

откуда выводимъ

$$2pZ = pX'' + qX' + 2rX,$$

$$2pZ' + 2p'Z = pX''' + (p' + q)X'' + (q' + 2r)X',$$

$$2p^2Z' = p^2X''' + pqX'' + (pq' - p'q + 2rp)X' - 2rp'X$$

и наконецъ

$$p^2X''' + 3pqX'' + (2q^2 + pq' - p'q + 4rp)X' + 2r(2q - p')X = 0.$$

Послѣднее уравненіе какъ разъ совпадаетъ съ уравненіемъ (4) первой нашей замѣтки.

Отсюда заключаемъ, что по исключеніи такихъ предположеній, при которыхъ уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2), разсматриваемый нами случай имѣетъ мѣсто только при

$$\alpha + \beta = -n,\ \gamma = +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ldots,\ -n + \frac{1}{2}.$$

2. Общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x или $1-x$.

Въ виду преобразованія второго общій наибольшій дѣлитель X и p^2 можно считать равнымъ x.

Тогда $\omega + 2q$ должно дѣлиться на $1 - x$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно убѣдиться, что разсматриваемый нами случай можно свести къ послѣдующимъ, при помощи преобразованій перваго и третьяго, всякій разъ, когда одно изъ выраженій

$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 \quad \text{и} \quad \gamma + \lambda_0$$

не нуль.

Можно также привести нашъ случай къ послѣдующимъ всякій разъ, когда

$$\gamma \text{ не равно } \alpha + \beta;$$

стоитъ только сначала воспользоваться преобразованіемъ вторымъ и затѣмъ первымъ.

Итакъ, если желаемъ, чтобы разсматриваемый нами случай нельзя было привести къ послѣдующимъ, должны положить

$$\lambda_0+\lambda_1+2\gamma-2\alpha-2\beta-2=0,$$
$$\alpha+\beta-n-\lambda_1+2=0,$$
$$\gamma=\alpha+\beta,$$
$$\gamma+\lambda_0=0.$$

Отсюда затѣмъ выводимъ

$$\gamma=-\lambda_0,\ \ \alpha+\beta=-\lambda_0,\ \ \lambda_1=2-\lambda_0,\ \ n=0.$$

Съ другой стороны, X должно дѣлиться на x и потому условіе

$$n=0$$

невозможно.

Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что второй случай всегда можно привести къ послѣдующимъ.

3. Общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ p.

Покажемъ, что этотъ случай также можно привести къ послѣдующимъ.

Дѣйствительно, для того, чтобы его нельзя было привести къ послѣдующимъ при помощи преобразованій перваго и третьяго, необходимо положить

$$\gamma+\lambda_0=0 \quad \text{и} \quad \alpha+\beta-n-\lambda_1+2=0.$$

Кромѣ того мы можемъ предварительно прибѣгнуть къ преобразованію второму и затѣмъ уже къ первому или третьему.

Для того, чтобы и такимъ путемъ нельзя было привести разсматриваемый нами случай къ послѣдующимъ, необходимо прибавить еще одно условіе

$$\alpha+\beta+1-\gamma-\lambda_0-\lambda_1=0.$$

При соблюденіи всѣхъ этихъ условій получаемъ

$$\lambda_0=-\gamma,\ \ \lambda_1=\alpha+\beta+1,\ \ n=1,$$

между тѣмъ какъ n должно быть по крайней мѣрѣ равно двумъ.

Итакъ, случай третій всегда можно привести къ послѣдующимъ.

4. Общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x^2 или $(1-x)^2$.

Въ виду преобразованія второго можно считать общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равнымъ x^2.

Тогда

$$\omega+2q=A(1-x),$$

Y дѣлится на x и

$$\omega=Bx,$$

гдѣ A и B нѣкоторыя постоянныя.

Полагая

$$X=x^2U,\ \ Y=xV,$$

изъ уравненій (12) выводимъ

$$V=-xU'+(A-2)U,\ \ V'=-xU''+(A-3)U',$$

$$2(1-x)Z=(1-x)x^2U''+$$

$$+\left\{4-\frac{3A}{2}+\left(\frac{3A-B}{2}-4\right)x\right\}xU'+$$

$$+\left\{\frac{(A-2)^2}{2}+\left((A-2)\left(\frac{B-A}{2}+1\right)+2r\right)x\right\}U,$$

$$2(1-x)Z'-2Z=(1-x)x^2U'''+$$

$$+\left\{6-\frac{3A}{2}+\left(\frac{3A-B}{2}-7\right)x\right\}xU''+$$

$$+\left\{\frac{A^2-7A+12}{2}+\left((A-2)\left(\frac{B-A}{2}+1\right)+2r+3A-B-8\right)x\right\}U'$$

$$+\left\{(A-2)\left(\frac{B-A}{2}+1\right)+2r\right\}U$$

и наконецъ

$$p^2U'''+3pq_1U''+(2q_1{}^2+pq'_1-p'q_1+4pr_1)U'+$$
$$+2r_1(2q_1-p')U=0,$$

гдѣ

$$q_1=2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x \text{ и } r_1=-(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1).$$

Отсюда заключаемъ, что по исключенiи такихъ предположенiй, при которыхъ уравненiе (1) допускаетъ интегралъ вида (2), разсматриваемый нами случай имѣетъ мѣсто только при

$$\alpha+\beta-2\gamma=-n,\ \gamma=+\frac{3}{2},\ +\frac{5}{2},\ldots,\ +n-\frac{1}{2}.$$

5. Общiй наибольшiй дѣлитель X и p^2 равенъ px или $p(1-x)$.

Въ виду преобразованiя второго можно считать общiй наибольшiй дѣлитель X и p^2 равнымъ px.

Для того, чтобы этотъ случай нельзя было привести къ послѣднему при помощи преобразованiй второго и третьяго, необходимо предположить

$$\alpha+\beta-n-\lambda_1+2=0,$$

$$\alpha+\beta+1-\gamma-\lambda_0-\lambda_1=0.$$

Кромѣ того изъ уравненій (12) слѣдуетъ, что Y и ω должны дѣлиться на x.

Полагая

$$X = x^2(1-x)U \quad \text{и} \quad Y = xV,$$

получаемъ

$$\lambda_0 = 0,\ \gamma = n-1,\ \alpha + \beta = n + \lambda_1 - 2,$$

$$V = -x(1-x)U' + (2n - 4 + (5 - \lambda_1 - 2n)x)U,$$

$$V' = -x(1-x)U'' +$$

$$+ (2n - 5 + (7 - \lambda_1 - 2n)x)U' + (5 - \lambda_1 - 2n)U,$$

$$2Z = x^2(1-x)U'' + (7 - 3n + (3n + \lambda_1 - q)x)xU' +$$

$$+ \{2(n-2)^2 + ((n-3)(5 - \lambda_1 - 2n) + 2r)x\}U,$$

и для опредѣленія неизвѣстнаго U найдемъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$p^2U''' + p(a'x + b')U'' + (c'x^2 + d'x + e')U' + (f'x + g')U = 0.$$

Не производя вычисленій, нетрудно убѣдиться, что коэффиціенты

$$a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ f',\ g'$$

содержатъ r только въ первой степени.

Повторяя затѣмъ разсужденія первой замѣтки нетрудно убѣдиться, что послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

U = цѣлой функціи $n-3$-й степени отъ x

тогда и только тогда, когда r удовлетворяетъ нѣкоторому алгебраическому уравненію $n-2$-й степени.

И нетрудно указать всѣ корни этого уравненія, именно:

$$r = -(n-2)\lambda_1, -(n-3)(\lambda_1+1),$$

$$-(n-4)(\lambda_1+2), \ldots, -2(\lambda_1+n-4), -(\lambda_1+n-3).$$

Дѣйствительно, при

$$r = -(n-m-2)(\lambda_1+m)$$

можемъ положить

$$\alpha = n-m-2, \quad \beta = \lambda_1 + m.$$

Тогда, по доказанному, уравненіе (1) допускаетъ два частныхъ интеграла перваго порядка

$$\Omega_0 = X_0 y' + Y_0 y = 0 \text{ и } \Omega_1 = X_1 y' + Y_1 y = 0,$$

гдѣ

X_0 цѣлая функція $n-m-1$-й степени отъ x и дѣлится на p,

X_1 цѣлая функція $m+1$-й степени отъ x и дѣлится на x,

Y_0 и Y_1 также цѣлыя функціи отъ x.

Вмѣстѣ съ тѣмъ въ силу уравненія (1) имѣемъ

$$\frac{p\Omega'_0}{\Omega_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{p\Omega'_1}{\Omega_1} = \lambda_1 x.$$

Перемноживъ Ω_0 съ Ω_1, мы получаемъ выраженіе

$$\Omega = \Omega_0 \Omega_1,$$

какъ разъ удовлетворяющее всѣмъ нашимъ требованіямъ.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что разсматриваемый нами случай приводится къ послѣднему или не представляетъ ничего новаго.

6. X дѣлится на p^2.

Въ этомъ случаѣ Y должно дѣлиться на p, а ω должно обращаться въ нуль.

Полагая

$$X = p^2 U, \quad Y = pV, \quad \omega = 0,$$

изъ уравненій (12) выводимъ

$$V = -pU' + 2(q - p')U,$$

$$V' = -pU'' + (2q - 3p')U' + 2(q' - p'')U,$$

$$2Z = p^2 U'' + p(4p' - 3q)U' +$$

$$+ (2(q - p')^2 - 2p(q' - p'') + 2pr)U$$

и наконецъ

$$p^2 U''' + 3pq_1 U'' + (2q_1{}^2 + pq'_1 - p'q_1 + 4pr_1)U' +$$

$$+ 2r_1(2q_1 - p')U = 0,$$

гдѣ

$$q_1 = 2p' - q = 2 - \gamma - (3 - \alpha - \beta)x,$$

$$r_1 = r - q' + p'' = -(1 - \alpha)(1 - \beta).$$

Отсюда заключаемъ, что по исключеніи такихъ предположеній, при которыхъ наше уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2), разсматриваемый нами случай имѣетъ мѣсто только при

$$\alpha + \beta = n - 2, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n - \frac{5}{2}.$$

§ 5. Заключеніе.

Разсматривая наши результаты и принимая во вниманіе преобразованія § 3, нетрудно убѣдиться, что уравненіе (1)

$$x(1 - x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

допускаетъ интегралъ вида (3)

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0$$

въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) $\alpha+\beta=-n, \qquad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$

2) $\alpha+\beta=+n, \qquad \gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2};$

3) $\alpha+\beta-2\gamma=-n, \quad \gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2};$

4) $\alpha+\beta-2\gamma=+n, \quad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$

5) $\left.\begin{matrix} 2\alpha-\gamma \\ \text{или} \\ 2\beta-\gamma \end{matrix}\right\} =-n, \quad \alpha+\beta-\gamma=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$

6) $\left.\begin{matrix} 2\alpha-\gamma \\ \text{или} \\ 2\beta-\gamma \end{matrix}\right\} =+n, \quad \alpha+\beta-\gamma=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2};$

7) $\left.\begin{matrix} \alpha-\beta+\gamma \\ \text{или} \\ \beta-\alpha+\gamma \end{matrix}\right\} =-n, \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$

8) $\left.\begin{matrix} \alpha-\beta+\gamma \\ \text{или} \\ \beta-\alpha+\gamma \end{matrix}\right\} =+n, \gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2}.$

Здѣсь не указаны только тѣ случаи, при которыхъ уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2)

$$Xy'+Yy=0, \qquad (2)$$

такъ какъ таковые перечислены раньше.