О КРИВИЗНѢ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

А. Н. Коркина.

(Извлеченіе изъ письма къ профессору Н. В. Бугаеву).

Выраженіе мѣры кривизны поверхности въ произвольныхъ на ней координатахъ представляетъ теорему на столько важную, что, какъ въ интересѣ самаго предмета, такъ и въ виду облегчить преподаваніе, желательно имѣть по возможности болѣе разнообразныхъ ея доказательствъ.

Предлагая новое аналитическое доказательство этой теоремы, мы начнемъ съ рѣшенія одной задачи на измѣненіе перемѣнныхъ независимыхъ.

Пусть будутъ E, F, G три заданныя функціи перемѣнныхъ независимыхъ t и u, а ξ и η двѣ новыя перемѣнныя, изъ коихъ каждая есть нѣкоторая функція отъ t и u.

Предполагается, что, обратно, t и u могутъ быть выражены въ ξ и η.

Выраженія ξ и η въ t и u не даны, но задано только соотношеніе

$$\lambda\, d\xi\, d\eta = E dt^2 + 2F dt\, du + G du^2, \qquad (1)$$

гдѣ λ также не заданная функція ξ и η, но такая, что, подставивъ въ первую часть этого уравненія вмѣсто ξ и η ихъ величины въ t и u, мы обратимъ его въ тождество.

Задача, которую мы рѣшимъ сначала, состоитъ въ преобразованіи выраженія

$$k = -\frac{2}{\lambda}\frac{\partial^2 \lg\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

такимъ образомъ, что вмѣсто λ должны войти три коэффиціента E, F, G и вмѣсто второй производной по ξ и η производныя по t и u.

Замѣтимъ, что уравненіе (1) допускаетъ безчисленное множество различныхъ ξ и η при однихъ и тѣхъ же t и u. Дѣйствительно, имѣя нѣкоторыя ξ, η, удовлетворяющія уравненію (1), мы можемъ сдѣлать $\xi = \varphi(\xi_1)$, $\eta = \psi(\eta_1)$, разумѣя подъ $\varphi(\xi_1)$ и $\psi(\eta_1)$ совершенно произвольныя функціи, и положить $\lambda_1 = \lambda\varphi'(\xi_1).\psi'(\eta_1)$, послѣ чего уравненіе (1) будетъ удовлетворяться величинами ξ_1, η_1 и λ_1, то есть будетъ

$$\lambda_1 d\xi_1 d\eta_1 = Edt^2 + 2Fdt\,du + Gdu^2.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, вмѣсто ξ, η взять ξ_1, η_1.

Не смотря, однако, на разнообразныя зависимости, которыя можно установить между ξ, η съ одной стороны и t, u съ другой, выраженіе k, какъ мы увидимъ, будетъ содержать совершенно опредѣленнымъ образомъ перемѣнныя t и u, то есть будетъ свободно отъ этихъ зависимостей.

Начиная преобразованіе величины k, мы напишемъ уравненіе (1) въ видѣ

$$\lambda d\xi d\eta = E(dt - \omega\,du)(dt - \Omega\,du), \qquad (2)$$

гдѣ

$$\omega = \frac{-F + \sqrt{-1}.\sqrt{EG-F^2}}{E}, \quad \Omega = \frac{-F - \sqrt{-1}.\sqrt{EG-F^2}}{E}.$$

Замѣнимъ теперь dt и du ихъ величинами

$$dt = t'_\xi d\xi + t'_\eta d\eta, \quad du = u'_\xi d\xi + u'_\eta d\eta,$$

гдѣ для сокращенія письма сдѣлано

$$t'_\xi = \frac{\partial t}{\partial \xi},\ t'_\eta = \frac{\partial t}{\partial \eta},\ u'_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi},\ u'_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

тогда во второй части должны исчезнуть члены съ $d\xi^2$ и $d\eta^2$, то есть члены

$$E(t'_\xi - \omega u'_\xi)(t'_\xi - \Omega u'_\xi)\,d\xi^2 \text{ и } E(t'_\eta - \omega u'_\eta)(t'_\eta - \Omega u'_\eta)\,d\eta^2.$$

Это же обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только въ двухъ случаяхъ, а именно, когда

$$t'_\xi - \Omega u'_\xi = 0\,,\ \ t'_\eta - \omega u'_\eta = 0,$$

или же когда

$$t'_\xi - \omega u'_\xi = 0\,,\ \ t'_\eta - \Omega u'_\eta = 0.$$

Дѣйствительно, нельзя положить разомъ

$$t'_\xi - \omega u'_\xi = 0 \text{ и } t'_\eta - \omega u'_\eta = 0,$$

ибо тогда функціональный опредѣлитель $t'_\xi u'_\eta - t'_\eta u'_\xi$ будетъ нуль и, слѣдовательно, t будетъ функціей отъ u, что невозможно, такъ какъ t и u перемѣнныя независимыя.

На томъ же основаніи нельзя сдѣлать въ одно и то же время

$$t'_\xi - \Omega u'_\xi = 0 \text{ и } t'_\eta - \Omega u'_\eta = 0.$$

Поэтому остаются возможными только два упомянутые случая; они сводятся къ одному. Въ самомъ дѣлѣ, различить одинъ случай отъ другого значитъ установить, которую изъ двухъ перемѣнныхъ, входящихъ въ первую часть уравненія (2), назвать буквою ξ и которую буквою η. Такъ какъ это для насъ безразлично, то мы можемъ выбрать любой изъ двухъ случаевъ, напримѣръ, первый. Сдѣлаемъ же, слѣдовательно,

$$t'_\xi = \Omega u'_\xi,\ t'_\eta = \omega u'_\eta. \tag{3}$$

Тогда уравненіе (2) напишется такъ:

$$\lambda d\xi d\eta = E(t'_\xi - \omega u'_\xi)\, d\xi . (t'_\eta - \Omega u'_\eta)\, d\eta,$$

или, на основаніи уравненій (3),

$$\lambda d\xi d\eta = -E(\omega - \Omega)^2 u'_\xi u'_\eta d\xi d\eta.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\lambda = -E(\omega - \Omega)^2 u'_\xi u'_\eta .$$

На основаніи этой величины λ выраженіе k напишется такъ:

$$k = \frac{2}{E(\omega - \Omega)^2 u'_\xi u'_\eta} \left[\frac{\partial^2 \lg E(\omega - \Omega)^2}{d\xi\, \partial\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{d\xi\, \partial\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\eta}{\partial\xi\, \partial\eta} \right].$$

Для рѣшенія нашей задачи о преобразованіи k нужно преобразовать три члена, стоящіе подъ скобками.

Съ этою цѣлію означимъ черезъ V какую угодно функцію отъ ξ и η. Ее можно разсматривать вмѣстѣ съ тѣмъ и какъ функцію отъ t и u, что произойдетъ, когда мы ξ и η замѣнимъ ихъ величинами въ t и u.

Общія формулы дифференціальнаго исчисленія намъ даютъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial t} t'_\xi + \frac{\partial V}{\partial u} u'_\xi, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial t} t'_\eta + \frac{\partial V}{\partial u} u'_\eta .$$

На основаніи уравненій (3) отсюда получаемъ

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} \Omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) u'_\xi, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) u'_\eta . \qquad (4)$$

Далѣе, имѣя въ виду уравненія (4), мы находимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) u'_\eta \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + u'_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + u'_\xi u'_\eta \left[\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \omega + \frac{\partial V}{\partial u} \right) \right].$$

Выполняя указанныя здѣсь дифференцированія, получимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\omega\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial u}\right)+$$

$$+u'_\xi u'_\eta\left[\left(\Omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\frac{\partial V}{\partial t}+\omega\Omega\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(\omega+\Omega)\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial u}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right]. \quad (5)$$

Съ другой стороны, составляя производныя $\frac{\partial t'_\xi}{\partial\eta}$ и $\frac{\partial t'_\eta}{\partial\xi}$, которыя равны одной и той же величинѣ $\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\partial\eta}$, мы на основаніи уравненій (3) и (4) получаемъ

$$\frac{\partial t'_\xi}{\partial\eta}=\Omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+u'_\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}=\Omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+u'_\xi u'_\eta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\omega+\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial t'_\eta}{\partial\xi}=\omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+u'_\eta\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=\omega\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+u'_\xi u'_\eta\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\Omega+\frac{\partial\omega}{\partial u}\right).$$

Уравнивая между собою $\frac{\partial t'_\xi}{\partial\eta}$ и $\frac{\partial t'_\eta}{\partial\xi}$, мы найдемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=-Pu'_\xi u'_\eta, \quad (6)$$

гдѣ

$$P=\frac{1}{\omega-\Omega}\left(\Omega\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial(\alpha+\Omega)}{\partial t}+\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}=$$

$$=\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg\left(\dfrac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}. \quad (7)$$

Послѣ подстановки вмѣсто $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$ его величины изъ уравненія (6) въ (5) мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} = u'_\xi u'_\eta \Big[\Big(\Omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial u} - P\omega \Big) \frac{\partial V}{\partial t} - P \frac{\partial V}{\partial u} +$$

$$+ \omega\Omega \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (\omega + \Omega) \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} \Big]. \qquad (8)$$

Сдѣлавъ здѣсь

$$V = \lg E(\omega - \Omega)^2 = \lg E + 2 \lg(\omega - \Omega),$$

мы получимъ преобразованное выраженіе перваго изъ трехъ упомянутыхъ членовъ.

Далѣе, уравненіе (6) по раздѣленіи его на u'_ξ даетъ

$$\frac{\partial \lg u'_\xi}{\partial \eta} = - P u'_\eta,$$

а отсюда имѣемъ

$$\frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{\partial \xi \partial \eta} = - P \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - u'_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

Это равенство въ силу уравненій (4) и (6) перейдетъ въ слѣдующее

$$\frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{\partial \xi \partial \eta} = P^2 u'_\xi u'_\eta - u'_\xi u'_\eta \Big(\frac{\partial P}{\partial t} \Omega + \frac{\partial P}{\partial u} \Big) = \Big(P^2 - \frac{\partial P}{\partial t} \Omega - \frac{\partial P}{\partial u} \Big) u'_\xi u'_\eta. \qquad (9)$$

Это есть преобразованное выраженіе втораго изъ упомянутыхъ членовъ.

Совершенно также, дѣля уравненіе (6) на u'_η и пользуясь уравненіями (4), мы выведемъ

$$\frac{\partial^2 \lg u'_\eta}{\partial \xi \partial \eta} = \Big(P^2 - \frac{\partial P}{\partial t} \omega - \frac{\partial P}{\partial u} \Big) u'_\xi u'_\eta. \qquad (10)$$

Подставимъ же въ уравненіе

$$\frac{1}{2} k E(\omega - \Omega)^2 = \frac{1}{u'_\xi u'_\eta} \Big[\frac{\partial \lg E(\omega - \Omega)^2}{\partial \xi d\eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\xi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \lg u'_\eta}{\partial \xi \partial \eta} \Big]^2$$

вмѣсто трехъ членовъ въ скобкахъ ихъ величины изъ уравненій (8), гдѣ $V = \lg E(\omega - \Omega)^2$, (9) и (10); тогда произведеніе $u'_\xi u'_\eta$ сократится и останется въ результатѣ выраженіе, зависящее только отъ коэффиціентовъ E, F, G и ихъ производныхъ перваго и втораго порядка по t и u.

Имѣя въ виду выраженіе (7) величины P и замѣчая, что

$$\Omega\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial u}-P\omega=\frac{1}{\omega-\Omega}\left(\omega\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\Omega\frac{\partial\omega}{\partial u}+\omega^2\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\Omega^2\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\lg\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial u}-\omega\Omega\,\frac{\partial\lg\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega\Omega}\right)}{\partial t},$$

мы послѣ нѣкоторыхъ приведеній окончательно получимъ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}kE(\omega-\Omega)^2&=\omega\Omega\frac{\partial^2\lg E}{\partial t^2}+(\omega+\Omega)\frac{\partial^2\lg E}{\partial t\,\partial u}+\frac{\partial^2\lg E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2(\omega+\Omega)}{\partial t\,\partial u}+\\&+\frac{\partial^2(\omega\Omega)}{\partial t^2}-\left[\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial u}+\omega\Omega\frac{\partial\lg\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega\Omega}\right)}{\partial t}\right]\frac{\partial\lg E}{\partial t}-\\&-\left[\frac{1}{2}(\omega+\Omega)\frac{\partial\lg\left(\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}\right]\frac{\partial\lg E}{\partial u}-\\&-\left[\frac{\partial(\omega\Omega)}{\partial t}\,\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial t}+\frac{\partial(\omega+\Omega)}{\partial t}\,\frac{\partial\lg(\omega-\Omega)}{\partial u}\right].\qquad(11)\end{aligned}$$

Если вмѣсто ω и Ω мы пожелаемъ ввести F и G, то должны здѣсь сдѣлать

$$\omega+\Omega=-\frac{2F}{E},\quad \omega\Omega=\frac{G}{E},\quad \omega-\Omega=\frac{2\sqrt{-1}\sqrt{EG-F^2}}{E},$$

$$\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}=-\frac{\sqrt{-1}\sqrt{EG-F^2}}{F},\quad \frac{\omega-\Omega}{\omega\Omega}=\frac{2\sqrt{-1}\sqrt{EG-F^2}}{G}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе (11) рѣшаетъ нашу задачу о преобразованіи выраженія

$$k=-\frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial^2\lg\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta}.\qquad(12)$$

Чтобы перейти теперь къ мѣрѣ кривизны поверхностей, мы замѣтимъ, что въ прямоугольныхъ координатахъ квадратъ линейнаго элемента ds на поверхности выражается такъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} dx\,dy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2.$$

Положивъ въ уравненіи (11)

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,\quad F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},\quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,\quad t = x,\quad u = y,$$

мы увидимъ, что производныя третьяго порядка сократятся и останется

$$k = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}.$$

Это есть извѣстное и прежде всего доказываемое выраженіе мѣры кривизны.

Итакъ, въ формулѣ (11) k есть мѣра кривизны, которая и получается въ какихъ угодно координатахъ t и u на поверхности.

Можно также поступать иначе, доказавъ сначала выраженіе (12) мѣры кривизны и затѣмъ преобразуя, какъ мы это сдѣлали, формулу (12).

Въ самомъ дѣлѣ, весьма легко получить k въ координатахъ α и β, для которыхъ

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)^*$$

и затѣмъ перейти къ перемѣннымъ ξ и η, полагая

$$\xi = \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \eta = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Тогда для мѣры кривизны и получится выраженіе (12).

---

* *M. Bertrand,* Traité de calcul différentiel, page 763.